

ОПТИМИЗАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛА И ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОГО КАНАЛА С ПАМЯТЬЮ ДЛЯ ДОСТИЖЕНИЯ ЕГО МАКСИМАЛЬНОЙ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ

DOI: 10.36724/2072-8735-2022-16-2-4-15

Manuscript received 20 October 2021;
Accepted 10 December 2021

Сухоруков Александр Сергеевич,
МТУСИ, Москва, Россия,
suhas@yandex.ru

Ключевые слова: пропускная способность, взаимная информация, вероятность ошибки, дискретно-непрерывный канал, межсимвольная интерференция, аддитивный белый гауссов шум, идеальный фильтр, канал с памятью, порог Шеннона, оптимальный индикатор, ортогональность.

Статья посвящена определению пропускной способности канала с памятью. В качестве модели выбран дискретно-непрерывный детерминированный канал с памятью с фиксированной полосой частот. Кодер формирует кодовые комбинации из дискретных по времени и непрерывных по уровням символов. На выходе канала с памятью эти комбинации превращаются в реализации непрерывных процессов. Канал детерминированный, т.е. параметры канала, множество передаваемых и, однозначно соответствующее ему множество принимаемых комбинаций, известны и на передаче, и на приеме. Для передачи используются только разрешенные комбинации. Информационная содержательность процесса на входе приемника максимальна, если он гауссов. Это условие выполняется, так как каждая комбинация на выходе ДНДКП есть сумма множества импульсов в результате межсимвольной интерференции. Эта сумма нормализуется с ростом скорости передачи. Энергия комбинаций на входе канала максимальна, если она постоянна в заданной полосе частот. Энергия комбинаций на выходе канала максимальна, если АЧХ канала также постоянна в заданной полосе частот. В результате определены требования к форме информационных импульсов, которые должны иметь вид функций отсчетов. Импульсы в виде функций отсчетов могут быть сформированы, если кодер подает на вход формирующего фильтра последовательность дельта-импульсов. При прохождении через канал с такой же АЧХ форма комбинаций не искажается. Их параметры на входе декодера соответствуют параметрам, заложенным в комбинации при их формировании на передаче. Так как разрешенные комбинации имеют заданную энергию и энергию разности комбинаций, то оптимальный прием реализуется с помощью набора корреляторов. Известны разные оценки предела Шеннона, превышение которого позволяет получить сколь угодно малую вероятность ошибки. Для этого энергия комбинации должна расти пропорционально логарифму числа разрешенных комбинаций. В статье рассчитано точное значение этого предела, совпадающее с меньшей из оценок. При комплексной оптимизации скорости передачи и помехоустойчивости приема пропускная способность канала с памятью увеличивается за счет того, что избыточное по сравнению с пределом Шеннона отношение энергии бита к энергии шума преобразуется в скорость передачи информации. При этом сохраняется, хотя и более медленное, стремление вероятности ошибки к нулю при сколь угодно большом количестве разрешенных комбинаций. Анализ сингулярного случая передачи информационных импульсов заданной формы позволяет заключить, что в нереализуемом случае приема информационных импульсов, дифференцируемых бесконечное число раз, вероятность ошибки может быть сделана сколь угодно малой при сколь угодно большой скорости передачи.

Информация об авторе:

Сухоруков Александр Сергеевич, к.т.н., доцент кафедры общей теории связи, МТУСИ, Москва, Россия

Для цитирования:

Сухоруков А.С.. Оптимизация параметров сигнала и дискретно-непрерывного канала с памятью для достижения его максимальной пропускной способности // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2022. Том 16. №2. С. 4-15.

For citation:

Sukhorukov A.S. (2022) Optimization of signal parameters and discrete-continuous channel with memory to achieve its bandwidth. T-Comm, vol. 16, no.2, pp. 4-15. (in Russian)

Введение

Пропускная способность канала определена как верхняя грань количества взаимной информации, содержащейся в сумме сигнальной комбинации с аддитивным белым гауссовым шумом относительно информационной комбинации.

Верхняя грань ищется:

- для всех распределений процессов на входе и выходе канала,
- для различных типов амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) канала,
- для возможных алгоритмов передачи и приема сигнала,
- для фиксированных полосе частот канала, величины защитного интервала и памяти канала.

Информационная содержательность процесса на входе приемника максимальна, если он гауссов. Это условие выполняется, так как каждая комбинация на выходе ДНДКП есть сумма множества импульсов в результате межсимвольной интерференции. Эта сумма нормализуется с ростом скорости передачи.

Энергия комбинаций на входе канала максимальна, если она постоянна в заданной полосе частот. Энергия комбинаций на выходе канала максимальна, если АЧХ канала также постоянна в заданной полосе частот. В результате определены требования к форме информационных импульсов, которые должны иметь вид функций отсчетов. Эти требования определяют оптимальную структурную схему передатчика: кодер формирует дискретные по времени и непрерывные по уровням импульсы, фильтр передатчика ограничивает их спектр полосой частот канала, усилитель мощности обеспечивает необходимую энергию каждой из них и энергия разности разрешенных комбинаций. Импульсы в виде функций отсчетов могут быть сформированы, если кодер подает на вход формирующего фильтра последовательность дельта-импульсов. При прохождении через канал с такой же АЧХ форма комбинаций не искажается. Их параметры на входе декодера соответствуют параметрам, заложенным в комбинации при их формировании на передаче.

Так как разрешенные комбинации имеют заданную энергию и энергию разности комбинаций, то оптимальный прием реализуется с помощью набора корреляторов. Известны разные оценки предела Шеннона, превышение которого позволяет получить сколь угодно малую вероятность ошибки. Для этого энергия комбинации должна расти пропорционально логарифму числа разрешенных комбинаций. В статье рассчитано точное значение этого предела, совпадающее с меньшей из оценок.

При комплексной оптимизации скорости передачи и помехоустойчивости приема пропускная способность канала с памятью увеличивается за счет того, что избыточное по сравнению с пределом Шеннона отношение энергии бита к энергии шума преобразуется в скорость передачи информации. При этом сохраняется, хотя и более медленное, стремление вероятности ошибки к нулю при сколь угодно большом количестве разрешенных комбинаций.

По дискретно-непрерывному детерминированному каналу с памятью с заданной полосой пропускания, на выходе которого действует сигнал с определенной средней мощностью бита и аддитивный белый гауссов шум с заданной спектральной плотностью энергии можно передавать ин-

формацию со скоростью сколь угодно близкой к отношению средней мощности бита к спектральной плотности энергии шума.

Анализ сингулярного случая передачи информационных импульсов заданной формы позволяет заключить, что в нереализуемом случае приема информационных импульсов, дифференцируемых бесконечное число раз, вероятность ошибки может быть сделана сколь угодно малой при сколь угодно большой скорости передачи.

В работах [7,8] приведены доказательства теоремы кодирования и ее обращение для дискретного, дискретно-непрерывного и непрерывного канала связи (КС) с памятью при ограничениях на полосу частот F канала, энергию E кодовых комбинаций и энергию E_p разности комбинаций. Эти теоремы определяют возможность получить сколь угодно малую вероятность ошибки, если скорость передачи информации не превышает пропускную способность канала связи с памятью. В работах [5,9,11] рассмотрены различные способы перехода от КС без памяти к каналу с памятью с целью увеличения скорости передачи и пропускной способности. Покажем, что для достижения пропускной способности канала связи с памятью необходимо оптимизировать параметры сигнала и канала с памятью

В качестве модели выбираем дискретно-непрерывный детерминированный КС с памятью (ДНДКП) с ограниченной полосой частот F . Характеристики ДНДКП:

1. Источник информации является источником дискретных по времени и непрерывных по уровням кодовых комбинаций $v(t) \in V^N$ длительностью $T_k = NT$ из N символов длительностью T , поступающих на вход канала с ограниченной полосой частот F .

2. Канал детерминированный, т.е. его параметры известны и на передаче, и на приеме.

Следовательно, и на передаче и на приеме известно множество передаваемых комбинаций $v_m(t)$ и, однозначно соответствующее ему множество принимаемых комбинаций $u_m(t) \in U^N$ непрерывных по времени и уровням. Каждую комбинацию $u_m(t)$ на выходе канала с памятью можно записать так:

$$u_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} v_m(\tau)g(t-\tau)d\tau; \quad (1)$$

где $g(t)$ – импульсная реакция канала, известная и на передаче и на приеме.

