

ЛИНЕЙНО-ОГРАНИЧЕННАЯ АДАПТИВНАЯ АНТЕННАЯ РЕШЕТКА В АРИФМЕТИКЕ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ДЛЯ РАДИОПРИЕМНИКОВ НАЗЕМНОЙ АППАРАТУРЫ ПОТРЕБИТЕЛЯ ГЛОБАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СПУТНИКОВЫХ СИСТЕМ

DOI: 10.36724/2072-8735-2026-20-3-4-14

Manuscript received 12 January 2026;
Accepted 14 March 2026

Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ "Курчатовский институт"

Джиган Виктор Иванович,
Национальный исследовательский центр
"Курчатовский институт",
Национальный исследовательский университет
"Московский институт электронной техники",
Москва, Россия, dzhigan_vi@nrcki.ru

Ключевые слова: Глобальные навигационные спутниковые системы, рекурсивный алгоритм по критерию наименьших квадратов, линейное ограничение, адаптивная антенная решетка, арифметика комплексных чисел, арифметика действительных чисел, карта отношения сигнал-шум

Антенные решетки сегодня широко используются в качестве антенн современных радиосистем. Возможность управления формой диаграммы направленности (ДН) таких антенн лежит в основе принципа работы адаптивных антенных решеток (ААР). Такие решетки обеспечивают подавление сигналов источников помех, полосы частот которых пересекаются с полосой частот полезного (информационного) сигнала. Одним из актуальных приложений ААР является их использование в наземной аппаратуре потребителя глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС). В такой аппаратуре в основном используются ААР, именуемые компенсаторами помех. Подобно любым ААР, они обеспечивают подавление помех, но не гарантируют прием наперед заданного числа спутниковых сигналов, необходимого для решения навигационной задачи. В работе предлагается использовать разновидность ААР на основе линейно-ограниченного адаптивного алгоритма. В этом алгоритме задается ограничение на значение ДН ААР в направлении зенита. Сигналы со спутников, которые находятся в окрестности этого направления, характеризуются максимальным отношением сигнал-шум при их приёме в силу кратчайшего расстояния от спутников до Земли. Задаваемое ограничением значение ДН не меняется на протяжении всей работы ААР. Оно не зависит от значений её весовых коэффициентов (ВК), вычисляемых в процессе адаптации. Для вычисления ВК в работе использован рекурсивный алгоритм по критерию наименьших квадратов на основе леммы об обращении матрицы, оптимизированный по числу арифметических операций. Вычислительная сложность этого алгоритма меньше по сравнению с его неоптимизированной версией. Уменьшение сложности достигается за счет учёта эрмитовой структуры корреляционной матрицы входных сигналов ААР. Дальнейшее уменьшение сложности алгоритма вычисления ВК достигается в случае, если ААР является симметричной. Практически все операции в такой ААР выполняются в арифметике действительных чисел. Число этих операций в два раза меньше эквивалентного числа действительных операций аналогичной ААР в арифметике комплексных чисел. Кроме того, в рассматриваемой ААР переходный процесс в два раза короче, а подавление помех в установившемся режиме в среднем на 3 дБ больше по сравнению с ААР в арифметике комплексных чисел. Рассмотренная ААР может найти применение не только в аппаратуре ГНСС, но и в аппаратуре других радиосистем.

Информация об авторе:

Джиган Виктор Иванович, доктор технических наук, профессор, главный научный сотрудник Отдела методологии проектирования интегральных схем Отделения проблем проектирования в микроэлектронике Центра перспективной микроэлектроники Национального исследовательского центра "Курчатовский институт", профессор Института микроприборов и систем управления им. Л.Н. Преснухина Национального исследовательского университета "Московский институт электронной техники", Москва, Россия. ORCID 0000-0001-7485-1623

Для цитирования:

Джиган В.И. Линейно-ограниченная адаптивная антенная решетка в арифметике действительных чисел для радиоприемников наземной аппаратуры потребителя глобальных навигационных спутниковых систем // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2026. Том 20. №3. С. 4-14.

For citation:

V.I. Djigan, "Linearly-Constrained Adaptive Antenna Array for Ground-Based Radio Receivers of Global Navigation Satellite System," T-Comm, 2026, vol. 20, no. 3, pp. 4-14. (in Russian)

Введение

Сегодня в качестве антенн оборудования радиосистем широко используются антенные решётки (АР) [1, 2]. С точки зрения архитектуры, АР представляет собой многоканальную антенную систему. Сигналы в каналах АР взвешиваются с помощью комплексных весовых коэффициентов (ВК) перед их суммированием с целью формирования выходного сигнала, что позволяет изменять форму диаграммы направленности (ДН) АР.

Простейшим изменением формы ДН является ориентация её главного лепестка (луча АР) в интересующем направлении. Такое изменение достигается с помощью комплексных ВК с единичными амплитудами и определенными фазами. Такими ВК в аналоговых АР служат фазовращатели.

Однако в АР можно изменять форму и всей ДН. Это свойство способствовало созданию адаптивных АР (ААР) [3, 4]. За счет формирования провалов в ДН осуществляется подавление сигналов источников помех в выходном сигнале ААР. Эти провалы образуются в результате установки в каналах ААР соответствующих комплексных ВК с разными амплитудами и фазами. В качестве таких ВК в аналоговых ААР используются каскадно включенные аттенюаторы и фазовращатели, а в цифровых ААР – просто комплексные числа.

ААР является пространственным фильтром, позволяющим разделять сигналы, находящиеся в одной полосе частот, но различающиеся по пространственному положению их источников. Для вычисления ВК используются различные адаптивные алгоритмы [5, 6], которые обрабатывают сигналы в каналах ААР, её выходной сигнал, а иногда и так называемый требуемый сигнал. Адаптивные алгоритмы не используют информацию о пространственном положении источников помех и энергетических характеристиках их сигналов. В основе работы адаптивных алгоритмов находится безусловная минимизация различных целевых функций. В ААР также может быть использована условная минимизация целевых функций при наложении определенных ограничений, например, на значения ДН в одном или в нескольких интересующих направлениях [7, 8].

ААР сегодня широко применяются для борьбы с помехами в радиосистемах различного назначения. Одним из таких применений является использование ААР в качестве антенн радиоприёмников наземной аппаратуры потребителя (НАП) глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) [9, 10]. Такая аппаратура часто эксплуатируется в условиях радиопомех, создаваемых природными явлениями; радиоприемниками, работающими на тех же частотах что и НАП; или же постановщиками преднамеренных помех. Поэтому для обеспечения работоспособности НАП (способности определять координаты ее радиоприёмника) требуется подавлять сигналы этих помех, что обеспечивается с помощью ААР.

В НАП в основном используется разновидность ААР, именуемая компенсатором помех, принцип работы которой аналогичен компенсатору боковых лепестков направленной антенны [11]. Компенсатор помех минимизирует мощность сигнала ошибки между одной из антенн ААР с фиксированным (единичным) ВК и суммой взвешенных сигналов остальных антенн ААР. Так как сигналы, принимаемые со спутников, находятся ниже уровня шумов приёмников ААР, то наличие

этих сигналов никак не сказывается на эффективности подавления помех.

Использовать в НАП ААР, в которых минимизируются различные целевые функции ошибок между требуемым и выходным сигналами, не представляется возможным, так как для решения навигационной задачи необходимо одновременно принимать сигналы от нескольких спутников, находящихся в разных направлениях относительно ААР, а потому один требуемый сигнал не может быть сформирован и использован. Кроме того, сигналы со спутников на входах, как уже было сказано, а значит, и на выходе ААР, находятся под шумами в силу удалённости их источников от Земли. Отношение сигнал-шум (ОСШ) на выходах радиоприёмников НАП для сигналов от спутников, находящихся в зените, примерно оценивается на уровне -20 дБ [9, 10], что также не позволяет использовать в ААР адаптивные алгоритмы с требуемым сигналом, так как даже в отсутствии помех сигналы со спутников на выходе ААР скрыты шумами.

В многолучевых ААР с предварительной корреляционной обработкой сигналов в каналах [12] требуемые сигналы могут быть использованы (по одному на каждый луч/спутник), однако такие ААР являются достаточно сложными, так как являются многолучевыми (от четырех и более лучей). В них общими являются только антенны, радиоприемники и преобразователи частоты, а цифровая часть размножается пропорционально числу лучей. Кроме того, для каждого луча такой ААР требуется свой набор из M корреляторов или согласованных фильтров, где M – это число антенн ААР.