Наложим ограничения на ансамбль передаваемых дискретных последовательностей, указанные, в частности, в [8]:

1. Для передачи используем M_p комбинаций $v_m(t) \in V^{M_p}$, для которых энергия E реализаций $u_m(t)$ на выходе ДНДКП удовлетворяет неравенству:

$$E - \alpha \leq \int_{-\infty}^{\infty} [u_m(\tau)]^2 d\tau \leq E; \quad 1 \leq m \leq M_p;$$

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [u_m(\tau)]^2 d\tau; \quad m = 1 \dots M_p; \quad (2)$$

2. Для передачи используем M_p комбинаций $v_m(t)$, для которых энергия E_p разности реализаций $u_m(t)$ на выходе ДНДКП удовлетворяет неравенству:

$$E_p - \beta \leq \int_{-\infty}^{\infty} [u_m(\tau) - u_n(\tau)]^2 d\tau \leq E_p;$$

$$1 \leq m \leq M_p; 1 \leq n \leq M_p; m \neq n;$$

$$E_p - \beta \leq \int_{-\infty}^{\infty} [u_m(\tau) - u_n(\tau)]^2 d\tau \leq E_p;$$

$$1 \leq m \leq M_p; 1 \leq n \leq M_p; m \neq n;$$

Энергию разности можно представить в виде:

$$E_p = \int_{-\infty}^{\infty} [u_m(\tau) - u_n(\tau)]^2 d\tau = 2E(1 - R); \quad (3)$$

$$R = \frac{1}{E} \int_{-\infty}^{\infty} u_m(\tau)u_n(\tau)d\tau;$$

где R – коэффициент корреляции между комбинациями на выходе КС.

Множества разрешенных комбинаций V^{M_p} и U^{M_p} точно известны и на передаче, и на приеме.

3. На вход декодера поступает процесс $z(t) = u_m(t) + x(t)$, равный сумме одной из реализаций сигнала $u_m(t)$ и реализации помехи $x(t)$ в виде аддитивного белого гауссова шума (АБГШ). Множества разрешенных комбинаций V^{M_p} и U^{M_p} – счетные множества. Наложённые ограничения позволяют множество Z принимаемых реализаций суммы сигнала и помехи разбить на M_p непересекающихся подмножеств Z^{M_p} , каждое из которых соответствует одной из принимаемых реализаций сигнала $u_m(t)$ и однозначно соответствующей ей передаваемой реализации $v_m(t)$ [7,8]. Наложённые ограничения позволяют рассматривать передаваемые и принимаемые комбинации как буквы алфавита дискретного по времени и непрерывного по уровням источника, для которого доказаны теорема кодирования и ее обращение [7,8].

4. Передаваемые комбинации $v_m(t)$ разделены защитным временным интервалом T_3 . Длительность комбинации $u(t)$ на выходе КС превышает T_k на величину памяти $2T_n$ канала. Длительность T_k реализаций сигнала $v_m(t)$, защитный временной интервал T_3 между передаваемыми реализациями сигнала и длительность T_n «памяти» канала удовлетворяют соотношению: $T_k \gg T_3 \gg T_n$ [7,8].

Пропускную способность КС с памятью определим как максимальное количество средней взаимной информации $I(Z^{M_p}; U^{M_p})$ между сигналом $u(t)$ и суммой $z(t)$ помехи с шумом, переданное по КС в единицу времени, т.е. как максимальную скорость передачи (верхняя грань скорости передачи) при вероятности ошибки p меньше сколь угодно малой ϵ :

$$C = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M_p \rightarrow \infty \\ T_k = ANT \rightarrow \infty \\ F, T_3, T_n \\ АПП \\ K(j\omega) \\ W(u)}} \sup \frac{1}{T_k + T_3 + 2T_n} I(Z^{M_p}; U^{M_p}); \quad p < \epsilon; \quad (4)$$

Оптимизация состоит в определении верхней грани $I(Z^{M_p}; U^{M_p})$ путем определения:

– оптимальных распределений процессов на входе $W(v)$ и

выходе $W(u)$ КС;

- оптимальной АЧХ $K(j\omega)$ канала;
- оптимального спектра передаваемого сигнала;
- оптимального алгоритма передачи и приема (АПП) сигнала.

Пропускную способность определяем, как предел (4) для сколь угодно больших длительности T_k , длины N комбинаций и количестве M_p разрешенных реализаций.

Полосу частот F канала, величину защитного интервала T_3 и память канала T_n считаем фиксированными.

Для помехи типа АБГШ взаимная информация $I(Z^{M_p}; U^{M_p})$ может быть выражена через энтропию источника $H(U^{M_p})$ и потери информации в канале $H(X)$ [1,2]:

$$I(Z^{M_p}; U^{M_p}) = H(U^{M_p}) - H(U^{M_p} / Z^{M_p});$$

$$H(U^{M_p} / Z^{M_p}) = H(X); \quad I(Z^{M_p}; U^{M_p}) = H(U^{M_p}) - H(X);$$

Потери информации в КС для m -ичной системы сигналов при средней вероятности ошибки $p_{ош}$ можно оценить по формуле [2]:

$$H(X) = -p_{ош} \log \frac{p_{ош}}{m-1} - (1-p_{ош}) \log(1-p_{ош});$$

Потери информации в единицу времени равны $H(X)/(T_k + T_3 + 2T_n)$.

Выражение для C запишем в виде:

$$C = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M_p \rightarrow \infty \\ T_k = ANT \rightarrow \infty \\ F, T_3, T_n \\ АПП \\ K(j\omega) \\ W(u)}} \sup \frac{1}{T_k + T_3 + 2T_n} [H(U^{M_p}) - H(X)]; \quad (5)$$

Вывод

Так как скорость передачи информации и вероятность ошибки зависят от параметров канала и сигнала, способов передачи и приема, то оптимизация этих параметров и алгоритмов позволит достичь максимального значения пропускной способности канала при сколь угодно малой вероятности ошибки.

2. Максимизация ФПВ сигнала

Информационная содержательность процесса $u(t)$ на входе приемника максимальна, если он гауссов [1]. Следовательно, процесс $u(t)$ должен быть гауссов. Это справедливо для ДНДКП. Уменьшение длительности T информационных импульсов при постоянной полосе частот F канала, приводит к тому, что КС для передаваемых комбинаций становится узкополосным.

Процесс $u(t)$ на выходе узкополосного КС имеет тенденцию к нормализации [3]. Действительно, реакции канала $u_{kc}(t)$ на единичный информационный импульс $v_m(t)$ равна (1). Поэтому процесс $u(t)$ в любой момент времени есть сумма реакций $u_{kc}(t)$ на передаваемую последовательность информационных импульсов:

$$u(t_k) = \sum_{j=-K}^K u_{kc}(t_k + jT); \quad (6)$$

В формуле (6) слагаемое $u_{kc}(t_k)$ при $j=0$ есть напряжение информационного символа, а остальные слагаемые при $j \neq 0$ есть помеха от МСИ. Значение K определяется памятью КС при заданном соотношении FT .

Так как передаваемые символы являются дискретными по времени, но непрерывными по уровням процессами, то при равновероятных символах значения $u(t_k)$ распределены равномерно в некоторых пределах от $-u_{max}$ до u_{max} :

$$W[u(t_k)] = 1/2u_{max}; |u(t_k)| \leq u_{max}; (7)$$

Это распределение в соответствии с центральной предельной теоремой [3] аппроксимируется нормальным распределением. Для распределения (7) числовые характеристики дисперсия, коэффициент асимметрии, момент M_4 и коэффициент эксцесса равны:

$$\sigma^2 = \frac{u_{max}^2}{3}; k = 0; M_4 = \frac{u_{max}^4}{5}; \gamma = \frac{M_4}{M_2^2} - 3 = -1.2;$$

Погрешность аппроксимации (7) нормальным законом выражена в [3] через полином Эрмита $H_n(x)$:

$$\varepsilon \leq \frac{\gamma}{24K} H_4\left(\frac{u_{max}}{\sigma\sqrt{K}}\right) = -\frac{1}{20K} H_4\left(\sqrt{\frac{3}{K}}\right); H_4(x) = x^4 - 6x^2 + 3;$$

При $K=10$ погрешность равна, примерно, 0.01. При $K \rightarrow \infty$ погрешность аппроксимации стремится к 0.

Мы принимаем M_p дискретных комбинаций. Нормальное распределение мгновенных значений каждой из них обеспечивает большее количество M_p разрешенных комбинаций, чем для любого другого закона распределения при заданной дисперсии. Действительно, энтропия процесса с заданной дисперсией максимальна, если процесс гауссов. Неопределенность на выходе КС заключается в том, какая именно реализация из возможных наблюдается. Следовательно, чем больше энтропия процесса, тем больше различных реализаций процесса возможны при заданной дисперсии.

Вывод

При уменьшение длительности T информационных импульсов мгновенные значения непрерывных комбинаций на выходе ДНДКП нормализуются; их энтропия максимальна при заданной энергии комбинаций.

3. Оптимальная передача

Рассмотрим процесс формирования комбинаций. Структурная схема системы связи показана на рисунке 1.

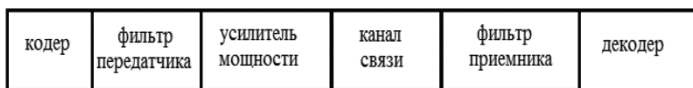


Рис. 1. Структурная схема ДНДКП

В соответствии с выбранной моделью кодер формирует комбинации дискретные по времени и непрерывные по уровням. Фильтр передатчика ограничивает спектр передаваемой комбинации в соответствии с полосой частот F канала. Усилитель мощности обеспечивает необходимую среднюю мощность и энергию разрешенных комбинаций. АЧХ канала связи и фильтра приемника заданы.

Пусть анализируемый ДНДКП имеет финитную полосу частот $\Omega = 2\pi F$, а коэффициент передачи ограничен величиной K . Энергия сигнала на входе КС задана. В этом случае энергия E сигнала на выходе КС будет максимальна и, следовательно, пропускная способность КС будет максимальна, если АЧХ канала эквивалентна АЧХ идеального ФНЧ (ИФНЧ) и постоянна в полосе частот F (рис. 2а):

$$K(f) = K = const; 0 < f < F; (8)$$

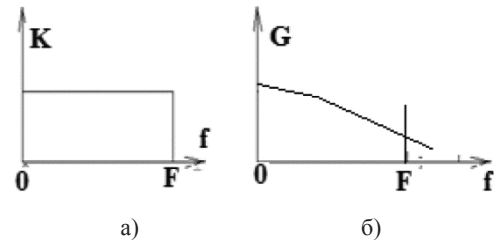


Рис. 2. АЧХ идеального ФНЧ (а) и неравномерный спектр случайного сигнала (б)

Действительно, если энергетический спектр сигнала на входе КС произвольный рис.2б, и его энергия в полосе F ограничена, то уменьшение коэффициента передачи $K(f)$ на любой частоте уменьшит энергию сигнала на выходе КС. Таким образом, оптимальной АЧХ канала связи является АЧХ вида (8) и рис. 2а.

Спектральная плотность энергии передаваемой комбинации ограничена. Тогда энергия сигнала $v_k(t, t_v)$ в финитной полосе частот максимальна, если она постоянна:

$$G_v(\omega) = G_v = const; \text{ при } 0 < \omega < \Omega = 2\pi F;$$

Таким образом, амплитудный спектр сигнальных комбинаций $v_k(t, t_k)$ должен быть постоянным в полосе частот:

$$S_{v_k}(j\omega) = S_{v_k} e^{j\omega t_k}; S_{v_k} = const; 0 < \omega < 2\pi F = \Omega; j\omega t_{v_k} - \text{средняя фаза спектра.} (9)$$

Такие комбинации без искажений проходит через канал связи с АЧХ рисунке 2а, приобретая только некоторую временную задержку. То есть амплитудный спектр комбинаций $u_k(t, t_k)$ на выходе канала так же постоянен в полосе частот КС:

$$S_{u_k}(j\omega) = S_{u_k} e^{j\omega t_k} K; S_{u_k} = const; 0 < \omega < 2\pi F = \Omega; (10)$$

Временной задержкой в КС пренебрегаем, так как она одинакова для всех комбинаций.

Следовательно, в данном случае $|v_k(t)| = |u_k(t)|$ с точностью до постоянного множителя и временного сдвига. Временная диаграмма каждого импульса с амплитудным спектром (10) и некоторой амплитудой V_k , соответствует выражению (11) и рисунке 3а:

$$v_k(t, t_k) = V_k \frac{\sin \Omega(t - t_k)}{\Omega(t - t_k)}; (11)$$

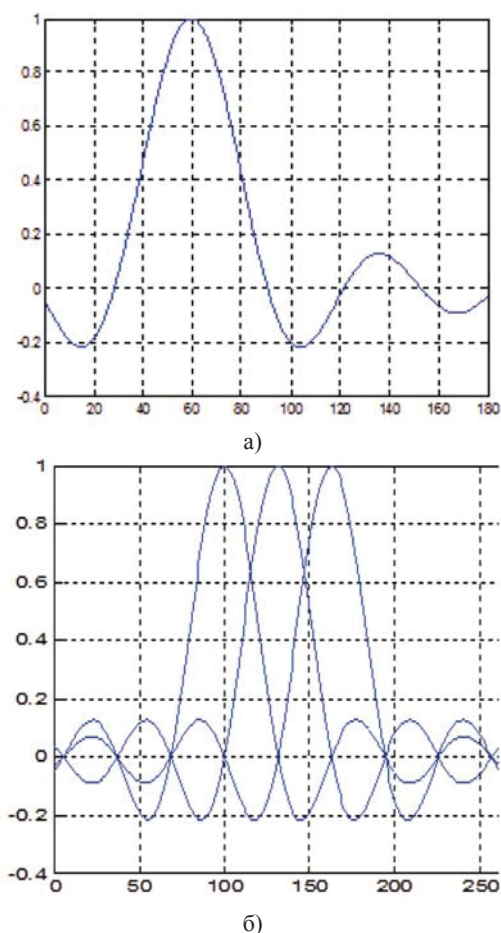


Рис. 3. Временные диаграммы одного (а) и трех (б) импульсов с равномерным спектром

Комбинация из трех таких импульсов показана на рисунке, который иллюстрирует известное положение: если импульсы следуют со скоростью соответствующей интервалу ортогональности функций (11) $T_0 = \pi/\Omega = 1/2F$, то КС (8) можно считать каналом без памяти. В тактовые моменты времени сигнал принимает значения соответствующее значениям V_k переданных посылок и межсимвольные помехи отсутствует. Увеличение бодовой скорости передачи информации $V > 2F$ приводит к появлению МСИ и канал превращается в ДНДКП.

Для ДНДКП нет ограничений на скорость подачи информации на вход канала, так как он по определению имеет память. Для увеличения скорости поступления информации от передатчика в линию связи следует увеличивать количество импульсов в комбинации при ее неизменной общей длительности T_k . При этом уменьшается длительность импульсов и период их следования. В пределе импульсы превращаются в дельта-импульсы, а вся комбинация превращается в псевдослучайную последовательность дельта-импульсов, соответствующую передаваемой информации (см. рис. 4).

Это позволяет наиболее точно сформировать на выходе КС импульсы вида (11), так как импульс вида (11) является импульсной реакцией ИФНЧ. Комбинация, состоящая из набора импульсов (11), без искажений проходит через канал с АЧХ вида (8), так что на выходе КС получаем комбинации аналогичные рисунку 3б.

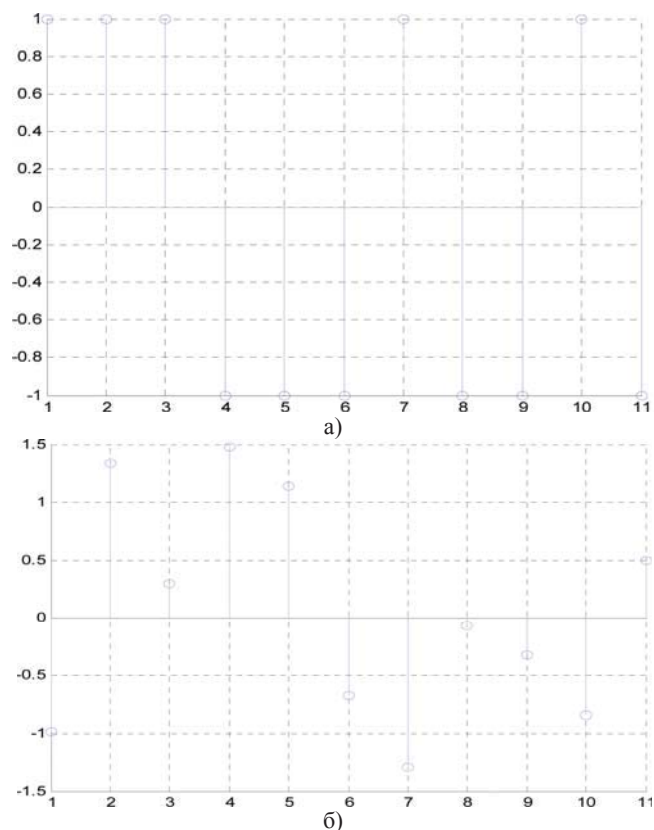


Рис. 4. Временные диаграммы информационных комбинаций в виде последовательностей дельта-импульсов для двоичного (а) и m-ичного (б) каналов

Итак, оптимизация алгоритма передачи состоит в том, что, включив на передаче (рис. 1) фильтр с АЧХ, совпадающей с АЧХ канала связи (8), и, генерируя информационную последовательность в виде последовательности дельта-импульсов, мы получаем комбинации с заданной энергией E и энергией разности комбинаций E_p . При прохождении через канал с такой же АЧХ (8) форма комбинаций не искажается. Параметры комбинаций на входе декодера соответствуют параметрам, заложенным в комбинации при их формировании на передаче. Информационный сигнал становится отрезком аддитивного белого шума, количество информации в котором стремится к бесконечности. Однако, это всего лишь информация, поступающая на вход ДНДКП.