ААР в виде компенсатора помех, как и любая другая разновидность ААР, обеспечивает подавление сигналов от источников всех помех, если их число не превышает значения $M - 1$ [9]. В установившемся режиме в ДН компенсатора образуются глубокие провалы в направлениях на источники помех, но при этом не обеспечиваются какие-либо наперед заданные значения ДН в направлениях на навигационные спутники. Эти значения зависят от ВК, полученных в результате решения задачи подавления этих помех [13], т.е. в целом носят случайный характер. В результате, если число спутников, для которых на выходе ААР ОСШ > -20 дБ, оказывается меньше четырех штук, то навигационная задача становится нерешаемой.

Навигационные спутники, сигналы которых удовлетворяют критерию ОСШ > -20 дБ, в основном располагаются в районе зенита в силу кратчайшего расстояния от спутников до Земли. Поэтому ограничение ДН в направлении зенита до значения её основного лепестка (с учетом ДН антенн) при фазировании ААР в этом направлении является естественным решением рассматриваемой проблемы. Оно позволяет, по меньшей мере, уверенно принимать сигналы со спутников, находящихся в окрестности направления ограничения ДН. Ограничение задается в вычислительных процедурах ААР, в качестве которых могут быть использованы разные линейно-ограниченные адаптивные алгоритмы [5, 7, 8]. Такие алгоритмы обеспечивают заданное ограничение значения ДН в интересующем направлении независимо от значений ВК, вычисляемых в процессе подавления помех.

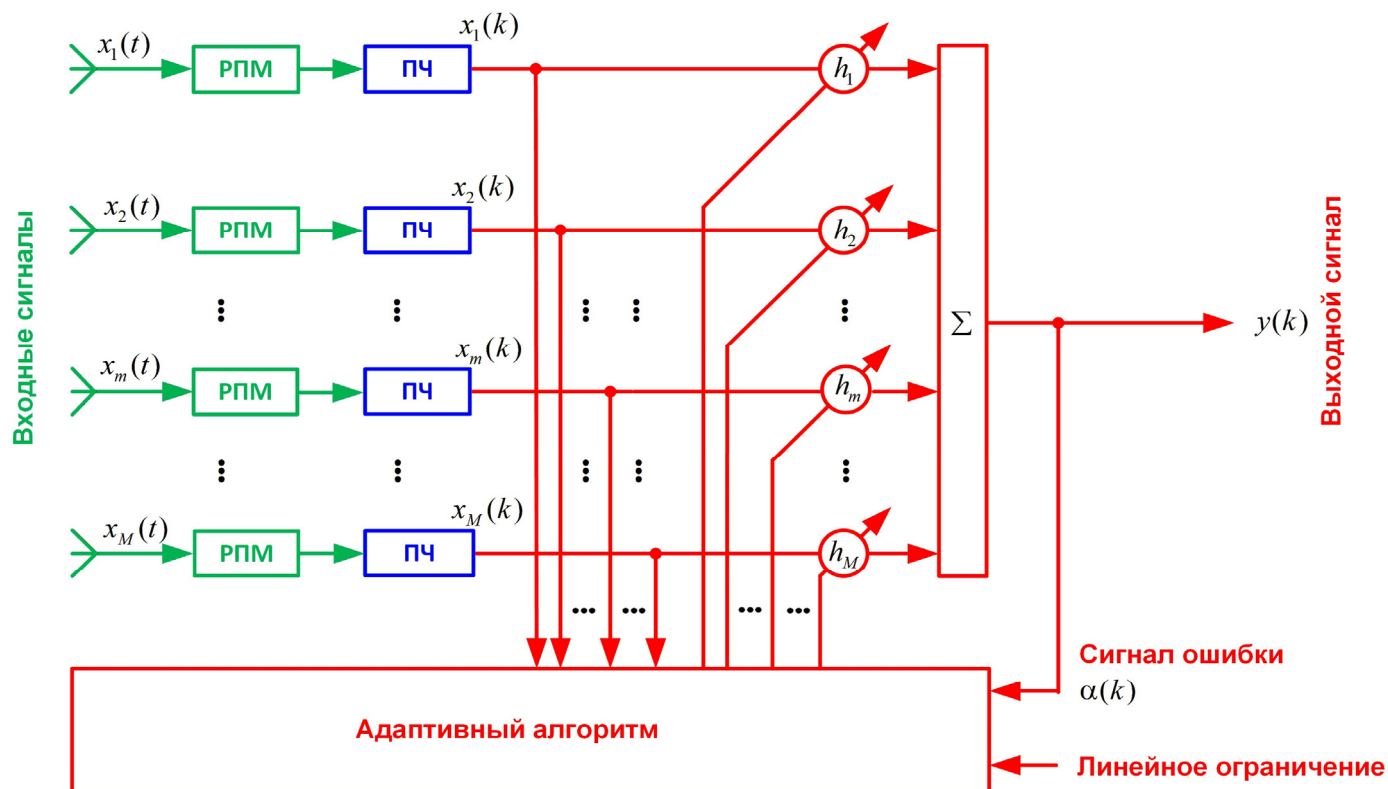


Рис. 1. ААР

Сегодня существует большое разнообразие адаптивных алгоритмов, используемых для вычисления ВК ААР. Это алгоритмы градиентного спуска, нормализованные градиентные алгоритмы, включая алгоритмы аффинных проекций, а также рекурсивные алгоритмы решения систем линейных уравнений по критерию наименьших квадратов (Recursive Least Squares, RLS) [5, 6]. Наиболее эффективными среди них являются RLS-алгоритмы. Критерием эффективности служат длительность переходного процесса, измеряемая числом итераций адаптивного алгоритма, а также минимальное значение целевой функции в установившемся режиме. В связи с этим RLS-алгоритмы сегодня широко применяются не только в ААР, но и в ряде других приложений современной адаптивной обработки сигналов [14, 15].

Однако адаптивные RLS-алгоритмы характеризуются квадратичной вычислительной сложностью как функцией числа ВК, которое в случае ААР совпадает с числом её антенн M . Вычислительную сложность RLS-алгоритмов можно уменьшить за счет учёта эрмитовой структуры корреляционной матрицы входных сигналов ААР, что позволяет вычислять только часть элементов этой матрицы [16]. Также, если ААР симметричная, то почти все её вычисления можно выполнять в арифметике действительных чисел [17-19].

Целью настоящей работы является описание ААР на базе линейно-ограниченного RLS-алгоритма в арифметике действительных чисел, в котором учитывается симметрия ААР и эрмитова структура корреляционной матрицы её входных сигналов.

В следующих разделах работы приводятся математическое описание и результаты моделирования такой ААР, подтверждающие её работоспособность и функциональную эффективность.

ААР в арифметике действительных чисел

Архитектура рассматриваемой линейно-ограниченной ААР приведена на рисунке 1. Она содержит M антенн/каналов и M комплексных ВК h_m , где $m = 1, 2, \dots, M$. ААР принимает непрерывные во времени сигналы $x_m(t)$, где t – это время.

Принятые сигналы $x_m(t)$ после полосовой фильтрации в радиоприёмниках (РПМ) каналов ААР и преобразования по частоте появляются на выходах преобразователей частоты (ПЧ) в виде дискретных комплексных отсчётов

$$x_m(k) = \hat{x}_m(k) + n_m(k),$$

где $\hat{x}_m(k)$ – это дискретные отсчёты сигнала $x_m(t)$, $n_m(k)$ – дискретные отсчеты шума РПМ, а k – номер отсчёта. Номера отсчетов сигналов совпадают с номерами итераций адаптивных алгоритмов, обрабатывающих эти сигналы.

ААР (рисунок 1) является АР с цифровым формированием луча или просто цифровой [20]. Её ПЧ строятся на принципах цифрового радио [21]. Такие ПЧ преобразуют сигналы, принимаемые антеннами ААР, с несущей частоты на нулевую промежуточную частоту. Выходные сигналы ПЧ образуют вектор дискретных отсчётов сигналов

$$\mathbf{x}_M(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_m(k), \dots, x_M(k)]^T.$$

Этот вектор используется для вычисления на каждой итерации адаптивного алгоритма выходного сигнала ААР

$$y(k) = \mathbf{h}_M^H(k-1) \mathbf{x}_M(k) = \sum_{m=1}^M h_m^*(k-1) x_m(k)$$

и расчёта вектора ВК ААР

$$\mathbf{h}_M(k) = [h_1(k), h_2(k), \dots, h_m(k), \dots, h_M(k)]^T,$$

который представляет собой набор комплексных чисел.

Здесь и далее, нижний индекс M обозначает число элементов в векторе или в квадратной матрице. В векторе это число равно M , а в квадратной матрице – $M \times M$.