Вывод

Скорость поступления информации на вход ДНДКП максимальна и параметры комбинаций на входе декодера соответствуют параметрам, заложенным в комбинации при их формировании на передаче, если АЧХ канала эквивалентна АЧХ ИФНЧ, а информационные комбинации есть последовательности дельта-импульсов.

4. Оптимальный прием

Очевидно, что количество информации, прошедшее через КС, меньше количества информации, поступившего на вход, из-за влияния помех. На вход приемника поступает процесс $z(t) = u_i(t) + x(t)$ т.е. сумма сигнальной комбинации и АБГШ. Пропускная способность ДНДКП определяется выражением (5), приведенным выше:

$$C = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty \\ T_k = ANT \rightarrow \infty \\ F, T, T_n \\ AIII \\ K(j\omega) \\ W(u)}} \sup \frac{1}{T_k + T_3 + 2T_n} [H(U^M) - H(Z/U)] =$$

$$= \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty \\ T_k = ANT \rightarrow \infty \\ F, T, T_n \\ AIII \\ K(j\omega) \\ W(u)}} \frac{1}{T_k + T_3 + 2T_n} [H_{\max}(U^M) - H_{\min}(Z/U)]$$

Из вышеизложенного следует, что первое слагаемое в (5) может быть сколь угодно большим и скорость поступления информации на вход ДНДКП может быть сколь угодно большой. Анализ второго слагаемого, т.е. потерь информации в канале, показывает, что потери стремятся к 0, если вероятность ошибки стремится к 0.

Таким образом, для достижения верхней грани в (5), при условии выполнения предыдущих этапов оптимизации, необходимым и достаточным условием является условие достижения сколь угодно малой вероятности ошибки при N, M_p и T_k , стремящихся к бесконечности.

Минимальная вероятность ошибки и, как следствие, максимум пропускной способности КС, достигается, если решение о принятом сигнале осуществляется в соответствии с правилом максимума условной вероятности [2]. Таким образом, правило оптимального приема для ДНДКП имеет стандартный вид: $\max_{1 \leq j \leq M_p} W(u_j / z)$.

В соответствии с вышеизложенным M_p разрешенных комбинации имеют одинаковую заданную энергию E и одинаковую энергию E_p разности комбинаций при заданной энергии бита E_1 на выходе канала. Оптимальный прием реализуем с помощью M_p корреляторов в соответствии с [2]. Пусть передается $v_1(t)$ и принимается $u_1(t)$. На вход каждого из M_p корреляторов поступает случайный процесс $[x_k(t) + u_1(t)]$ в виде суммы некоторой реализации белого шума $x_k(t)$ и сигнала $u_1(t)$. Тогда на выходе первого интегратора напряжение равно, если энергия каждой комбинации равна E :

$$\Pi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)u_1(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_1^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)u_1(t)dt + E;$$

На выходе остальных интеграторов напряжение равно :

$$\Pi_j = \int_{-\infty}^{\infty} x_j(t)u_j(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} u_j(t)u_1(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_j(t)u_j(t)dt + RE;$$

Вычтем напряжение RE из всех Π_j . Тогда получим на выходах корреляторов:

$$\Pi_1 = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)u_1(t)dt + E - RE = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)u_1(t)dt + (1-R)E;$$

$$\Pi_j = \int_{-\infty}^{\infty} x_j(t)u_j(t)dt;$$

Π_1 имеет гауссово распределение, среднее значение равно энергии разности разрешенных комбинаций: $0.5E_p = (1-R)E$ и дисперсию G_0E .

Остальные Π_j имеют средние значения равные 0 и дисперсию G_0E .

Вероятность правильного приема можно определить как вероятность того, что каждая из $(M_p - 1)$ независимых случайных величин Π_j меньше Π_1 по формуле из [2]:

$$P_{np} = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 E}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 E}} \int_{-\infty}^y \exp\left(-\frac{x^2}{2G_0 E}\right) dx \right]^{(M_p-1)} \times \exp\left[-\frac{(y-0.5E_p)^2}{2G_0 E}\right] dy;$$

Интеграл в квадратных скобках запишем как интеграл вероятности $F(*)$ и заменим переменную:

$$\frac{x}{\sqrt{G_0 E}} = z; \quad dx = \sqrt{G_0 E} \cdot dz;$$

$$P_{np} = \frac{1}{\sqrt{2\pi G_0 E}} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(\frac{y}{\sqrt{G_0 E}}\right)^{(M_p-1)} \exp\left[-\frac{(y-0.5E_p)^2}{2G_0 E}\right] dy;$$

Так как переменная z оказалась внутренней переменной функции $F(*)$, снова заменим переменную:

$$\frac{y-0.5E_p}{\sqrt{G_0 E}} = z; \quad y = z\sqrt{G_0 E} + 0.5E_p; \quad dy = dz\sqrt{G_0 E}; \quad (12)$$

$$P_{np} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F\left(z + \frac{0.5E_p}{\sqrt{G_0 E}}\right)^{(M_p-1)} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz;$$

В [2] показано, что для достижения сколь угодно малой вероятности ошибки необходимо увеличивать длительность комбинаций пропорционально $\log M_p$. Если энергия одиночного импульса E_1 , то энергия комбинаций должна расти, как $E = E_1 * \log M_p$. При этих условиях вероятность ошибки $p \rightarrow 0$ при $M_p \rightarrow \infty$, если отношение энергии одиночного импульса E_1 к G_0 больше порога Шеннона L_{sh} [2]: $E_1/G_0 > L_{sh}$.

В [2] дана оценка порога Шеннона: $L_{sh} \cong \ln 2 = 0.6932$.

Покажем, что L_{sh} это не оценка, а точное значение предела, превышение которого позволяет получить $p \rightarrow 0$ при $N, M_p, T_k \rightarrow \infty$.

Так как E_p и E увеличиваются пропорционально $\log M_p$, то (12) запишем в виде:

$$P_{np} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[F\left(z + h\sqrt{\log M_p}\right) \right]^{(M_p-1)} \exp\left[-\frac{z^2}{2}\right] dz; \quad (13)$$

где

$$z + \frac{0.5E_p}{\sqrt{G_0 E}} = z + \sqrt{\frac{(1-R)^2 E^2}{G_0 E}} = z + (1-R) \sqrt{\frac{E_1 \cdot \log M}{G_0}} = z + h\sqrt{\log M};$$

$$h^2 = (1-R)^2 \frac{E_1}{G_0};$$

Под интегралом в (13) два множителя $C1$ и $C2$. Множитель $C1$:

$$C1 = \left[F\left(z + h\sqrt{\log M_p}\right) \right]^{(M_p-1)};$$

в зависимости от M_p и h стремится к 1 или к 0 при $z \rightarrow \infty$.

Сомножитель $C2 = \exp(-z^2/2)$ не зависит от M и h , он не сдвигается по оси z при изменении M, h .

Зависимости подинтегральных сомножителей $C1$ (для двух значений h) и $C2$ от z в соответствии с (13) показаны на рисунке 5.

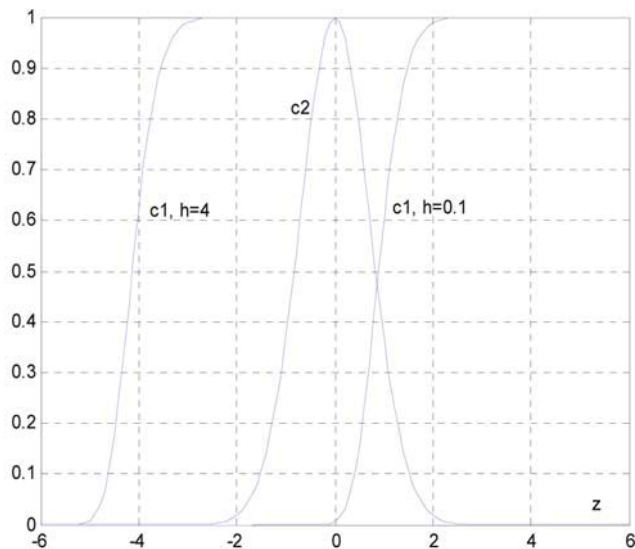


Рис. 5. Зависимость сомножителей в (13) от переменной z

При больших значениях h сомножитель $C1$ стремится к 1 в диапазоне существенных значений второго сомножителя и $p_{np} \rightarrow 1$. При малых значениях h сомножитель $C1$ в диапазоне существенных значений второго сомножителя стремится к 0 и $p_{np} \rightarrow 0$. Найдем предел, разделяющий эти два режима.

Производная по z первого сомножителя $C1$ больше 0, т.е. это монотонно возрастающая функция от z :

$$\frac{d}{dz} \left[F(z + h\sqrt{\log M_p}) \right]^{(M_p-1)} = (M_p - 1) \left[F(z + h\sqrt{\log M_p}) \right]^{(M_p-2)} \times \exp \left[-\frac{(z + h\sqrt{\log M_p})^2}{2} \right] > 0;$$

Найдем предел $C1$ при $M_p \rightarrow \infty$. Раскроем неопределенность типа 1^∞ , взяв $\ln C1$:

$$\ln \left[F(z + h\sqrt{\log M_p}) \right]^{(M_p-1)} = (M_p - 1) \ln F(z + h\sqrt{\log M_p}) = \frac{\ln F(z + h\sqrt{\log M_p})}{(M_p - 1)^{-1}};$$

Дифференцируем числитель и знаменатель:

$$\frac{\exp \left[-\left(0.5(z + h\sqrt{\log M_p})^2\right) \right] 0.5h \cdot (-M_p - 1)^2}{F(z + h\sqrt{\log M_p}) M_p \cdot \ln 2 \cdot \sqrt{\log M_p}}$$

При $z=0$ и $M_p \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \frac{0.5h \cdot \exp \left[-0.5(h^2 \log M_p) \right] M_p}{\ln 2 \sqrt{\log M_p}} = \\ & = \frac{0.5h \cdot \exp \left[-0.5(h^2 \ln M_p / \ln 2) \right] M_p}{\ln 2 \sqrt{\log M_p}} = \\ & = \frac{0.5h \cdot \exp \left[-\left(\ln M_p \frac{h^2}{2 \ln 2} \right) \right] M_p}{\ln 2 \sqrt{\log M_p}} = \frac{0.5h \cdot M_p^{1 - \frac{h^2}{2 \ln 2}}}{\ln 2 \sqrt{\log M_p}}; \end{aligned} \quad (14)$$

Если в (14) $h^2 \geq 2 \ln 2$, то степень M_p в числителе меньше или равна 0. То есть обе составляющие, зависящие от M_p , в знаменателе. При $M_p \rightarrow \infty$ сомножитель $\ln C1 \rightarrow 0$; $C1 \rightarrow 1$ и $p_{np} \rightarrow 1$.

В отличие от [2] это точное значение предела Шеннона для приема по максимуму апостериорной вероятности. Вид $C1$ для этого случая показан на рис.5 ($h=4$).

Так как множитель $C1$ монотонно возрастающая функция от z , то и для всех $z > 0$ должно удовлетворяться условие: $C1 \rightarrow 1$ и $p_{np} \rightarrow 1$. Для любого $z < 0$ сомножитель $C1$ должен быть также сколь угодно близок к 1. Если при некотором $z < 0$ функция $C1$ не стремится к 1, то малое приращение z приведет к большим приращениям функции, т.е. к скачкообразному изменению $C1$. Это противоречит условию равномерного возрастания $C1$.

При $z=0$ и $h^2 < 2 \ln 2$, сомножитель $\ln C1 \rightarrow -\infty$; $C1 \rightarrow 0$ и $p_{np} \rightarrow 0$. Вид $C1$ для этого случая показан на рис.5 ($h=0.1$).

Если для $z=0$ величина $C1 \rightarrow 0$, то для $z < 0$ сомножитель $C1$ как возрастающая неотрицательная функция должен также стремиться к 0 и $p_{np} \rightarrow 0$. Для $z > 0$ сомножитель $C1$ как возрастающая неотрицательная функция должен также стремиться к 0 из условия равномерного возрастания.

Таким образом, из (14) следует, что для ДНДКП при увеличении основания кода M_p и одновременным увеличением энергии комбинации $E = E_1 \cdot \log M_p$ пропорционально $\log M_p$, вероятность ошибки $p \rightarrow 0$ при $M_p \rightarrow \infty$. При этом параметр h^2 должен превышать предел Шеннона L_{Sh} :

$$h^2 = (1 - R)^2 \frac{E_1}{G_0} \geq 2L_{Sh}; \quad (15)$$

Если задана односторонняя спектральная плотность энергии белого шума $N_0 = 2G_0$, то получим:

$$h^2 = (1 - R)^2 \frac{2E_1}{N_0} \geq 2L_{Sh}; \quad h^2 = (1 - R)^2 \frac{E_1}{N_0} \geq L_{Sh};$$

Неравенства эквивалентны, так как в выражения следует подставлять разные числа, соответствующие N_0 или G_0 при заданном уровне АБГШ.

Вывод

Минимальная вероятность ошибки достигается при приеме по методу максимума правдоподобия; при этом вероятность ошибки $p \rightarrow 0$ при $N, M_p, T_k \rightarrow \infty$, если отношение энергии одиночного импульса к энергии шума превышает порог Шеннона, точное значение которого равно $L_{Sh} = \ln 2$.

5. Пропускная способность ДНДКП

Заключительный этап оптимизации состоит в исследовании скорости передачи и помехоустойчивости при увеличении N, M_p, T_k . Определим оптимальный алгоритм достижения максимальной скорости передачи I' при сколь угодно малой вероятности ошибки.

Оптимальная реализация произвольной комбинации $v(t)$ на входе КС в соответствии с рис.4б может быть записана как псевдослучайная последовательность дельта-импульсов с периодом следования T_1 :

$$v_k(t) = a_{k1}\delta(t - T_1) + a_{k2}\delta(t - 2T_1) + \dots + a_{kN}\delta(t - NT_1); \quad (16)$$

Энергия разности таких комбинаций на выходе ДНДКП имеет вид:

$$u_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} [u_m(t) - u_k(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} [v_m(\tau) - v_k(\tau)]g(t - \tau)d\tau \right]^2 dt; \quad (17)$$

Разность $[v_m(t) - v_k(t)]$ представляет собой такую же псевдослучайную последовательность дельта-импульсов как и (19). Спектр такой последовательности равномерен в полосе КС. Из общего числа 2^N комбинаций следует выбрать разрешенные комбинации с требуемым минимальным кодовым расстоянием. Для двоичных кодов возможным решением могут быть коды Хэммига ($N, N/2$).

Энергия разности E_p двух некоррелированных псевдослучайных последовательностей дельта-импульсов равна $E_p = 2E$. Если спектральная плотность энергии одного дельта-импульса G_1 , то средняя спектральная плотность энергии псевдослучайной последовательности из N дельта-импульсов на интервале NT_1 также равна G_1 . Спектральная плотность энергии разности двух некоррелированных псевдослучайных последовательностей в (20) равна $2G_1$. Со спектральной точки зрения преобразование (20) эквивалентно прохождению процесса с равномерным спектром через КС с АЧХ (8). То есть средняя мощность бита равна $G_1 F$, а энергия нормированного бита E_1 для оптимальной формы сигнала на выходе канала без памяти пропорциональна T_δ и равна $E_1 = T_\delta G_1 F$. Средняя мощность комбинации равна FG_1 , а средняя энергия E комбинации равна $E = T_k FG_1$. Энергия разности комбинаций $E_p = 2T_k FG_1$.