Поскольку в рассматриваемой ААР требуемый сигнал $d(k)$ отсутствует, то сигнал ошибки $\alpha(k)$, минимизируемой в процессе адаптации, совпадает с её выходным сигналом

$$\alpha(k) = d(k) - y(k) = 0 - y(k) = -y(k).$$

С учётом ДН антенн, линейное ограничение в алгоритме работы ААР (вычисления её выходного сигнала и ВК) задается как

$$\mathbf{c}_M^H \mathbf{h}_M(k) = |F_{\text{ант}}(\theta_c, \phi_c)| M = f,$$

где вектор \mathbf{c}_M определяется как

$$\mathbf{c}_M = F_{\text{ант}}(\theta_c, \phi_c) [e^{j\psi_1}, e^{j\psi_2}, \dots, e^{j\psi_m}, \dots, e^{j\psi_M}]^T.$$

Здесь $F_{\text{ант}}(\theta_c, \phi_c)$ – это значение ДН антенн ААР в направлении ограничения, определяемого сферическими углами θ_c и ϕ_c , а ψ_m – пространственные набеги фаз относительно фазового центра ААР от источника сигнала, расположенного в дальней зоне в направлении ограничения, до каждой из антенн ААР [1, 2].

В качестве алгоритмов, вычисляющих ВК рассматриваемой ААР, могут быть использованы разные линейно-ограниченные RLS-алгоритмы адаптивной фильтрации сигналов [5, 7, 8]. Из них наиболее вычислительно эффективным является RLS-алгоритм на основе леммы об обращении матрицы. Он не содержит сложных арифметических операций, таких как извлечение квадратного корня или деление, число которых в других RLS-алгоритмах обычно пропорционально M . Из сложных операций в рассматриваемом RLS-алгоритме на каждой его итерации используется только одна операция деления.

Во всех RLS-алгоритмах наибольшее число арифметических операций приходится на вычисление обратной корреляционной матрицы $\mathbf{R}_M^{-1}(k)$ входных сигналов ААР $x_m(k)$. Известно, что эта матрица является эрмитовой [5, 6]. Это позволяет примерно в два раза уменьшать сложность обращения такой матрицы за счет вычисления лишь диагональных и подили над-диагональных её элементов [16].

Все адаптивные алгоритмы, используемые для вычисления ВК ААР, реализуются в арифметике комплексных чисел. Это обусловлено тем, что входные сигналы ААР $x_m(k)$ являются комплексными, а значит, и вычисляемые с помощью адаптивных алгоритмов ВК также являются комплексными.

Однако, если ААР является симметричной, то используя [17–19], почти все вычисления в ней можно выполнять в арифметике действительных чисел. Число действительных операций в такой ААР в два раза меньше эквивалентного числа действительных операций аналогичной ААР в арифметике комплексных чисел.

Симметричной называется ААР, в которой вектор входных сигналов и вектор ВК являются нечетно-симметричными, т.е.

$$\mathbf{x}_M(k) = [x_1(k), \dots, x_{M/2}(k), x_{M/2}^*(k), \dots, x_1^*(k)]^T$$

и

$$\mathbf{h}_M(k) = [h_1(k), \dots, h_{M/2}(k), h_{M/2}^*(k), \dots, h_1^*(k)]^T.$$

Уменьшение вычислительной сложности симметричной ААР достигается следующим образом.

Корреляционная матрица сигналов симметричной ААР $\mathbf{R}_M(k)$ является персимметричной. Согласно [17–19], оценивать такую матрицу можно как

$$\tilde{\mathbf{R}}_M(k) = \frac{1}{2} [\mathbf{R}_M(k) + \mathbf{J}_M \mathbf{R}_M^*(k) \mathbf{J}_M] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \times \\ \times [\mathbf{x}_M(i) \mathbf{x}_M^H(i) + \mathbf{J}_M \mathbf{x}_M^*(i) \mathbf{x}_M^T(i) \mathbf{J}_M],$$

где $1-1/M < \lambda < 1$ – это параметр экспоненциального взвешивания обрабатываемых сигналов, а

$$\mathbf{J}_M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

– перестановочная матрица.

Оценка матрицы $\tilde{\mathbf{R}}_M(k)$ является более точной по сравнению с оценкой матрицы $\mathbf{R}_M(k) = \sum_{i=1}^k \lambda^{k-i} \mathbf{x}_M(i) \mathbf{x}_M^H(i)$ [18]. Однако, вычислительная сложность оценки матрицы $\tilde{\mathbf{R}}_M(k)$ примерно в два раза больше вычислительной сложности оценки матрицы $\mathbf{R}_M(k)$.

В тоже время, используя преобразующие матрицы

$$\mathbf{U}_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M/2} & \mathbf{J}_{M/2} \\ j\mathbf{J}_{M/2} & -j\mathbf{I}_{M/2} \end{bmatrix},$$

если M – это четное число, или

$$\mathbf{U}_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{M-1} & \mathbf{0}_{M-1} & \mathbf{J}_{M-1} \\ \mathbf{0}_{M-1}^T & \sqrt{2} & \mathbf{0}_{M-1}^T \\ j\mathbf{J}_{M-1} & \mathbf{0}_{M-1} & -j\mathbf{J}_{M-1} \end{bmatrix},$$

если M – нечетное число, где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица, матрицу $\tilde{\mathbf{R}}_M(k)$ можно вычислять в арифметике действительных чисел как

$$\tilde{\mathbf{R}}_M(k) = \bar{\mathbf{R}}_{M,2}(k) = \lambda \bar{\mathbf{R}}_{M,2}(k-1) + \\ + \bar{\mathbf{x}}_{M,1}(k) \mathbf{x}_{M,1}^T(k) + \bar{\mathbf{x}}_{M,2}(k) \bar{\mathbf{x}}_{M,2}^T(k) = \\ = \bar{\mathbf{R}}_{M,1}(k) + \bar{\mathbf{x}}_{M,2}(k) \bar{\mathbf{x}}_{M,2}^T(k),$$

где

$$\bar{\mathbf{x}}_{M,1}(k) = \text{Re}\{\mathbf{U}_M \mathbf{x}_M(k)\}$$

и

$$\bar{\mathbf{x}}_{M,2}(k) = \text{Im}\{\mathbf{U}_M \mathbf{x}_M(k)\}$$

– это действительная и мнимая составляющие преобразованного комплексного вектора $\mathbf{U}_M \mathbf{x}_M(k)$ входных сигналов ААР.

Из уравнения вычисления матрицы $\bar{\mathbf{R}}_M(k)$ следует, что на каждой k -й итерации работы адаптивного алгоритма обновлять и обращать эту матрицу необходимо дважды. Сначала первый раз, используя векторы сигналов $\bar{\mathbf{x}}_{M,1}(k)$, а затем второй раз, используя векторы сигналов $\bar{\mathbf{x}}_{M,2}(k)$. Поэтому в ААР в арифметике действительных чисел процедура расчета ВК, в которой используется матрица $\bar{\mathbf{R}}_M(k)$, повторяется дважды на каждой k -й итерации, аналогично адаптивным алгоритмам, в которых корреляционная матрица обрабатываемых сигналов оценивается на скользящем окне отсчетов [5]. По этой причине число операций в симметричной ААР в арифметике действительных чисел в два раза больше чем в ААР в арифметике комплексных чисел.

Однако, так как одно комплексное умножение содержит четыре действительные умножения и сложения, то вычислительная сложность симметричной ААР в арифметике действительных чисел примерно в два раза меньше сложности аналогичной ААР в арифметике комплексных чисел.

Кроме того, в ААР в арифметике действительных чисел переходный процесс в два раза короче, а подавление помех в установленном режиме в среднем на 3 дБ больше (из-за более точной оценки корреляционной матрицы, а значит, и более точного вычисления ВК) по сравнению с ААР в арифметике комплексных чисел.

В настоящей работе представлена математическая модель линейно-ограниченной ААР в арифметике действительных чисел, см. ниже, в которой вычисляются только диагональные и над-диагональные элементы действительной корреляционной матрицы её входных сигналов. Эта модель получена путем использования приемов [5, 16, 17 – 19].