Вероятность ошибки для M_p -ичной системы сигналов, если энергия бита растет пропорционально $\log M_p$, оценим по формуле [2]:

$$p < (M_p - 1) \cdot \left[1 - F\left(h\sqrt{\log M_p}\right) \right]; \quad (18)$$

Скорость передачи информации для канала без памяти определяется интервалом ортогональности $T_\delta = \pi/\Omega = 1/2F$ функций (11). Таким образом, для канала без памяти длина комбинаций растет как $T_k = NT_\delta = N/2F$. С учетом переходных процессов и защитного интервала между комбинациями интервал времени на передачу информационной комбинации увеличивается до величины: $(T_k + 2T_n + T_3)$.

При основании кода M_p скорость передачи информации равна:

$$I' = \frac{\log M_p}{T_k + 2T_n + T_3};$$

Так как величина $(2T_n + T_3)$ фиксированы при $F = const$, то при $N \rightarrow \infty$ получим:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I' = \frac{\log M_p}{T_k} = \frac{2F \log M_p}{N}; \quad (19)$$

Для ДНДКП оптимизация состоит в достижении максимума I' при $p \rightarrow 0$. С этой целью для увеличения I' будем увеличивать длительность и энергию комбинации E медленнее, т.е. пусть E растет в соответствии с выражением: $E = E_1 * A \cdot \log M_p$ при $A \leq 1$.

Таким образом, для ДНДКП увеличение длительности комбинации в $A \cdot \log M_p$ раз при увеличении N , означает, что N символов комбинации передаются не за время NT_δ , а за более короткое время $AT_\delta \cdot \log M_p$. В этом случае скорость передачи информации равна:

$$I' = \frac{\log M_p}{T} = \frac{\log M_p}{T_\delta A \cdot \log M_p} = \frac{2F}{A};$$

Вероятность ошибки уменьшается по формуле :

$$p < (M_p - 1) \cdot Q\left(\sqrt{A \frac{E_1}{G_0} \log M_p}\right)$$

Вероятность ошибки стремится к 0, если:

$$A \frac{E_1}{G_0} > 2L_{Sh} = 2 \ln 2 = 1,3864;$$

$$A > \frac{2L_{Sh} G_0}{E_1}; A > \frac{2L_{Sh}}{h^2}; A > \frac{2G_0}{E_1 \log e};$$

Пропускная способность ДНДКП, т.е. максимальная скорость передачи информации при сколь угодно малой вероятности ошибки, стремится к пределу:

$$C_{ДНДКП} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty \\ T_k = ANT \rightarrow \infty \\ F, T_n, T_n \\ АПП \\ К(j\omega) \\ W(u)}} \frac{1}{T_k + T_3 + 2T_n} [H_{\max}(U^M) - H_{\min}(Z/U)] =$$

$$= \max_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty \\ T_k = ANT \rightarrow \infty \\ F, T_n, T_n \\ АПП \\ К(j\omega) \\ W(u)}} \lim I';$$

$$C_{ДНДКП} = \max_{\substack{N \rightarrow \infty \\ M \rightarrow \infty \\ T_k = ANT \rightarrow \infty \\ F, T_n, T_n \\ АПП \\ К(j\omega) \\ W(u)}} \lim I' = \frac{2F}{A}; \quad \text{если: } A > \frac{2L_{Sh} G_0}{E_1};$$

при этом: $p < (M_p - 1) \cdot Q\left(\sqrt{2L_{Sh} \log M_p}\right)$

$$C_{ДНДКП} = \max I' = \frac{1}{AT_\delta} = \frac{2F}{A} \leq \frac{2FE_1}{2L_{Sh} G_0};$$

$$C_{ДНДКП} \leq \frac{Fh^2}{L_{Sh}}; \quad C_{ДНДКП} \leq Fh^2 \log e;$$

Так как $L_{Sh} = \ln 2 = 1/\log e$, то:

$$C_{ДНДКП} \leq \frac{FE_1 \log e}{G_0}; \quad (20)$$

Вычислим это отношение, если амплитуда бита U_m :

$$\frac{E_1}{G_0} = \frac{U_m^2}{G_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin \Omega t}{\Omega t} \right)^2 dt = \frac{U_m^2 \pi}{G_0 \Omega} = \frac{U_m^2}{2G_0 F} = \frac{U_m^2}{N_0 F} = h_0^2;$$

Пропускная способность ДНДКП определяется выражением:

$$C_{\text{ДНДКП}} \leq \frac{FE_1 \log e}{G_0}; \quad C_{\text{ДНДКП}} \leq Fh_0^2 \log e; \quad (21)$$

При этом вероятность ошибки при $N, M_p, T_k \rightarrow \infty$ стремится к 0 в соответствии с выражением:

$$p = (M_p - 1) \cdot Q \left(\sqrt{A \frac{E_1}{G_0} \log M_p} \right); \quad p < (M_p - 1) \cdot Q \left(\sqrt{2L_{Sh} \log M_p} \right)$$

Пропускная способность канала без памяти равна [1,2]:

$$C = F \log \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\sigma^2} \right);$$

где σ_c^2 и σ^2 – мощность сигнала и шума, соответственно.

Это отношение можно записать:

$$C = F \log \left(1 + \frac{\sigma_c^2}{\sigma^2} \right) = F \log \left(1 + \frac{U_m^2}{N_0 F} \right) = F \log (1 + h_0^2); \quad (22)$$

На рисунке 6 показаны зависимости $C_{\text{ДНДКП}}$ и C от h_0^2 .

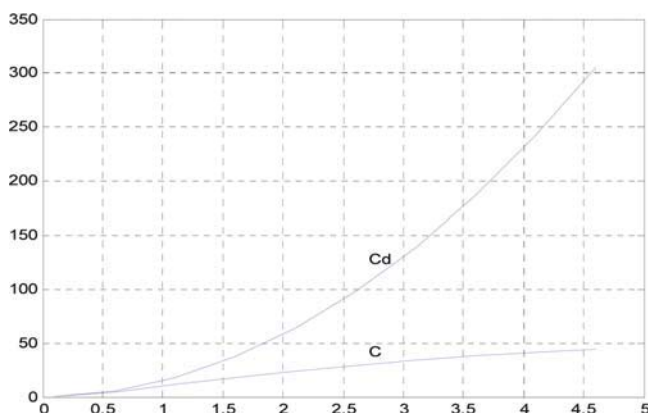


Рис. 6. Пропускная способность канала без памяти (C) и с памятью (Cд)

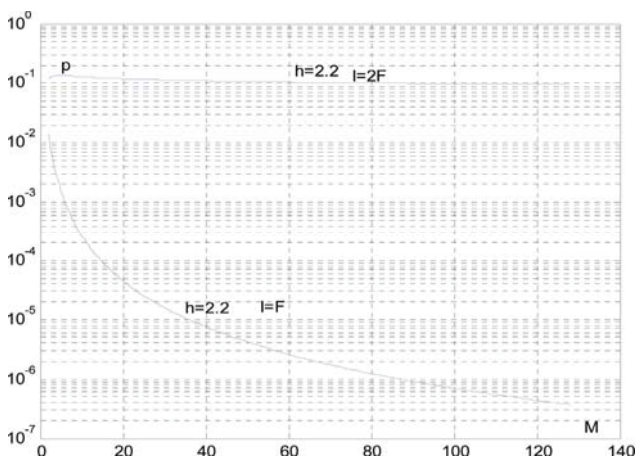


Рис. 7. Вероятность ошибки в канале с памятью при разных скоростях работы

Из сравнения (15), (16) и рисунка 6 видно, что пропускная способность ДНДКП значительно больше, чем пропускная способность канала без памяти. Однако, когда скорость передачи в канале с памятью приближается к пропускной способности ДНДКП, существенно возрастает длина кодовой комбинации и основание кода M , которые необходимы для получения достаточно малой вероятности ошибки. Это видно из рисунка 7 для скорости работы $\Gamma=F$ (кривая $h=2,2 \Gamma=F$) и для скорости работы $\Gamma=2F$ (кривая $h=2,2 \Gamma=2F$).

Вывод

Пропускная способность ДНДКП с заданной полосой пропускания F , на выходе которого действует сигнал со средней энергией бита E_1 и аддитивный белый гауссов шум со спектральной плотностью энергии G_0 , при использовании метода увеличения длительности комбинации пропорционально $A \cdot \log M_p$ при стремлении основания кода M_p к бесконечности равна:

$$C_{\text{ДНДКП}} = \frac{FE_1 \log e}{G_0};$$

Вероятность ошибки при $M_p \rightarrow \infty$ стремится к 0 в соответствии с выражением:

$$p < (M_p - 1) \cdot Q \left(\sqrt{2L_{Sh} \log M_p} \right)$$

5. Пропускная способность канала с финитной полосой пропускания при поэлементном приеме сигналов. Оптимальный индикатор.