Инициализация: $\mathbf{q}_M(0) = \mathbf{c}_M [\mathbf{c}_M^H \mathbf{c}_M]^{-1}$, $[\mathbf{R}_M(0)]^{-1} = \delta^{-2} \mathbf{I}_M$,

$[\bar{\mathbf{R}}_{M,2}(0)]^{-1} = [\mathbf{R}_M(0)]^{-1}$, $\bar{\mathbf{c}}_M = \mathbf{U}_M \mathbf{c}_M$, $\bar{\mathbf{q}}_M(0) = \mathbf{U}_M \mathbf{q}_M(0)$,

$\bar{\gamma}_M(0) = [\bar{\mathbf{R}}_{M,2}(0)]^{-1} \bar{\mathbf{c}}_M$, $\bar{\mathbf{q}}_{M,2}(0) = \bar{\gamma}(0) [\bar{\mathbf{c}}_M^T \bar{\gamma}(0)]^{-1}$,

$\bar{\mathbf{h}}_{M,2}(0) = \bar{\mathbf{q}}_{M,2}(0) f$, $\beta = \lambda^{-1}$

For $k = 1, 2, \dots, K$

$\mathbf{x}_M(k) = [x_1(k), x_2(k), \dots, x_m(k), \dots, x_M(k)]^T$

$y(k) = \mathbf{h}_M^H(k-1) \mathbf{x}_M(k)$

$\bar{\mathbf{x}}_{M,1}(k) = \text{Re}\{\mathbf{U}_M \mathbf{x}_M(k)\}$

For $n = 1, 2, \dots, M$

$\bar{p}_{n,1}(k) = 0$

For $m = n, n+1, \dots, M$

$\bar{p}_{n,1}(k) = \bar{p}_{n,1}(k) + \bar{R}_{n,m,2}^{-1}(k-1) \bar{x}_{m,1}(k)$

End for m

End for n

For $n = 2, 3, \dots, M$

For $m = 1, 2, \dots, n-1$

$\bar{p}_{n,1}(k) = \bar{p}_{n,1}(k) + \bar{R}_{m,n,2}^{-1}(k-1) \bar{x}_{m,1}(k)$

End for m

End for n

$\bar{s}_1(k) = [\lambda + \bar{\mathbf{x}}_{M,1}^T(k) \bar{\mathbf{p}}_{M,1}(k)]^{-1}$

$\bar{\mathbf{g}}_{M,1}(k) = \bar{\mathbf{p}}_{M,1}(k) \bar{s}_1(k)$

For $n = 1, 2, \dots, M$

For $m = n, n+1, \dots, M$

$\bar{R}_{n,m,1}^{-1}(k) = \beta [\bar{R}_{n,m,2}^{-1}(k-1) - \bar{\mathbf{g}}_{n,1}(k) \bar{p}_{m,1}(k)]$

End for m

End for n

$\bar{v}_1(k) = \bar{\mathbf{c}}_M^T \bar{\mathbf{g}}_{M,1}(k)$

$\bar{v}_1(k) = \bar{\mathbf{x}}_{M,1}^T(k) \bar{\mathbf{q}}_{M,2}(k-1)$

$\bar{\mathbf{q}}'_{M,1}(k) = [\bar{\mathbf{q}}_{M,2}(k-1) - \bar{\mathbf{g}}_{M,1}(k) \bar{v}_1(k)] \times$

$\times \left[1 + \frac{\bar{v}_1(k) \bar{v}_1(k)}{1 - \bar{v}_1 \bar{v}_1(k)} \right]$

$\bar{\mathbf{q}}_{M,1}(k) = \bar{\mathbf{q}}'_{M,1}(k) + \bar{\mathbf{q}}_M(0) [1 - \bar{\mathbf{c}}_M^T \bar{\mathbf{q}}'_{M,1}(k)]$

$\bar{\alpha}_1(k) = -\bar{\mathbf{h}}_{M,2}^T(k-1) \bar{\mathbf{x}}_{M,1}(k)$

$\bar{\mathbf{h}}'_{M,1}(k) = \bar{\mathbf{h}}_{M,2}(k-1) + \bar{\mathbf{g}}_{M,1}(k) \bar{\alpha}_1(k)$

$\bar{\mathbf{h}}_{M,1}(k) = \bar{\mathbf{h}}'_{M,1}(k) + \bar{\mathbf{q}}_{M,1}(k) [f - \bar{\mathbf{c}}_M^T \bar{\mathbf{h}}'_{M,1}(k)]$

$\bar{\mathbf{x}}_{M,2}(k) = \text{Im}\{\mathbf{U}_M \mathbf{x}_M(k)\}$

For $n = 1, 2, \dots, M$

$\bar{p}_{n,2}(k) = 0$

For $m = n, n+1, \dots, M$

$\bar{p}_{n,2}(k) = \bar{p}_{n,2}(k) + \bar{R}_{n,m,1}^{-1}(k) \bar{x}_{m,2}(k)$

End for m

End for n

For $n = 2, 3, \dots, M$

For $m = 1, 2, \dots, n-1$

$\bar{p}_{n,2}(k) = \bar{p}_{n,2}(k) + \bar{R}_{m,n,1}^{-1}(k) \bar{x}_{m,2}(k)$

End for m

End for n

$\bar{s}_2(k) = [1 + \bar{\mathbf{x}}_{M,2}^T(k) \bar{\mathbf{p}}_{M,2}(k)]^{-1}$

$\bar{\mathbf{g}}_{M,2}(k) = \bar{\mathbf{p}}_{M,2}(k) \bar{s}_2(k)$

For $n = 1, 2, \dots, M$

For $m = n, n+1, \dots, M$

$\bar{R}_{n,m,2}^{-1}(k) = \bar{R}_{n,m,1}^{-1}(k) - \bar{\mathbf{g}}_{n,2}(k) \bar{p}_{m,2}(k)$

End for m

End for n

$\bar{v}_2(k) = \bar{\mathbf{c}}_M^T \bar{\mathbf{g}}_{M,2}(k)$

$\bar{v}_2(k) = \bar{\mathbf{x}}_{M,2}^T(k) \bar{\mathbf{q}}_{M,1}(k)$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{q}}'_{M,2}(k) &= \left[\bar{\mathbf{q}}_{M,1}(k) - \bar{\mathbf{g}}_{M,2}(k) \bar{v}_2(k) \right] \times \\ &\times \left[1 + \frac{\bar{v}_2(k) \bar{v}_2(k)}{1 - \bar{v}_2(k) \bar{v}_2(k)} \right] \\ \bar{\mathbf{q}}_{M,2}(k) &= \bar{\mathbf{q}}'_{M,2}(k) + \bar{\mathbf{q}}_M(0) \left[1 - \bar{\mathbf{c}}_M^T \bar{\mathbf{q}}'_{M,2}(k) \right] \\ \bar{\alpha}_2(k) &= -\bar{\mathbf{h}}_{M,1}^T(k) \bar{\mathbf{x}}_{M,2}(k) \\ \bar{\mathbf{h}}'_{M,2}(k) &= \bar{\mathbf{h}}_{M,2}(k) + \bar{\mathbf{g}}_{M,2}(k) \bar{\alpha}_2(k) \\ \bar{\mathbf{h}}_{M,2}(k) &= \bar{\mathbf{h}}'_{M,2}(k) + \bar{\mathbf{q}}_{M,2}(k) \left[f - \bar{\mathbf{c}}_M^T \bar{\mathbf{h}}'_{M,2}(k) \right] \\ \mathbf{h}_M(k) &= \mathbf{U}_M^H \bar{\mathbf{h}}_{M,2}(k) \end{aligned}$$

End for k

Здесь $\delta^2 \geq 0.1\sigma_x^2$ – это параметр регуляризации процедуры обращения начальной матрицы $\bar{\mathbf{R}}_M^{-1}(0)$, σ_x^2 – дисперсия входных сигналов ААР $x_m(k)$, \mathbf{I}_M – единичная матрица, $\bar{p}_{n,1}(k)$ и $\bar{p}_{n,2}(k)$ – элементы векторов $\bar{\mathbf{p}}_{M,1}(k)$ и $\bar{\mathbf{p}}_{M,2}(k)$, $\bar{R}_{n,m,1}^{-1}(k)$ и $\bar{R}_{n,m,2}^{-1}(k)$ – элементы матриц $\bar{\mathbf{R}}_{M,1}^{-1}(k)$ и $\bar{\mathbf{R}}_{M,2}^{-1}(k)$, а $\bar{\mathbf{g}}_{M,1}(k)$ и $\bar{\mathbf{g}}_{M,2}(k)$ – векторы коэффициентов Калмана.

В рассматриваемом алгоритме действительные переменные обозначены символами с верхней чертой. Вычислительные операции над этими переменными выполняются в арифметике действительных чисел. И только выходной сигнала ААР $y(k)$ вычисляется в арифметике комплексных чисел. Для этого на каждой k -й итерации требуется преобразовывать вектор действительных ВК $\bar{\mathbf{h}}_{M,2}(k)$ в вектор комплексных ВК

$$\mathbf{h}_M(k) = \mathbf{U}_M^H \bar{\mathbf{h}}_{M,2}(k).$$

В силу структуры матрицы \mathbf{U}_M , указанное преобразование может быть выполнено без использования арифметических операций, а потому на вычислительной сложности ААР в арифметике действительных чисел не сказывается.

Аналогичные (математически эквивалентные) ААР на базе RLS-алгоритмов с вычислением всех элементов обратной корреляционной матрицы, с вычислением только диагональных и под-диагональных её элементов, на базе QR RLS-алгоритмов или RLS-алгоритмов, использующих преобразования Хаусхолдера, могут также быть получены, используя [5, 16-19].

В следующем разделе приводятся результаты компьютерного моделирования, подтверждающие работоспособность и демонстрирующие эффективность рассматриваемой ААР в арифметике действительных чисел.

Результаты моделирования ААР

Для проверки работоспособности ААР в арифметике действительных чисел и сравнения её эффективности с ААР в арифметике комплексных чисел было проведено моделирование адаптивных процессов в этих ААР.

Моделировались две одинаковые квадратные ААР с числом антенн $M = 3 \times 3 = 9$. Ширина ДН каждой антенны (по уровню -3 дБ) составляла $\theta \approx \pm 40^\circ$ в диапазоне углов $\phi = 0^\circ \dots 360^\circ$, а её максимальное значение $|F_{\text{ант}}(\theta, \phi)|_{\text{max}}$ было равно около 6 дБ.

Антенны ААР равномерно располагались на квадратной сетке с расстоянием между соседними парами антенн, равным половине длины радиоволны диапазона L1 (несущая частота 1575.42 МГц) ГНСС Global Positioning System (GPS) [9].

В исходном состоянии каждая ААР размещалась горизонтально, а её главный лепесток и главные лепестки ДН её антенн были направлены в зенит ($\theta_0 = 0^\circ$, $\phi_0 = 0^\circ$). Направление ограничения ДН и направление на один спутник также совпадали с зенитом. Восемь источников помех были размещены в диапазоне углов $\theta = 75^\circ \dots 105^\circ$ и $\phi = 0^\circ \dots 360^\circ$. Расположение источников помех было выбрано случайным. Отношение сигнал/каждая помеха задавалось равным -70 дБ.

Сигнал на выходе ПЧ каждого из каналов ААР определялся как

$$\hat{x}_m(k) = \sum_{l=1}^L \tilde{x}_n^{(l)}(k) = \sum_{l=1}^L A^{(l)}(k) e^{j\psi_m^{(l)}},$$

где $A^{(l)}(k)$ – это комплексная огибающая l -го принимаемого сигнала, $\psi_m^{(l)}$ – пространственный набег фазы от источника этого сигнала до m -й антенны относительно фазового центра ААР и $L < M$. Спутниковый сигнал $\tilde{x}_m^{(1)}(k)$ моделировался одной из тридцати двух псевдослучайных последовательностей (ПСП) Голда, используемых в ГНСС GPS [9]. Помехи $\tilde{x}_m^{(l)}(k)$, $l = 2, \dots, L$ моделировались независимыми комплексными реализациями отсчетов белого Гауссового шума. Шумы в каналах ААР $n_m(k)$ также моделировались независимыми реализациями отсчетов белого Гауссового шума с

$$\text{ОСШ} = \sigma_{x^{(1)}}^2 / \sigma_n^2 = -20 \text{ дБ},$$

где $\sigma_{x^{(1)}}^2$ – это дисперсия спутникового (полезного) сигнала, а σ_n^2 – дисперсия шумов в каналах РПМ. Если число помех удовлетворяет соотношению $L < M$, то, как уже отмечалось, любая ААР, состоящая из одинаково направленных антенн, может подавить все сигналы этих помех в своём выходном сигнале [3]. Это справедливо и в отношении ААР, рассматриваемых в настоящем разделе.

Результаты моделирования ААР приведены на рисунках 2-5. На рисунке 2а и рисунке 2б показаны 3D ДН на плоскости в исходном и в установившемся режимах ААР. Здесь зеленым цветом (см. крестик и цифру) обозначено направление ограничения ДН ААР и направление на источник полезного сигнала. Розовым цветом (см. крестики и цифры) обозначены направления на источники помех и их номера. Цвет самих рисунков обозначает значения ДН в соответствии с цветовой палитрой, расположенной справа от каждого из рисунков.

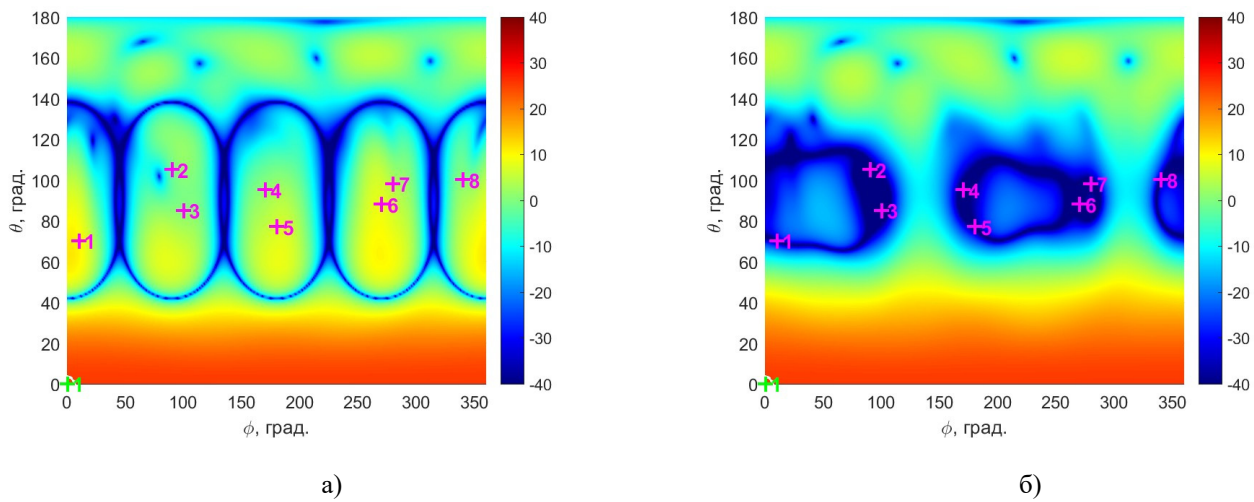


Рис. 2. ДН ААР: а) – исходная; б) – в установившемся режиме

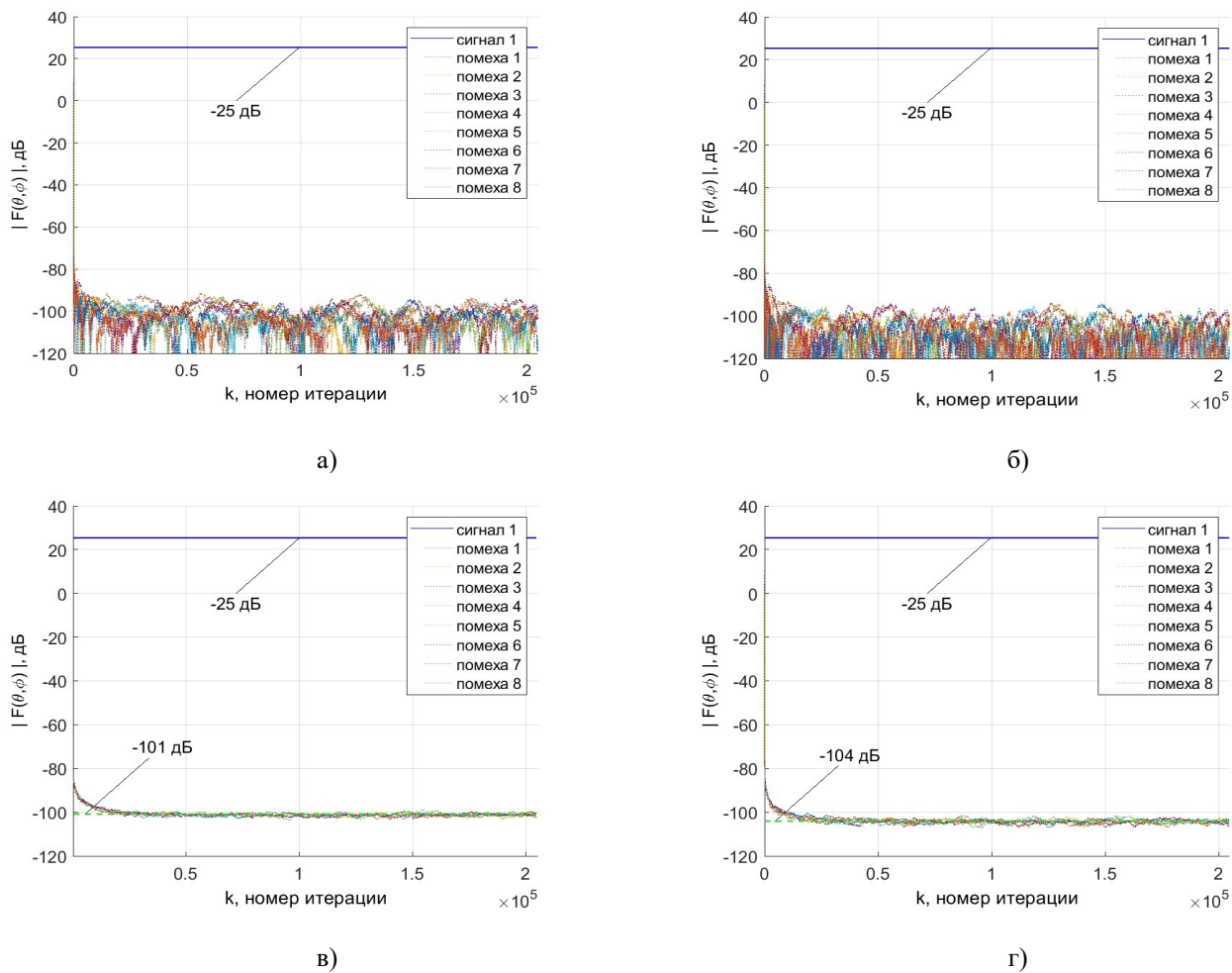


Рис. 3. Переходные процессы:

а), в) – ААР в арифметике комплексных чисел; б), г) – ААР в арифметике действительных чисел

В исходном состоянии ВК обеих рассматриваемых ААР одинаковые. Они также практически одинаковые в установившемся режиме. Поэтому их ДН на рис. 2 приведены для случая только одной из двух ААР. Из рисунка 2 следует, что в рассматриваемом эксперименте сигналы всех источников помех подавляются обеими ААР.