Если сигнал и шум прошли через КС с финитной полосой пропускания, то возможно использовать различные сложные способы идентификации сигнала и, в частности, поэлементный прием кодовой комбинации, пораженной МСИ. В этом случае можно в качестве модели сигнала и шума использовать бесконечно дифференцируемые процессы. Эти решения обычно квалифицируют, как сингулярные, нереализуемые. Оценим предельные возможности оптимального приема бесконечно дифференцируемых процессов.

Пропускную способность ДНДКП при поэлементном приеме можно записать в виде:

$$C_{\text{ДНДКП}} = \limsup_{\substack{L \rightarrow \infty \\ F, T_s, T_p \\ \text{АПЧ} \\ K(j\omega) \\ W(\omega)}} \frac{1}{T} [h(U) - h(X)];$$

где: $h(U)$ –энтропия источника, формирующего информационные импульсы дискретные по времени и непрерывные по уровням; $h(X)$ – потери информации из-за нормального аддитивного шума, определяемые вероятностью ошибки при приеме одиночного импульса.

Если найти способ уменьшить вероятность ошибки, то это позволит увеличить $C_{\text{ДНДКП}}$.

Верхняя грань ищется для всех распределений $W(u)$ мгновенных значений импульсов на выходе КС, для различных типов АЧХ $K(j\omega)$ канала, для возможных алгоритмов передачи и приема (АПП) сигнала, при фиксированной полосе частот F канала.

Будем рассматривать задачу приема каждого импульса, как идентификацию некоторой функции $s(t)$, временная диа-

грамма которой на входе декодера известно точно.

В соответствии со стандартным определением:

– если $U \subseteq A$ – выбранное подмножество произвольного множества A , то функция, определенная следующим образом:

$$I_U(a) = \begin{cases} 1, & a \in U; \\ 0, & a \notin U; \end{cases}$$

называется индикатором множества U , индикаторным функционалом множества U .

Введем линейный индикаторный функционал множества U в общем виде [4,10]:

$$I_U(x) = \int_{\mu} \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \varphi_k(u) d\mu; \quad (23)$$

где для произвольного $x \in L2$ и $u \in L2$ обозначены через $\varphi_1(*) \dots \varphi_n(*)$ некоторые линейные функции: $\varphi_k(*) \in L2$.

Функция $u(t) \in U$ – заданная индикаторная функция (сигнал), принадлежащая некоторому множеству сигналов U .

Идентификатор позволяет определить принадлежность функции к определенному подмножеству. Для идентификации функции можно использовать произвольный набор преобразований. Но надо выбрать такое множество преобразований, которые реализуют условие :

$$I_U(x) = \begin{cases} B \neq 0; & x \in U; \\ 0; & x \notin U; \end{cases}$$

Рассмотрим решение, если оптимальные параметры ДНДКП определены выше. На вход декодера с выхода ДНДКП поступает сумма $z(t)$ информационного импульса $u(t)$ и некоторой реализации коррелированного нормального шума $x(t)$. Наложим на линейные функции $\varphi_k(u) \in L2$ ограничение. Пусть эти функции есть совокупность ортонормированных функций:

$$\int_{\mu} \varphi_n(u) \varphi_k(u) d\mu = \begin{cases} 1 & \text{при } n = k; \\ 0 & \text{при } n \neq k; \end{cases}$$

В этом случае выражение (23) оптимального индикатора для сигнала $u(t) \in U$ принимает вид:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_U(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mu} \sum_{k=0}^n \varphi_k[u(t)] \varphi_k[u(t)] d\mu \rightarrow \infty;$$

В работах [9,10] показано, что для произвольного $x(t)$ сумма ряда (23) – конечная величина. Это следует из того, что слагаемые ряда (23) это C_{kk} – коэффициенты разложения соответствующих $\varphi_j(x)$ по совокупности ортонормированных функций $\varphi_k(u)$.

Так как все $x \in L2$ и $\varphi_k(x) \in L2$, то ряды для $\varphi_k(x)$ – сходящиеся и их суммы – конечны. Если C_{kk} уменьшаются с ростом k , то ряд (23) сходится, так как

$$\frac{C_{kk}}{C_{k-1,k-1}} < 1;$$

Если C_{kk} увеличиваются ростом k , то это значит, что для любого n слагаемые $C_{n0} \dots C_{nn}$ разложения в ряд функции $\varphi_n(u)$ больше, чем слагаемые $C_{m0} \dots C_{mm}$ рядов для $\varphi_m(u)$, $m < n$.

Но ряд для $\varphi_n(u)$ сходится, а слагаемые ряда (23) меньше, чем слагаемые ряда для $\varphi_n(u)$. Следовательно, для любого n ряд (23) сходится и его сумма конечное число.

Проанализируем потенциальные возможности оптимального индикатора при наличии комплексной помехи. Процесс $z(t)$ на входе декодера есть сумма вида:

$$z(t) = a_u \cdot u(t-t_u) + \sum_k u_{MCI}(t-t_u + kT) + \sum_m u_{mx}(t-t_{mx}) + \sum_j x_j(t-t_{jx}); \quad (24)$$

$a_u u(t-t_u)$ – импульс информационного сигнала, время t_u прихода которого точно известно.

Коэффициент a_u соответствует амплитуде переданного символа и принимает множество значений, допустимых для ДНДКП.

Второе слагаемое – импульсы от МСИ, которые по форме совпадают с сигналом, но время их прихода ($t_u + kT$) отлично от t_u на величину kT . (T -период следования информационных импульсов). Третье слагаемое – импульсы шума, форма которых случайно совпала с формой сигнала, но время прихода t_{mx} есть случайная величина, равномерно распределенная на бесконечном временном интервале. Четвертое слагаемое – помехи произвольной формы со случайным временем прихода.

Выражение для оптимального индикатора распадается на 4 слагаемых. Для импульсов сигнала:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_U[a_u u(t-t_u)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mu} \sum_{k=0}^n \varphi_k[a_u \cdot u(t-t_u)] \varphi_k[u(t-t_u)] d\mu = a_u \cdot \delta(0) \rightarrow \infty;$$

Для помехи типа МСИ мешающие импульсы имеют ту же форму, что и сигнальный импульс, но время прихода импульса помехи t_{MCI} не совпадает с временем прихода импульса сигнала t_u . Выражение (23) для МСИ принимает вид :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_U(u_{MCI}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mu} \sum_{k=0}^n \varphi_k[u(t-t_{MCI})] \varphi_k[u(t-t_u)] d\mu = \delta(t_{MCI} - t_u) = 0; (t_{MCI} - t_u) \neq 0;$$

Импульсы белого шума на выходе канала могут принимать произвольную случайную форму и, в частности, могут совпадать по форме с импульсами сигнала $u(t-t_x)$, но со временем прихода t_x . В этом случае из (23) имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_U(u_x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mu} \sum_{k=0}^n \varphi_k[u(t-t_x)] \varphi_k[u(t-t_u)] d\mu = \delta(t_x - t_u) = 0; (t_x - t_u) \neq 0;$$

Время прихода импульсов шума есть случайная величина, равномерно распределенная на бесконечном временном интервале. Поэтому вероятность того, что $t_x = t_u$ равна 0.

Для помехи произвольной формы со случайным временем прихода:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_U[\sum_j x_j(t-t_{jx})] = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mu} \sum_{n=0}^n \varphi_k[\sum_j x_j(t-t_{jx})] \varphi_k[u(t-t_u)] d\mu < \infty;$$

Таким образом, оптимальный индикатор позволяет в пределе разделить информационные импульсы при сколь

угодно малом интервале T следования информационных импульсов, т.е. помеха от соседних информационных импульсов (МСИ) стремится к 0. Это значит, что скорость передачи информации по каналу с фиксированной полосой частот может быть больше сколь угодно большой величины V .

Из (24) следует, что аддитивная помеха с определенной вероятностью принимающая форму $x(t)=u(t)$, принадлежащую множеству сигналов U^N дает на выходе декодера сколь угодно малое напряжение, т.к. вероятность совпадения времени прихода импульса помехи t_{mx} и импульса сигнала t_s равна 0. Произвольная помеха $x(t) \notin U^N$, не принадлежащая множеству сигналов, дает на выходе декодера конечное напряжение, бесконечно малое по сравнению с сигналом.

Следовательно, оптимальный индикатор обеспечивает в пределе сколь угодно малую вероятность ошибки. Однако, реализовать такой демодулятор невозможно. Помеха типа белый шум действует на входе приемника и, следовательно, проходит фильтр приемника. Но белый шум действует и на входе декодера. Он имеет очень малую энергию, но ширина его спектра значительно больше ширины спектра сигнала. Это приводит к резкому увеличению уровня помехи на выходе демодулятора и нарушает его работу.