На рисунке 3 приведены графики переходных процессов ААР. Здесь $|F(\theta, \phi)|$ – это значения модуля ДН (с учетом ДН антенн) на каждой итерации работы ААР в направлениях источников принимаемых сигналов. Из рисунков 3а и 3б видно,

что в направлениях источников помех в установившемся режиме ААР в её ДН образуются провалы глубиной порядка -100 дБ. Одновременно в направлении зенита выдерживается уровень ДН порядка 25 дБ. Эта величина соответствует значению ограничения ДН ААР

$$20 \log_{10} M + 20 \log_{10} |F(\theta, \phi)|_{\max}.$$

Из рисунков 3а и 3б также видно, что в направлениях на источники помех в среднем образуются «более глубокие» провалы в ДН ААР в арифметике действительных чисел, чем в ААР в арифметике комплексных чисел.

Чтобы оценить различие в эффективности подавления помех рассматриваемых ААР необходимо провести статистиче-

ский анализ помех и сигналы шумов в каналах ААР также случайным образом менялись в каждом эксперименте.

Из усредненных по 50 статистически независимым экспериментам ДН (см. рис. 3в и рис. 3г) следует, что ААР в арифметике действительных чисел, аналогично [17-19], обеспечивает в среднем на 3 дБ большее подавление помех, чем ААР в арифметике комплексных чисел. Из графиков в увеличенном масштабе (рис. 4) также видно, что длительности переходных процессов рассматриваемых ААР, аналогично [17-19], различаются примерно в два раза.

Актуальным, однако, является вопрос, а будут ли приниматься сигналы с других спутников, расположенных в направ-

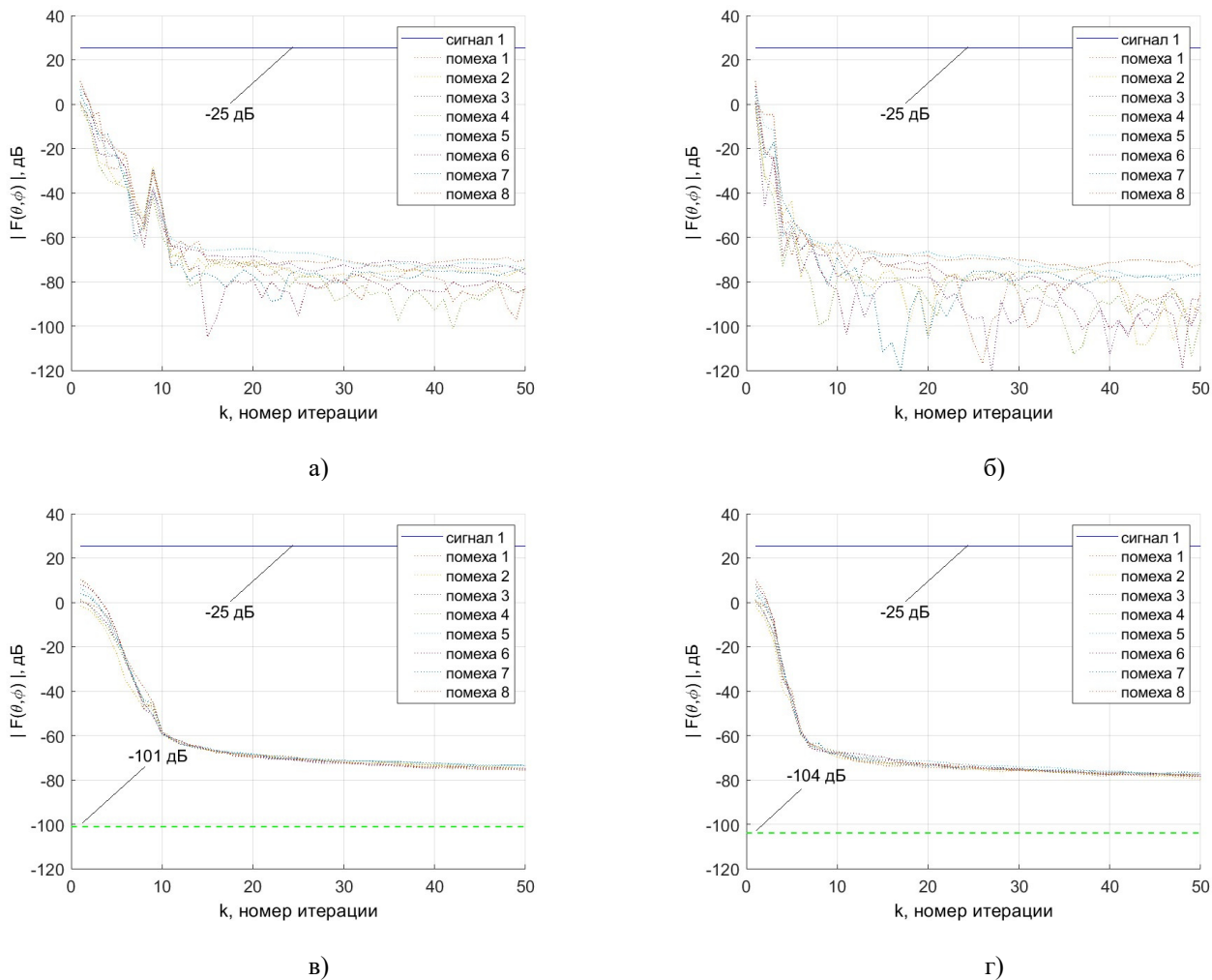


Рис. 4. Переходные процессы (в увеличенном масштабе):
а), в) – ААР в арифметике комплексных чисел; б), г) – ААР в арифметике действительных чисел

ское усреднение результатов моделирования, аналогичных результатам, представленным на рисунках 3а и 3б. При таком моделировании расположение источников сигналов и их энергетические характеристики не менялись. В спутниковом сигнале в каждом эксперименте случайным образом менялась его модуляционная последовательность. Этот сигнал модулировался бинарной фазовой манипуляцией (Binary Phase Shift Keying, BPSK), при которой двадцать ПСП формировали один

направления, отличных от направления, которое определяется линейным ограничением.

Ответ на этот вопрос приведен на рисунке 5. Здесь показаны карты ОСШ на выходе ААР. Эти карты построены по методике [22]. Её суть заключается в следующем. По значениям ВК в установившемся режиме рассчитываются с выбранным угловым дискретом значения ОСШ на выходе ААР в каждой точке углового пространства, окружающего ААР. В качестве

такого сигнала может использоваться ПСП любого из спутниковых сигналов. При этом под ОСШ понимается отношение сигнал шум плюс остаточные подавленные помехи на выходе ААР.

При сильном подавлении (см. рис. 3 и рис. 4), эти помехи не влияют на карты ОСШ. Если при моделировании использовались несколько источников полезных сигналов, то их наличие также не влияет на подавления помех, т.е. на значения вычисляемых ВК, а значит, не влияет и на карты ОСШ, так как полезные сигналы со спутников находятся, как уже отмечалось, ниже уровня тепловых шумов ПРМ в каналах ААР, как минимум, на 20 дБ.

Карты ОСШ позволяют прогнозировать работу ААР в заданной помеховой обстановке, что, в свою очередь, позволяет избежать длительного моделирования ААР при разном числе спутников и их угловых расположениях. Эти карты зависят только от конфигурации ААР, ДН её антенн, используемого адаптивного алгоритма, числа и углового положения источников помех, но не зависят от числа и углового положения источников полезных сигналов (спутников).

Если на картах значения ОСШ, меньшие -20 дБ, проквантовать одним уровнем, то получатся «квантованные» карты

ОСШ (см. рис. 5в и рис. 5г). Эти значения ОСШ на рисунках показаны темно-синим цветом. В направлениях, обозначенных этим цветом, сигналы со спутников не могут быть приняты. Видно, что сигналы со спутников могут приниматься ААР из направлений в диапазоне углов $\theta \approx \pm 40^\circ$ и $\phi = 0^\circ \dots 360^\circ$ относительно направления на зенит. В рассматриваемом эксперименте при отсутствии помех таких направлений около 22% от всех дискретных направлений вокруг неадаптивной ААР.

После подавления помех ААР число направлений с ОСШ > -20 дБ немного увеличилось до 24%. Это обусловлено перераспределением значений исходной ДН из направлений на источники помех в область главного лепестка ДН. Также видно, что подавленные помехи не влияют на прием сигналов со спутников, так как после подавления сигналы помех на выходе ААР находятся ниже уровня шумов РПМ её каналов.

Указанные процентные значения – это отношение площади карты с ОСШ > -20 дБ ко всей площади этой карты. На самом же деле, эти значения можно увеличить в два раза, если учесть, что сигналы со спутников могут приниматься только в верхней полусфере ($\theta = 0^\circ \dots 90^\circ$), т.е. выше линии горизонта,

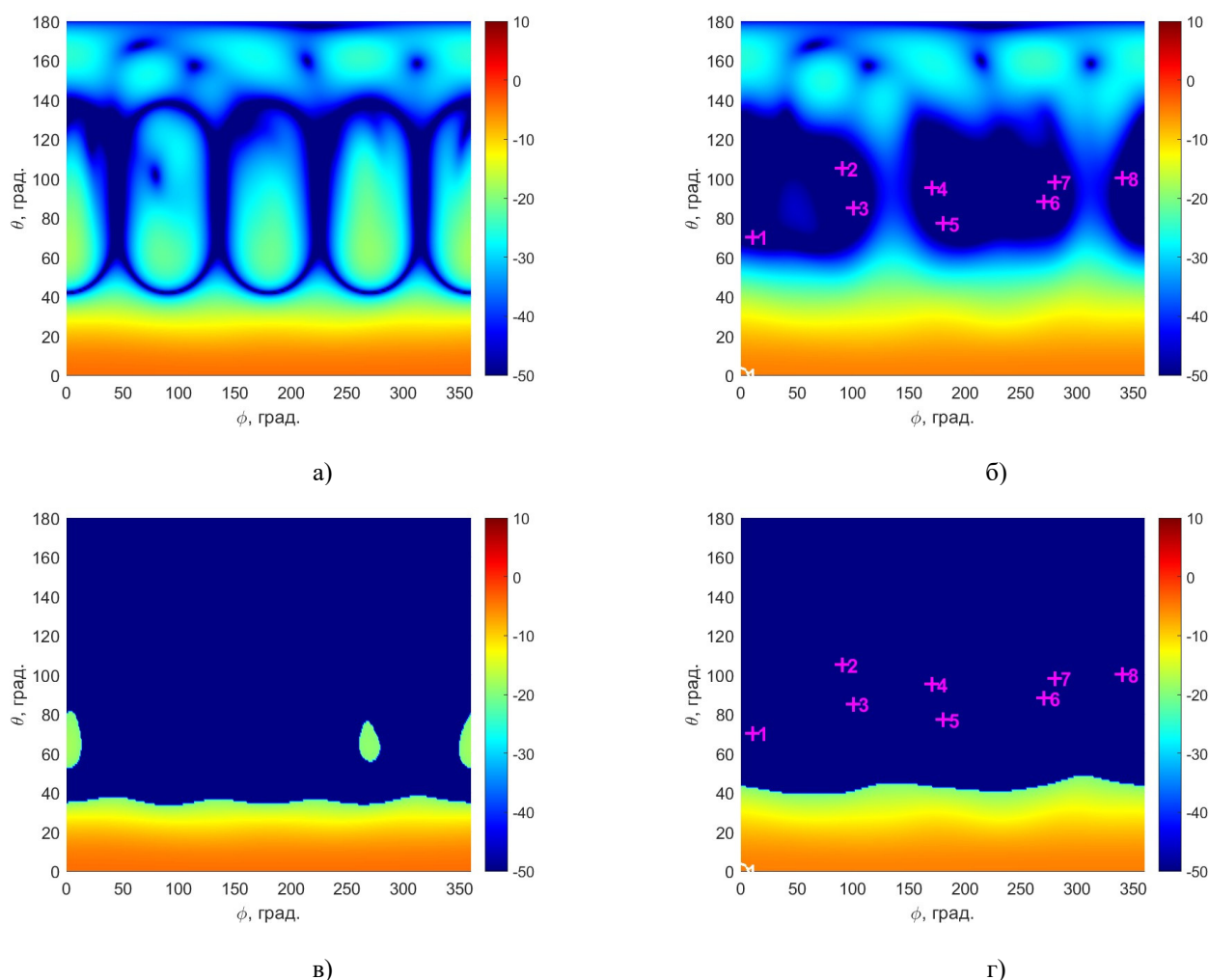


Рис. 5. Карты ОСШ: а) – исходная, не квантованная; б) – в установившемся режиме, не квантованная; в) – исходная, квантованная; г) – в установившемся режиме, квантованная

проходящей через плоскость ААР. Похожие результаты демонстрируются сравнимыми ААР и при других расположениях помех, если их число не превышает значения $M - 1$.

Карты ОСШ, подобно ДН, практически одинаковые для обеих рассматриваемых ААР, так как ВК обеих ААР в установленном режиме примерно одинаковые. В тоже время, ААР в арифметике действительных чисел характеризуется меньшей вычислительной сложностью и более эффективным подавлением помех за счет более точного вычисления ВК по сравнению с ААР в арифметике комплексных чисел.

Заключение

Таким образом, в статье рассмотрена линейно-ограниченная ААР в арифметике действительных чисел. В такой ААР требуемое число действительных арифметических операций в два раза меньше эквивалентного числа действительных операций аналогичной ААР в арифметике комплексных чисел. Переходный процесс ААР в арифметике действительных чисел в два раза короче, а подавление помех в установленном режиме в среднем на 3 дБ больше чем в ААР в арифметике комплексных чисел. Рассмотренная ААР может найти применение не только в аппаратуре ГНСС, но и в аппаратуре других радиосистем, таких как радиосистемы связи, радиолокации и радиоуправления, в которых можно сформулировать и задать ограничение ДН в интересующем направлении, а принимаемые радиосигналы скрыты шумами радиоприемников.

Работа проведена в рамках выполнения государственного задания НИЦ «Курчатовский институт».

Литература

1. Brown A. D., Boeringer D., Cooke T. Electronically scanned arrays. MATLAB® modelling and simulation. CRC Press, 2012, 214 p.
2. Balanis C. A. Antenna theory: analysis and design. 4-th ed. John Wiley & Sons, Inc., 2016, 1095 p.
3. Hudson J. E. Adaptive array principles. The Institution of Engineering and Technology, 2007, 253 p.
4. Ратынский М. В. Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках. М.: Ленард, 2024, 240 с.
5. Джиган В. И. Адаптивная фильтрация сигналов: теория и алгоритмы. М.: Техносфера, 2013, 528 с.
6. Diniz P. S. R. Adaptive filtering algorithms and practical implementation, 5-th ed. Springer, 2020, 495 p.
7. Frost O. L. An algorithm for linearly constrained adaptive array processing // Proceedings of the IEEE. 1972. Vol. 60. No. 8. P. 926-935.
8. Resende L. S., Romano J. M. T., Bellanger M. G. A fast least-squares algorithm for linearly constrained adaptive filtering // IEEE Trans. Signal Processing. 1996. Vol. 44. No. 5. P. 1168-1174.
9. Hofmann-Wellenhof B., Lichtenegger H., Wasle E. GNSS – Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more. Springer, 2008, 516 p.
10. Djigan V. I. Adaptive arrays for GNSS receivers // Proceedings of the IEEE 3rd International Conference on Problems of Informatics, Electronics and Radio Engineering (PIERE). Novosibirsk, Russia, November 15-17, 2024. 4 p.
11. Howells P. W. Intermediate frequency side-lobe canceller // US Patent 3202990. 1959. 8 p.
12. Джиган В. И. Цифровая адаптивная антенная решетка для приема полезных сигналов, находящихся под тепловыми шумами // Цифровая обработка сигналов. 2024. № 2. С. 3-10.
13. Джиган В. И. Выбор адаптивного алгоритма для цифровой антенной решетки наземной аппаратуры систем глобальной спутниковой навигации // Цифровая обработка сигналов. 2025. № 2. С. 27-35.
14. Джиган В. И. Активное шумоподавление: архитектуры, алгоритмы и их параметры // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2025. № 8. С. 3-11.
15. Джиган В. И. Сравнительная эффективность цифровых предсказателей сигналов на базе адаптивных рекурсивных алгоритмов по критерию наименьших квадратов // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2025. №11. С. 4-14.
16. Djigan V. I. Some tricks of calculations in MIL RLS algorithm // Proceedings of the 23-th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA-2021). Moscow, Russia, March 24-26, 2021. 4 p.
17. Nitzberg R. Application of maximum likelihood estimation of persymmetric covariance matrices to adaptive processing // IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems. 1980. Vol. 16. No. 1. P. 124-127.
18. Hwang K. C., Yen C. C. A unitary transformation method for angle of arrival estimation // IEEE Trans. Acoustic, Speech and Signal Processing. 1991. Vol. 39. No. 4. P. 975-977.
19. Джиган В. И. Нечетная симметрия вектора весовых коэффициентов симметричных антенных решеток с линейными ограничениями // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника. 2018. № 6. С. 323-335.
20. Григорьев Л. Н. Цифровое формирование диаграммы направленности в фазированных антенных решетках. М.: Радиотехника, 2010. 144 с.
21. Reyland J. M. Software defined radio: theory and practice. Artech House, 2023, 796 p.
22. Джиган В. И., Шериунович А. Ю., Луферчик П. В., Штро П. В. Карты отношения сигнал-шум на выходе адаптивной антенной решетки для оценки возможности приема сигналов спутниковой навигации // Труды 9-й Всероссийской научно-технической конференции «Системы связи и радионавигации». Россия, г. Красноярск, 16-18 сентября 2025. С. 18-22.

LINEARLY-CONSTRAINED ADAPTIVE ANTENNA ARRAY FOR GROUND-BASED RADIO RECEIVERS OF GLOBAL NAVIGATION SATELLITE SYSTEM

Victor I. Djigan, National Research Center "Kurchatov Institute";
National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia, dzhigan_vi@nrcki.ru

Abstract

Antenna arrays are widely used as the antennas of modern radio systems today. The ability to control the Radiation Pattern (RP) of such antennas underlies the operating principle of the Adaptive Antenna Arrays (AAA). These arrays suppress the signals from the interference sources whose frequency bands overlap with the frequency band of the desired (informational) signal. One of the most relevant applications of the AAAs is their usage in the ground-based equipment of the Global Navigation Satellite Systems (GNSS). Such equipment primarily utilizes the AAAs known as the interference cancelers. Like any AAA, they suppress interferences but do not guarantee the receiving of a predetermined number of satellite signals which are necessary for solving the navigation task. This paper proposes to use a version of the linearly-constrained AAA. The constrain ensures a fixed value of the AAA RP towards zenith. The received signals from the satellites, which are located in this direction, provide the maximal signal-to-noise ratio due to the shortest distance from satellites to Earth. The value of the RP specified by the constraint is independent of the values of the AAA weights calculated during the adaptation. To calculate these weights, a recursive least-squares algorithm based on the matrix inversion lemma and optimized for the number of arithmetic operations has been used. The computational complexity of this algorithm is lower than that of its non-optimized version. This complexity reduction is achieved by the taking into account the Hermitian structure of the correlation matrix of the AAA input signals. A further reduction in the computational complexity is achieved if the AAA is symmetric. Almost all operations in such the AAA can be executed using real valued arithmetic. Their number is a half that of the equivalent number of real valued operations in the similar AAA in complex valued arithmetic. Furthermore, compared to the complex valued arithmetic AAA, the transient response of the AAA under the consideration is two times shorter and the interference suppression is on average 3 dB bigger in the steady-state mode. The proposed AAA can be used not only in GNSS equipment but also in other radio systems.

Keywords: Global Navigation Satellite Systems, Recursive Least Squares algorithm, linear constraint, adaptive antenna array, complex-valued arithmetic, real-valued arithmetic, signal-to-noise ratio map.

References

- [1] A. D. Brown, D. Boeringer, and T. Cooke, *Electronically Scanned Arrays. MATLAB® Modelling and Simulation*, CRC Press, 2012, 214 p.
- [2] C. A. Balanis, *Antenna Theory: Analysis and Design*, 4-th ed., John Wiley & Sons, Inc., 2016, 1095 p.
- [3] J. E. Hudson, *Adaptive Array Principles*, The Institution of Engineering and Technology, 2007, 253 p.
- [4] M. V. Ratynski, *Adaptation and Superresolution in Antenna Arrays*, Moscoe, Lenard Publisher, 2024, 240 p.
- [5] V. I. Djigan, *Adaptive Filtering: Theory and Algorithms*, Moscow, Technosphera Publisher, 2013, 528 p. (In Russian).
- [6] P. S. R. Diniz, *Adaptive Filtering Algorithms and Practical Implementation*, 5-th ed, Springer, 2020, 495 p.
- [7] O. L. Frost, "An algorithm for linearly constrained adaptive array processing", *Proceedings of the IEEE*, 1972, vol. 60, no. 8, pp. 926-935.
- [8] L. S. Resende, J. M. T. Romano, and M. G. Bellanger, "A fast least-squares algorithm for linearly constrained adaptive filtering," *IEEE Trans. Signal Processing*, 1996, vol. 44, no. 5, pp. 1168-1174.
- [9] B. Hofmann-Wellenhof, H. Lichtenegger, and E. Wasle, *GNSS – Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and More*, Springer, 2008, 516 p.
- [10] V. I. Djigan, "Adaptive arrays for GNSS receivers," *Proceedings of the IEEE 3rd International Conference on Problems of Informatics, Electronics and Radio Engineering (PIERE)*, Novosibirsk, Russia, November 15-17, 2024, 4 p.
- [11] P. W. Howells, "Intermediate frequency side-lobe canceller," *US Pattern* 3202990, 1959, 8 p.
- [12] V. I. Djigan, "Digital adaptive antenna array for receiving informational signals under thermal noise," *Digital Signal Processing*, Moscow, Russia, 2024, no. 2, pp. 3-10. (In Russian)
- [13] V. I. Djigan, "Selection of adaptive algorithm for digital antenna array of land-based equipment for global satellite navigation systems," *Digital Signal Processing*, Moscow, Russia, 2025, no. 2, pp. 27-35. (In Russian).
- [14] V. I. Djigan, "Active noise control: architectures, algorithms and its parameters", *T-comm - Telecommunications and their Applications in Transport Industry*, Russia, 2025, no. 8, pp. 3-11. (In Russian).
- [15] V. I. Djigan, "Comparative efficiency of signal digital predistorters based on adaptive Recursive Least Squares algorithms," *T-Comm*, Russia, 2025, no. 11, pp. 4-14. (In Russian)
- [16] V. I. Djigan, "Some tricks of calculations in MIL RLS algorithm," *Proceedings of the 23-th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA-2021)*, Moscow, Russia, March 24-26, 2021, 4 p.
- [17] R. Nitzberg, "Application of maximum likelihood estimation of persymmetric covariance matrices to adaptive processing," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, 1980, vol. 16, no. 1, pp. 124-127.
- [18] K. C. Huarng and C. C. Yen, "A unitary transformation method for angle of arrival estimation," *IEEE Trans. Acoustic, Speech and Signal Processing*, 1991, vol. 9, no. 4, pp. 975-977.
- [19] V. I. Djigan, "Odd symmetry of weights vector of symmetrical adaptive arrays with linear constraints," *Proceedings of High School. Radioelectronics*, Kiev, Ukraine, 2018, no. 6, pp. 323-335. (In Russian)
- [20] L. N. Grigoriev, *Digital Beamforming in Phased Antenna Arrays*. Moscow, Radiotekhnika Publisher, 2010, 144 p. (In Russian)
- [21] J. M. Reyland, *Software Defined Radio: Theory and Practice*, Artech House, 2023, 796 p.
- [22] V. I. Djigan, A. Yu. Shershunovich, P. V. Lufchik, P. V. Shtro "Signal-to-noise ratio maps at output of adaptive antenna array for assessing possibility of receiving satellite navigation signals," *Proceedings of the 9-th All-Russian Scientific and Practical Conferences on Communication and Global Position Radio Systems*. Krasnoyarsk, Russia, September 16 -18, 2025, pp. 18-22.

Information about author:

Victor I. Djigan, Doctor of Sciences, Principal Researcher of Sub-Department for Chip Design Methodology of Department for Design Problems in Microelectronics of Prospective Microelectronics Center in National Research Center "Kurchatov Institute," Professor, Institute of Microdevices and Control Systems of National Research University of Electronic Technology, Moscow, Russia. ORCID 0000-0001-7485-1623