Вывод

Оптимальный поэлементный прием сигналов с помощью оптимального индикатора позволяет в идеале реализовать сколь угодно большую скорость передачи при сколь угодно малой вероятности ошибки. Реализовать такой демодулятор невозможно, так как белый шум действует и на входе фильтров приемника.

Заключение

Для достижения пропускной способности дискретно-непрерывного канала с памятью оптимальные параметры канала и сигнала следующие:

- АЧХ канала эквивалентна АЧХ идеального ФНЧ;
- спектр сигнала постоянен в полосе частот канала;
- огибающая информационных импульсов имеет вид функций отсчетов;
- мгновенные значения кодовых комбинаций распределены по нормальному закону;
- оптимальный прием по максимуму условной вероятности;
- длительность комбинаций растет пропорционально основанию кода, как $A \cdot \log M_p$, $A \leq 1$.

При выполнении этих условий пропускная способность ДНДКП с заданной полосой пропускания F , на выходе которого действует сигнал со средней энергией бита E_b и адди-

тивный белый гауссов шум со спектральной плотностью энергии G_0 равна:

$$C_{\text{линии}} = \frac{FE_b \log e}{G_0};$$

Вероятность ошибки при $M_p \rightarrow \infty$ стремится к 0 в соответствии с выражением:

$$p < (M_p - 1) \cdot Q\left(\sqrt{2L_{sh} \log M_p}\right)$$

Оптимальный индикатор при поэлементном приеме импульсов сигнала позволяет, в идеале, реализовать сколь угодно большую скорость передачи при сколь угодно малой вероятности ошибки. Информационные импульсы и их производные должны представлять собой совокупность ортонормированных функций. Однако, реализовать такой демодулятор невозможно, так как белый шум действует не только на входе приемника, но и во всех элементах демодулятора.

Литература

1. Галлагер Р. Теория информации и надёжная связь. М.: Сов. радио, 1974. 720 с.
2. Прокис Дж. Цифровая связь / Пер. с англ. под ред. Кловского Д.Д. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.
3. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
4. Вулих Б.З. Краткий курс теории функций вещественной переменной. Введение в теорию интеграла. М.: Наука, 1973. 352 с.
5. Сухоруков А.С. Использование относительных способов для увеличения скорости передачи информации // Радиотехника. 1984. №3. С. 45-48.
6. Сухоруков А.С. Разделение лучей в многолучевом канале при использовании узкополосных сигналов с дифференцированием на приеме // Радиотехника. 1986. №2. С. 55-57.
7. Сухоруков А.С. Теоретические и практические аспекты реализации пропускной способности детерминированного канала с памятью // Труды МТУСИ. 2004. С. 34-44.
8. Сухоруков А.С. Введение в теорию многомерной связи. М.: Медиа Паблшер, 2011. 274 с.
9. Сухоруков А.С. Оптимальный индикатор двоичных сигналов, пораженных помехами от многолучевости и межсимвольной интерференции // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2016. Том 10. №2. С. 40-47.
10. Сухоруков А.С. Оптимальный индикатор двоичных сигналов для систем дистанционного обучения и медицинского обслуживания // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2016. Том 10. №11. С. 8-15.
11. Сухоруков А.С. Превышение пропускной способности канала без памяти в дискретнонепрерывном детерминированном канале с памятью и заданными ограничениями // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Том 14. № 5. С. 15-26.

OPTIMIZATION OF SIGNAL PARAMETERS AND DISCRETE-CONTINUOUS CHANNEL WITH MEMORY TO ACHIEVE ITS BANDWIDTH

Alexander S. Sukhorukov, Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI), Moscow, Russia, suhas@yandex.ru

Abstract

The article is devoted to the definition of the bandwidth of the channel with memory. A discrete-continuous deterministic channel with fixed-band memory DCDCP was chosen as a model. The encoder forms code combinations of discrete in time and continuous in level symbols. At the output of the channel with memory, these combinations turn into implementations of continuous processes. The channel is deterministic, i.e. the parameters of the channel, the set of transmitted and, uniquely corresponding to it, the set of received combinations, are known both on the transmission and on the reception. Only permitted combinations are used for transmission. The energy of each of them and the energy of the difference of combinations are constant for the whole set. The transmitted combinations are separated by a protective time interval. The duration of the code combination is much longer than the protective interval, which is much larger than the channel memory. The energy of combinations at the output of the channel is maximum if the frequency response of the channel is also constant in the specified frequency band. As a result, the requirements for the form of information impulses are determined, which should have the form of reference functions. These requirements determine the optimal structural scheme of the transmitter: the encoder forms discrete in time and continuous in level pulses, the transmitter filter limits their spectrum to the channel frequency band, the power amplifier provides the necessary energy of each of them and the energy of the difference of the allowed combinations. Pulses in the form of reference functions can be formed if the encoder supplies a sequence of delta pulses to the input of the forming filter. When passing through the channel with the same THF, the shape of the combinations is not distorted. Their parameters at the input of the decoder correspond to the parameters laid down in the combination when they are formed in the transmission. Since the allowed combinations have a given energy and the energy of the combination difference, the optimal reception is realized using a set of correlators. There are different estimates of the Shannon limit, exceeding which allows you to get an arbitrarily small probability of error. To do this, the energy of the combination must grow in proportion to the logarithm of the number of allowed combinations. The article calculated the exact value of this limit, coinciding with the smaller of the estimates. With a comprehensive optimization of the transmission rate and noise immunity of reception, the bandwidth of the memory channel is increased due to the fact that the excess ratio of bit energy to noise energy compared to the Shannon limit is converted into an information transfer rate. At the same time, the aspiration of the probability of error to zero with an arbitrarily large number of allowed combinations remains, although slower. On a discrete-continuous deterministic channel with memory with a given bandwidth, at the output of which a signal with a certain average bit power and additive white Gaussian noise with a given spectral energy density can be transmitted at a speed arbitrarily close to the ratio of the average power of the bit to the spectral energy density of the noise. The analysis of the singular case of transmission of information pulses of a given shape allows us to conclude that in the unrealizable case of receiving information impulses differentiated an infinite number of times, the probability of error can be made arbitrarily small at an arbitrarily high transmission speed.

Keywords: bandwidth, mutual information, the probability of error, discrete-continuous channel, intersymbol interference, the additive white Gaussian noise, ideal low-pass filter, channel with memory, Shannon Threshold, optimal indicator, orthogonality.

References

1. Gallager R.G. (1974). Information Theory and Reliable Communication. Moscow: Sov. Radio. 720 p.
2. Proakis J.G. (2000). Digital Communications. Moscow: Radio i svyaz'. 800 p. (in Russian)
3. Levin B.R. (1989). Theoretical bases of statistical radio engineering. Moscow: Radio i svyaz'. 656 p. (in Russian)
4. Wulich B. (1973). A short course of theory of functions of a real variable. Introduction to the theory of integral. Moscow: Nauka. 352 p. (in Russian)
5. Sukhorukov A.S. (1984). Using relative ways to increase the speed of information transmission. *Radiotekhnika*. No3. P. 45-48. (in Russian)
6. Sukhorukov A.S. (1986). Division of rays in the multipath channel using narrowband signals with differentiation at the reception. *Radiotekhnika*. No. 2. P. 55-57. (in Russian)
7. Sukhorukov A.S. (2004). Theoretical and practical aspects of implementing deterministic bandwidth channel with memory. *Trudy MTUCI*. P. 34-44. (in Russian)
8. Sukhorukov A.S. (2011). Introduction to the theory of multi-dimensional communication Moscow: Media Publisher. 274 p. (in Russian)
9. Sukhorukov A.S. (2016). The optimal indicator of binary signals distorted by multipath and intersymbol interference noise. *T-Comm*. Vol. 10. No.2. P. 40-47. (in Russian)
10. Sukhorukov A.S. (2016). Optimum indicator of binary signals for distance learning systems and medical service. *T-Comm*. Vol. 10. No.11. P. 9-16. (in Russian)
11. Sukhorukov A.S. (2020). Exceeding the bandwidth of the channel without memory in the discrete-continuous deterministic channel with the memory and set restrictions. *T-Comm*. Vol. 14, no.5. P. 15-26. (in Russian)

Information about author:

Alexander S. Sukhorukov, Cand.tech.Sci., Associate Professor of Faculty of the general communication theory of the Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia