

МЕТОД ФОРМИРУЮЩЕГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЦИКЛОСТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

DOI: 10.36724/2072-8735-2021-15-8-4-12

Manuscript received 22 April 2021;

Accepted 28 May 2021

Шевгунов Тимофей Яковлевич,
Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), Москва, Россия,
shevgunov@gmail.com

Ключевые слова: циклоstationарность,
спектральная корреляционная функция, кодовая
модуляция, формирующий оператор, метод прямой
последовательности

В работе предложен метод формирующего оператора для моделирования циклоstationарных случайных процессов (ЦССП), относящихся к классу процессов второго порядка, описываемых параметрической импульсной моделью. Формирование ЦССП представляется как результат прохождения специально подобранного элементарного ЦССП через линейную инвариантную во времени систему с известной импульсной характеристикой. В работе рассмотрен способ формирования элементарного ЦССП на основе последовательности дельта-функций Дирака, следующих во временной области равномерно с постоянным интервалом и задающих требуемую структурную периодичность моделируемого процесса. Были получены аналитические выражения основных характеристик, используемых для описания циклоstationарных свойств элементарного процесса, включая двумерную, циклическую и спектральную корреляционные функции. Кроме общего случая элементарного ЦССП с коррелированными весовыми коэффициентами дельта-функций, рассмотрен случай независимых коэффициентов. Показано, что использование спектральной корреляционной функции (СКФ) для описания циклических свойств обеспечивает явную аналитическую связь между характеристиками элементарного и моделируемого ЦССП при известной частотной характеристике фильтра. В работе представлен сравнительный пример, в рамках которого было проведено моделирование двух ЦССП, один из которых был выбран процессом с амплитудно-импульсной модуляцией последовательности прямоугольных импульсов stationарным случайным процессом дискретного времени, а в качестве второго рассмотрен процесс, формирующий сигнал с расширением спектра по методу прямой последовательности. Выбор короткой последовательности Баркера в качестве кода позволил в рамках представленного примера выполнить наглядное сравнение модулей компонент СКФ на циклических частотах, кратных частоте следования элементарных импульсов, и циклических частотах, кратных частоте следования кодовых символов. Развитие методов, предложенных в работе, открывает пути к повышению качества работы современных радиолокационных и телекоммуникационных систем за счёт использования циклических частот – неслучайного параметра, характеризующего структурные свойства обрабатываемых ими сигналов.

Информация об авторе:

Шевгунов Тимофей Яковлевич, к.т.н., доцент кафедры "Теоретическая радиотехника", Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) "МАИ", г. Москва, Россия

Для цитирования:

Шевгунов Т.Я. Метод формирующего оператора для моделирования циклоstationарных случайных процессов // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2021. Том 15. №8. С. 4-12.

For citation:

Shevgunov T.Ya. (2021) Shaping operator technique for modelling cyclostationary random processes. *T-Comm*, vol. 15, no.8, pp. 4-12. (in Russian)

Введение

В ряде задач, решаемых методами и алгоритмами цифровой обработки в телекоммуникационных и радиолокационных системах, полезные сигналы могут быть описаны моделями, представляющими их в качестве реализаций случайных процессов (СП). Рассмотрим некоторый класс моделей СП непрерывного времени, представимых в общем случае следующей структурной формулой:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} w(t - nT; \theta_n), \quad (1)$$

где T – структурный период ($T > 0$), а $w(t; \theta)$ описывает импульсный сигнал конечной энергии, зависящий от времени t и вектора параметров θ . Характер зависимости $w(t; \theta)$ от θ может иметь самый общий вид: так в числе прочих элементов вектор θ может содержать:

- комплексные величины, задающие, например, амплитуду импульса;
- действительные величины, определяющие, например, его длительность, или эффективную длительность, и его смещение, как правило, меньшее по абсолютной величине периода T ;
- величины, заданные на конечном множестве, значения которых определяют форму импульса из некоторого конечного списка допустимых функциональных форм.

В ряде случаев элементы вектора параметров θ могут быть смоделированы случайными величинами, обладающими заданными вероятностными характеристиками, а их последовательность $\theta[n] = \theta_n$ формирует многомерный случайный процесс дискретного времени n .

Выбор конкретной структуры преобразования $w(t; \theta)$ позволяет обеспечить построение адекватной модели исследуемого случайного процесса, при этом оказывается удобным, при возможности, провести разделение формы импульса, периодической структуры и случайности, для представления которой используется вектор θ . В [1] показано, что для случайных процессов, имеющих структуру (1), высокую эффективность будут иметь методы построенные на основе теории циклостационарных случайных процессов [2].

Характеристикой первого порядка, используемой для описания циклических свойств СП, является переменное во времени математическое ожидание МО, представимое в виде обобщённого ряда Фурье:

$$m_x(t) = \mathbb{M}\{x(t)\} = \sum_{f \in A_1} M_x^{(f)} e^{j2\pi ft}, \quad (2)$$

где $\mathbb{M}\{\bullet\}$ обозначает математическое ожидание (МО), A_1 (альфа) – множество частот, $M_x^{(f)}$ – коэффициенты спектрального представления. Случайный процесс, получаемый при исключении постоянной составляющей $\tilde{x}(t) = x(t) - m_x(t)$, не может быть представлен моделью (2) с детерминированными коэффициентами, но его свойства могут быть описаны с использованием характеристики второго порядка [3] – двумерной корреляционной функции (ДКФ), симметричная форма которой [4] определяется как

$$\mathcal{R}_x(t, \tau) = \mathbb{M}\{\tilde{x}(t + \tau/2) \tilde{x}^*(t - \tau/2)\}. \quad (3)$$

ДКФ (3) может быть представлена в виде ряда Фурье

$$\mathcal{R}_x(t, \tau) = \sum_{\alpha \in \tilde{A}_2} \mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau) \exp(j2\pi\alpha t), \quad (4)$$

где коэффициенты $\mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau)$ – компоненты циклической корреляционной функции (ЦКФ), а \tilde{A}_2 – множество циклических частот второго порядка. Если в представлении ДКФ СП (4) присутствует единственная компонента ЦКФ $\mathcal{R}_x^{(0)}(\tau)$ на нулевой частоте, то СП является стационарным в широком смысле случайным процессом, а компонента $\mathcal{R}_x^{(0)}(\tau)$ является его одномерной корреляционной функцией (КФ) [5]. В тех случаях, когда множество \tilde{A}_2 включает в себя отличные от нуля частоты, СП является циклостационарным в широком смысле случайным процессом (ЦССП).

Преобразование Фурье (ПФ), выполняемое по переменной τ над компонентами ЦКФ, позволяет получить компоненты спектральной корреляционной функции (СКФ)

$$S_x^{(\alpha)}(f) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{R}_x^{(\alpha)}(\tau) \exp(-j2\pi f \tau) d\tau, \quad (5)$$

физический смысл которой состоит в количественном измерении корреляции спектральных составляющих процесса и подробно рассмотрен, например, в [6].

Поскольку процессы СП типа (1) относятся к классу ЦССП [7], циклические характеристики второго порядка будут эффективным инструментом при их моделировании, идентификации наблюдаемых реализаций, а также при синтезе эффективных методов их обработки. С одной стороны, такие характеристики обеспечивают выигрыш по сравнению с моделями на основе классического Фурье-анализа, что достигается за счёт перехода от случайных спектров каждой реализации к неслучайным циклическим характеристикам, описывающим свойства СП. С другой стороны, модели ЦССП будут содержать больше полезной информации по сравнению с моделями, построенными на основе стационарных в широком смысле случайных процессов и их преобразований, например, на основе одномерных спектральных трансформаций [8] или АРСС-моделей [9], при использовании которых характеристиками описания остаются классические КФ и СПМ. Здесь повышение информативности достигается за счёт того, что циклические характеристики позволяют выявить периодическую структуру (1), несмотря на случайный характер параметров, заключённых в θ .

Одним из известных методов, эффективно используемых для решения ряда проблем при исследовании стационарных случайных процессов, в частности, при описании их статистических характеристик, моделировании, генерации конечных выборок с помощью ЭВМ, является метод формирующего фильтра [10], [11]. Данный метод позволяет представить стационарный гауссовский случайный процесс с требуемой КФ как процесс на выходе фильтра, или линейной инвариантной во времени системы (ЛИВ-системы) с заданной импульсной характеристикой (ИХ). В настоящей работе предложен метод формирующего оператора, являющийся развитием метода формирующего фильтра, и позволяющий эффективно моделировать ЦССП, отвечающие модели (1), например, сигналы, получаемые прямым последовательным расширением спектра.

1. Модель последовательности импульсов

Рассмотрим пример с частный случай процесса (1), который является процессом повторения импульсов одинаковой формы со случайными амплитудами:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n g(t - nT), \quad (6)$$

где $g(t)$ представляет собой базисную функцию, описывающую форму одного импульса, а B_n суть случайные величины, в общем случае комплексные. Достаточным условием сходимости ряда (6) является объединение двух условий, типично выполнимых при построении физических моделей: существование математического ожидания и дисперсии B_n при любом n и абсолютная суммируемость ряда (6) при условии, что значения всех амплитуд положены единичными: $B_n = 1$.

Процесс $y(t)$, заданный (6), можно представить в виде свёртки:

$$y(t) = b(t) * g(t),$$

где $b(t)$ – процесс, представляющий собой последовательность дельта-функций Дирака со случайными весами B_n :

$$b(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \delta(t - nT) \quad (7)$$

Упорядоченной по индексу n последовательности (7) можно сопоставить цифровой сигнал:

$$b[n] = B_n, \quad (8)$$

отсчёты которого являются реализацией СП дискретного времени (СПДВ), в формальной записи которого индекс n будет играть роль времени.

Будем полагать, что цифровой сигнал $b[n]$ представляет собой стационарный в широком смысле СПДВ, который может быть описан МО и КФ дискретного времени. В силу стационарности процесса $b[n]$, его МО

$$m_b[n] = \mathbb{M}\{b[n]\} = \mathbb{M}\{B_n\} = M_b \quad (9)$$

является константой по отношению к дискретному времени n . Переменная часть сигнала $\tilde{b}[n]$ получается исключением его МО:

$$\tilde{b}[n] = b[n] - M_b \quad (10)$$

и соответствует временному ряду с исключённым средним: $\tilde{B}_n = B_n - M_b$.

Для описания стохастических свойств второго порядка для СПДВ можно использовать ковариационную функцию (КвФ) и корреляционную функцию (КФ). КвФ стационарного ряда $b[n]$ определяется по формуле

$$K_b[p] = \mathbb{M}\{b^*[n]b[n+p]\} = \mathbb{M}\{B_n^* B_{n+p}\},$$

не зависит от текущего времени n и является функцией временного сдвига p . Аналогично КФ стационарного ряда $b[n]$ описывает стохастические свойства процесса с исключённым средним (10):

$$R_b[p] = \mathbb{M}\{\tilde{B}_n^* \tilde{B}_{n+p}\} = K_b[p] - |M_b|^2. \quad (11)$$

В качестве иллюстрирующего примера на рисунке 1 изображён график некоторой последовательности $R_b[p]$, представляющей типичную КФ комплексного процесса (8) и обла-

дающей вследствие этого эрмитовой симметрией:

$$R_b[-p] = R_b^*[p].$$

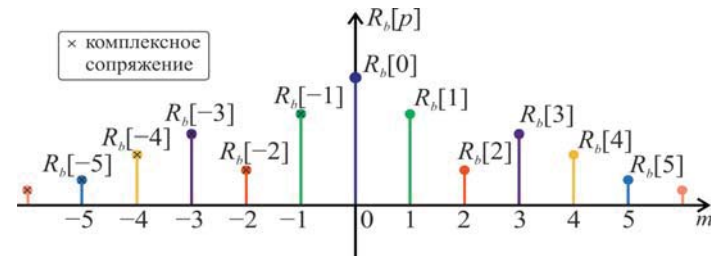


Рис. 1. Пример КФ случайной последовательности

Спектральная плотность мощности (СПМ) переменной составляющей стационарного СПДВ $\tilde{b}[n]$ связана с его КФ $R_b[p]$ посредством дискретного по времени преобразования Фурье (ДВПФ):

$$\tilde{S}_b(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_b[p] \exp(j2\pi p\phi), \quad (12)$$

где ϕ – нормированная частота, связанная с частотой f и периодом следования дельта-функций T соотношением $\phi = fT$.

В случае ненулевого среднего $M_b \neq 0$, СПМ будет определяться ДВПФ от КвФ в обобщённом смысле: непосредственно ДВПФ определяют от КФ $R_b[p]$ и дополняют результат слагаемым, отвечающим за вклад среднего значения (9):

$$S_b(\phi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_b[p] \exp(j2\pi p\phi) + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |M_b|^2 \delta(\phi - k)$$

2. Циклические свойства последовательности дельта-функций

Определим характеристики циклического описания последовательности дельта-функций $b(t)$, которые позволят получить характеристики циклического описания последовательности $y(t)$ импульсов произвольной формы. Используя определение переменной части последовательности (10), можно выполнить разложение последовательности дельта-функций $b(t)$ на две независимые составляющие, каждая из которых представляет собой также последовательность дельта-функций, следующих с тем же периодом T :

$$b(t) = m_b(t) + \tilde{b}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} M_b \delta(t - nT) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{B}_n \delta(t - nT). \quad (13)$$

Первым слагаемым в (13) записана последовательность дельта-функций с постоянными весовыми коэффициентами M_b , представляющая собой детерминированное периодическое колебание, а второе слагаемое задаёт СП с нулевым МО, циклические характеристики которого требуют отдельного исследования.

Определим КФ процесса $\tilde{b}(t)$ как функцию двух независимых переменных времени:

$$\begin{aligned} R_b(t_1, t_2) &= \mathbb{M}\left\{ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \tilde{B}_n^* \tilde{B}_m \delta(t_1 - nT) \delta(t_2 - mT) \right\} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbb{M}\left[\tilde{B}_m^* \tilde{B}_n \right] \delta(t_1 - nT) \delta(t_2 - mT) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_b[n-m] \delta(t_1 - nT, t_2 - mT). \end{aligned} \quad (14)$$

На рисунке 2 представлена двумерная диаграмма $R_b(t_1, t_2)$, где малыми кружками одного цвета проиллюстрированы положения двумерных дельта-функций с одинаковым весом. Пунктирные линии дополнительно показывают линии, вдоль которых веса дельта-функций остаются одинаковыми.

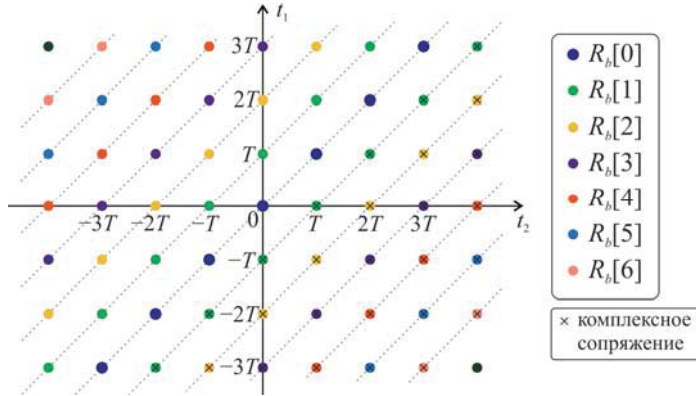


Рис. 2. КФ последовательности дельта-функций со случайными весами

Применение замены переменных

$$\begin{cases} t + \tau/2 = nT, \\ t - \tau/2 = mT, \end{cases}$$

позволяет перейти от функции двух независимых моментов времени (14) к симметричной форме (ДКФ):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_b(t, \tau) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_b[n-m] \delta\left(t - \frac{n+m}{2}T, \tau - (n-m)T\right) = \\ &= \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \sum_{q=-\infty}^{+\infty} R_b[p] \delta\left(t - qT - \frac{((p))_2 T}{2}, \tau - pT\right), \end{aligned} \quad (15)$$

где $((p))_2$ обозначает остаток от целочисленного деления p на 2. Диаграмма ДКФ $\mathcal{R}_b(t, \tau)$, представленная на рисунке 3, иллюстрирует два факта. Во-первых, вес дельта-функции на плоскости (t, τ) будет зависеть только от индекса p , связанного с переменной сдвига τ , а, во-вторых, при нечётных значениях индекса p последовательности дельта-функций будут смещены по оси текущего времени t на $T/2$.

Определим циклическую корреляционную функцию (ЦКФ) рассматриваемого процесса $b(t)$. Из структуры ДКФ (15) по переменной текущего времени t , проиллюстрированной диаграммой на рисунке 3, следует, что значения ЦКФ будут отличны от нуля только при τ , принимающих дискретные значения pT .

При любых таких значениях τ ДКФ $\mathcal{R}_b(t, \tau)$ представляет собой периодическую функцию текущего времени t с периодом T . Следовательно, ЦКФ $b(t)$ будет содержать компоненты только для циклических частот α , кратных частоте повторения $1/T$; иначе говоря, множество чистых циклических частот второго порядка может быть задано в явном виде:

$$\tilde{A}_{b2} = \{\alpha \mid \alpha = m/T, m \in \mathbb{Z}\}.$$

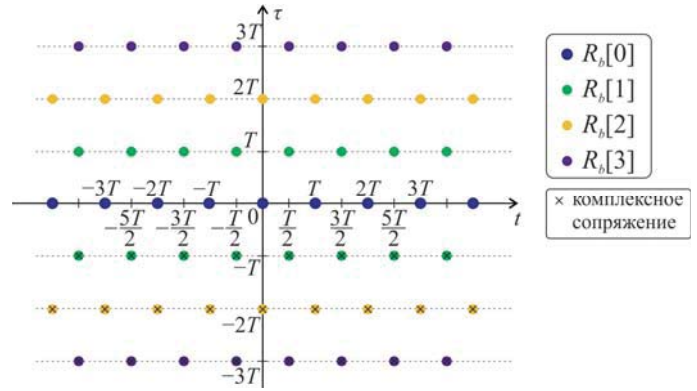


Рис. 3. ДКФ последовательности дельта-функций со случайными весами

Объединив случаи чётных и нечётных p в одном выражении, получим представление для m -ой компоненты ЦКФ:

$$\mathcal{R}_b^{(m/T)}(\tau) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{mp} R_b[p]}{T} \delta(\tau - pT). \quad (16)$$

Обратим отдельное внимание на частный случай $m = 0$, соответствующий нулевой циклической частоте $\alpha = 0$, при котором нулевая компонента ЦКФ

$$R_b(\tau) = \mathcal{R}_b^{(0)}(\tau) = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{R_b[p]}{T} \delta(\tau - pT)$$

является классической одномерной КФ процесса $b(t)$ и определяется КФ $R_b[p]$ (11) случайной последовательности $b[n]$ с точностью до множителя $1/T$, отвечающего масштабированию при переходе от безразмерного дискретного времени p к непрерывному: $\tau = pT$.

Циклическая корреляционная плотность (ЦКП) может быть представлена через компоненты ЦКФ (16) в явном виде:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_b(\alpha, \tau) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \mathcal{R}_b^{(m/T)}(\tau) \delta\left(\alpha - \frac{m}{T}\right) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{mp} R_b[p]}{T} \delta\left(\alpha - \frac{m}{T}\right) \delta(\tau - pT), \end{aligned}$$

и иллюстрирующая её диаграмма построена на рисунке 4, где с помощью окружностей дополнительно указаны те двумерные дельта-функции, вес которых должен быть умножен на -1 .

Компоненты СКФ случайной составляющей $\tilde{b}(t)$ могут быть найдены подстановкой (16) в (5):

$$\tilde{S}_b^{(m/T)}(f) = \frac{1}{T} S_b\left(Tf - \frac{((m))_2}{2}\right) \quad (17)$$

и связаны с СПМ случайной составляющей, которая определяется в соответствии с выражением (12).

Заметим, что компоненты СКФ (17) не содержат дельта-функций и являются периодическими регулярными функциями переменной частоты f , а период их повторения равен $1/T$:

$$\tilde{S}_b^{(m/T)}\left(f + \frac{1}{T}\right) = \tilde{S}_b^{(m/T)}(f).$$

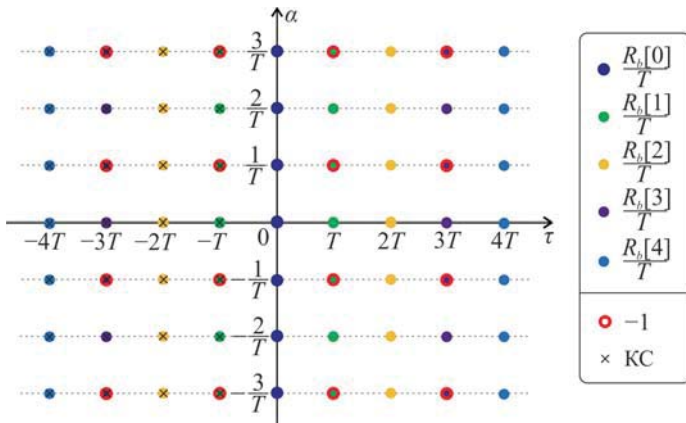


Рис. 4. Диаграмма ЦКП. Красные окружности обозначают, что вес дельта-функции должен быть взят со знаком минус, крестик обозначает комплексное сопряжение

Спектральная корреляционная плотность (СКП) случайной составляющей $\tilde{b}(t)$ может быть составлена с использованием компонент соответствующей ей СКФ (17):

$$\begin{aligned} \tilde{S}_b(\alpha, f) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \tilde{S}_b^{(m/T)}(f) \delta\left(\alpha - \frac{m}{T}\right) = \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{T} S_b\left(Tf - \frac{1}{2}((m))_2\right) \delta\left(\alpha - \frac{m}{T}\right), \end{aligned} \quad (18)$$

и представляет собой одномерные дельта-функции в виде бесконечно узких по измерению α стенок, протяжённых вдоль оси частот f .

На рисунке 5 представлена корреляционная диаграмма СКП случайной составляющей $\tilde{b}(t)$, где с помощью узких градиентных полосок изображены периодические функции частоты, иллюстрирующие периодический характер компонент СКФ на циклических частотах.

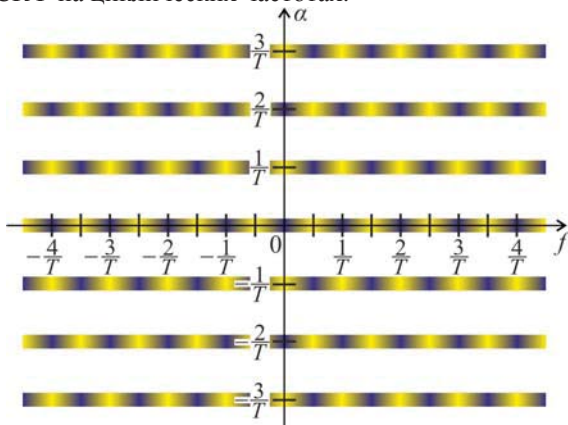


Рис. 5. Диаграмма СКП переменной части случайного процесса

Чтобы получить СКП всего процесса $b(t)$, необходимо сложить СКП детерминированной и случайной компонент, представленных в разложении (13). СКП детерминированной составляющей $m_b(t)$ может быть определена с учётом постоянного множителя M_b :

$$S_{bm}(\alpha, f) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |M_b|^2 \delta\left(\alpha - \frac{m}{T}, f - \frac{k}{T} - \frac{((m))_2}{2T}\right) \quad (19)$$

и в отличие от СКП случайной составляющей (18) она содержит двумерные дельта-функции, сосредоточенные в узлах регулярной сетки на плоскости (α, f) .

Результирующая СКП случайного процесса $b(t)$ может быть формально записана в виде суммы (18) и (19):

$$S_b(\alpha, f) = S_{bm}(\alpha, f) + \tilde{S}_b(\alpha, f), \quad (20)$$

и на рисунке 6 представлена её корреляционная диаграмма, где положения двумерных дельта-функций обозначены красными кружками. Компоненты СКФ, соответствующие СКП (20), отличны от нуля только при циклических частотах кратных $1/T$:

$$S_b^{(m/T)}(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |M_b|^2 \delta\left(f - \frac{k}{T} - \frac{((m))_2}{2}\right) + \frac{1}{T} S_b\left(Tf - \frac{((m))_2}{2}\right). \quad (21)$$

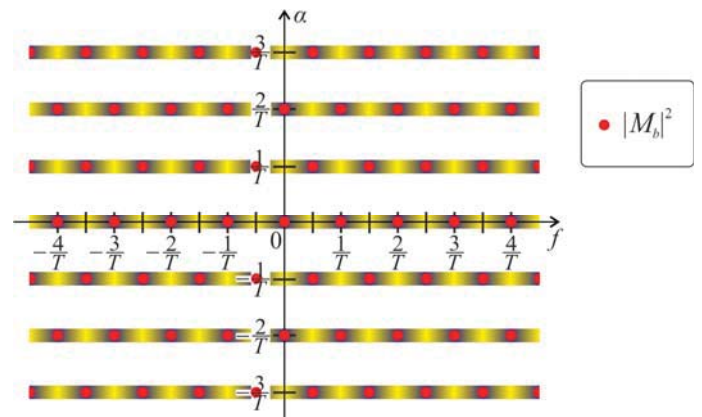


Рис. 6. Диаграмма СКП случайного процесса $b(t)$

3. Циклические характеристики последовательности дельта-функций с независимыми весами

Одельный научный интерес представляет случай, когда амплитуды B_n в (7) являются независимыми одинаково распределёнными величинами. Такой частный случай может быть получен из общего заданием параметров:

$$M_b = 0, \quad R_b[p] = R_0 \delta[p], \quad (22)$$

где R_0 является дисперсией случайной величины B_n . Такая случайная последовательность (8) формирует *дельта-коррелированный* СПДВ $b[n]$; его СПМ, как функция нормированной частоты ϕ , является константой:

$$S_b(\phi) = R_b[0] = R_0.$$

КФ (14) процесса $b(t)$ с некоррелированными весами (7) состоит только из дельта-функций, расположенных в точках, где $t_1 = t_2$:

$$R_b(t_1, t_2) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_0 \delta(t_1 - nT, t_2 - nT),$$

а в симметричной форме записи ДКФ (15) останутся только те дельта-функции, положение которых отвечает условию $\tau = 0$:

$$\mathcal{R}_b(t, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} R_0 \delta(t - nT, \tau).$$

Каждая компонента ЦКФ имеет вид дельта-функции при $\tau = 0$ с одинаковым для всех компонент весовым коэффициентом:

$$\mathcal{R}_b^{(m/T)}(\tau) = \frac{R_0}{T} \delta(\tau), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Компоненты СКФ представляют собой константы по отношению к переменной f :

$$\mathcal{S}_b^{(m/T)}(f) = \frac{R_0}{T}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (23)$$

а СКП представляет собой совокупность постоянных бесконечно протяженных по f дельта-стенок, расположенных на циклических частотах α кратных частоте повторения $1/T$:

$$\mathcal{S}_b(\alpha, f) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{R_0}{T} \delta\left(\alpha - \frac{m}{T}\right).$$

4. Метод формирующего оператора для циклостационарного процесса

Рассмотрим метод формирующего оператора для генерации ЦССП типа (6), позволяющий сформировать одновременно требуемые статистические свойства и периодическую структуру, а также получить аналитические выражения для циклических характеристик второго порядка таких процессов в форме функций двух переменных. Метод состоит из трёх последовательно выполняемых этапов, подробно рассмотренных ниже.

Первый этап состоит в формировании цифрового сигнала $b[n]$ с заданными статистическими характеристиками, которые включают в себя МО (9) и КФ (11), или СПМ, взаимно однозначно связанную с КФ с помощью ДВПФ (12).

В тех случаях, когда амплитуды импульсов в представлении (6) можно считать независимыми, в качестве такого сигнала может быть выбран дельта-коррелированный процесс дискретного времени (22), представляющий собой последовательность независимых случайных величин B_n с заданным законом распределения. В некоторых случаях, когда отсчеты $b[n]$ нельзя считать статистически независимыми, может быть известен многомерный закон, описывающий совместные вероятностные свойства заданного количества последовательных отсчетов $b[n]$; это позволяет определить МО и КФ как первый начальный и второй центральный моменты соответственно. В тех случаях, когда $b[n]$ представляет собой коррелированный стационарный гауссовский процесс, он может быть сформирован фильтрацией дельта-коррелированной последовательности цифровым фильтром с известной импульсной характеристикой.

На **втором этапе** на основе последовательности $b[n]$ должен быть сформирован случайный дельта-процесс $b(t)$ в соответствии с (7).

Циклические характеристики первого и второго порядка такого процесса могут быть найдены по известным характеристикам дискретного сигнала $b[n]$. Так, компоненты ЦКФ $\mathcal{R}_b^{(m/T)}(\tau)$ рассчитываются по формуле (16) на основе отсчетов КФ последовательности $R_b[p]$. Компоненты СКФ ЦССП с учётом его МО определяются в соответствии (21) по известным функциям, описывающим МО и СПМ после-

довательности $b[n]$ (8).

На **третьем этапе** производится фильтрация процесса $b(t)$ с помощью ЛИВ-системы с ИХ, которая определяется формой импульса $g(t)$.

МО процесса $y(t)$ может быть найдена по известному МО процесса $b(t)$ непосредственно с помощью свёртки:

$$m_y(t) = m_b(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} m_b(\tau) g(t - \tau) d\tau.$$

СКФ процесса на выходе $y(t)$ ЛИВ-системы, связана покомпонентно с СКФ ЦССП $b(t)$ на её входе соотношением:

$$\mathcal{S}_y^{(\alpha)}(f) = \mathcal{S}_b^{(\alpha)}(f) \mathcal{S}_g^{(\alpha)}(f), \quad (24)$$

в котором циклическая передаточная функция $\mathcal{S}_g^{(\alpha)}(f)$ определяется произведением

$$\mathcal{S}_g^{(\alpha)}(f) = G\left(f + \frac{\alpha}{2}\right) G^*\left(f - \frac{\alpha}{2}\right),$$

где $G(f)$ представляет собой частотную характеристику ЛИВ-системы, определяемую с помощью ПФ от $g(t)$.

5. Пример анализа СКФ

Рассмотрим в качестве примера, иллюстрирующего применение предложенного метода, формирование действительного ЦССП, соответствующего модели (6). Цифровой сигнал $b[n] = B_n$ представляет собой последовательность независимых равновероятных бинарных символов, принимающих значения $+1$ и -1 и промодулированных кодирующим импульсом $g(t)$, имеющим следующую структуру:

$$g(t) = A_g \sum_{n=0}^{N-1} G_n \operatorname{rect}\left(\frac{t - nT_c - \tau_c/2}{\tau_c}\right), \quad (25)$$

где A_g – амплитудный множитель кодового импульса, N – длина последовательности $g[n] = G_n$, задающая число импульсов прямоугольной формы в импульсе $g(t)$, τ_c – длительность одного простого прямоугольного импульса, T_c – период следования простых импульсов равный длительности простого импульса: $T_c = \tau_c$. Период следования символьных импульсов T в модели (6) выбран равным длине импульса $g(t)$, или $T = NT_c$.

Типичная реализация такого сигнала представлена на рис. 7 (а), где дополнительно обозначены границы символов. Для наглядности иллюстрации в настоящей работе выбрана короткая последовательность Баркера [12] $g[n] = \{1, 1, 1, -1, 1\}$, длительность которой равна пяти ($N = 5$).

Также в качестве сравнения на рисунке 7 (б) представлена реализация ЦССП $x(t)$, представляющая последовательность простых импульсов прямоугольной формы с независимыми равновероятными случайными амплитудами $\pm A_g$, для которой период следования импульсов выбран равной его длительности.

Применение предложенного метода формирующего оператора с использованием выражения (24) для компонентов СКФ некоррелированной последовательности (23) позволяет записать формально компоненты СКФ исследуемого процесса:

$$S_y^{(m/T)}(f) = \frac{1}{T} G\left(f + \frac{m}{2T}\right) G^*\left(f - \frac{m}{2T}\right), \quad (26)$$

где $G(f)$ представляет ПФ (25):

$$G(f) = A_g \tau_c \operatorname{sinc}(\pi f \tau_c) e^{-j\pi f \tau_c} \sum_{n=0}^{N-1} G_n e^{-j2\pi n f \tau_c}. \quad (27)$$

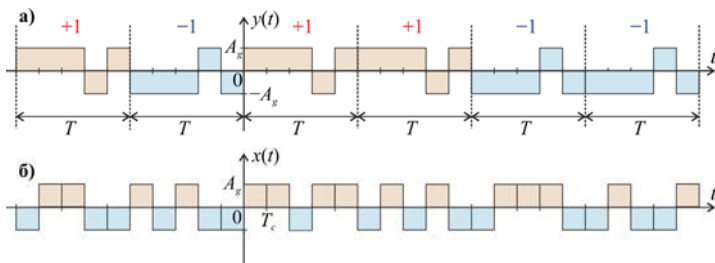


Рис. 7. Типичная реализация ЦССП: (а) последовательность, построенная с использованием кода Баркера, (б) последовательность прямоугольных импульсов со случайными амплитудами

Для визуализации характеристик модели процесса были выбраны следующие значения параметров: $A_g = 3$ В, $T_c = \tau_c = 0,1$ мкс, $T = NT_c = 0,5$ мкс.

На рисунке 8 изображён трёхмерный график абсолютных значений нулевой и первых 15 компонент СКФ (26) процесса с кодовой модуляцией.

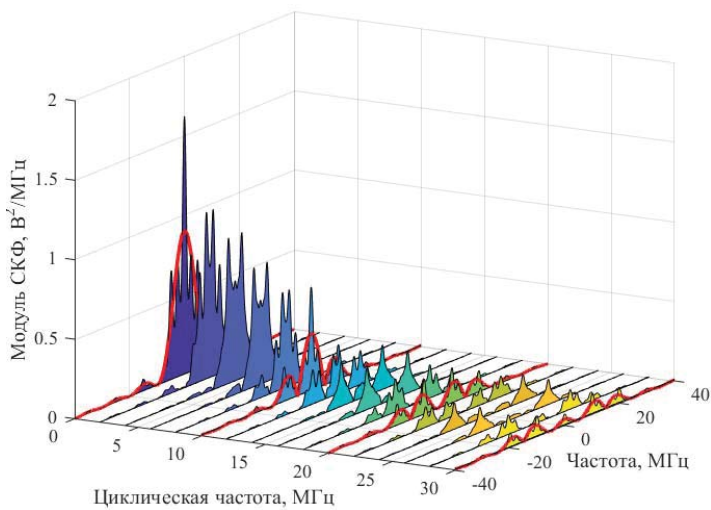


Рис. 8. Компоненты СКФ процесса с кодовой модуляцией (сплошные фигуры) и прямоугольных импульсов со случайными амплитудами (красные линии)

По оси абсцисс графика отложена циклическая частота α , по оси ординат – частота f . Компоненты СКФ, являющиеся функциями частоты f расположены на равномерной сетке циклических частот $\alpha = m/T, m \in \mathbb{Z}$, где $1/T = 2$ МГц, и представлены на графике в виде плоских фигур, каждая из которых ориентирована вдоль прямой линии, параллельной оси частот и соответствующей циклической частоте m/T . Поскольку для действительного ЦССП компоненты СКФ на отрицательных циклических частотах связаны симметрией:

$$S_y^{(-\alpha)}(f) = [S_y^{(\alpha)}(-f)]^* = [S_y^{(\alpha)}(f)]^*,$$

в силу которой модули компонент СКФ для противоположных по знаку циклических частот равны, на графике представлены компоненты СКФ, соответствующие только положительным циклическим частотам.

Для сравнения на том же графике на рисунке 8 в виде красных линий представлены абсолютные значения компонент СКФ последовательности прямоугольных импульсов со случайными амплитудами [13], расположенные на циклических частотах кратных $1/T_c = N/T$:

$$S_x^{(m/T_c)}(f) = A_g^2 \tau_c \operatorname{sinc}[\pi(f\tau_c - m/2)] \times \operatorname{sinc}[\pi(f\tau_c + m/2)] \exp(-j\pi m).$$

Анализируя график на рисунке 8, необходимо отметить, что СКФ каждого из рассматриваемых ЦССП содержит компоненты на циклических частотах кратных $F_c = 1/T_c$ – частоте следования элементарных импульсов. Однако, принципиальное отличие двух СКФ, состоит в том, что только СКФ последовательности, модулированной кодом Баркера, содержит компоненты на всех циклических частотах, кратных $1/T = F_c/N$ – частоте следования символов со случайными амплитудами. В качестве физической интерпретации данного различия двух СКФ можно привести следующее. В последовательности элементарных импульсов, типичная реализация которых представлена на рисунке 7 (б), амплитуды любых двух импульсов статистически независимы. В модулированной последовательности, типичная реализация которой представлена на рисунке 7 (а), элементарные импульсы группируются в N последовательных элементов, объединённых структурой символического кода (25). Структурный период ЦССП будет определяться периодом следования символов $T = NT_c$, внося в её СКФ компоненты, отсутствующие в последовательности элементарных импульсов со случайными амплитудами.

Выполним визуальное сравнение нулевой, первой и второй компонент СКФ процесса $x(t)$, расположенных на циклических частотах кратных F_c , и компонент процесса $y(t)$, расположенных на тех же циклических частотах. На рисунке 9 представлены СПМ, или компоненты СКФ на нулевой циклической частоте, сравниваемых процессов, на рисунке 10 представлены компоненты на циклической частоте $F_c = 5F$, а на рисунке 11 – на циклической частоте $2F_c = 10F$.

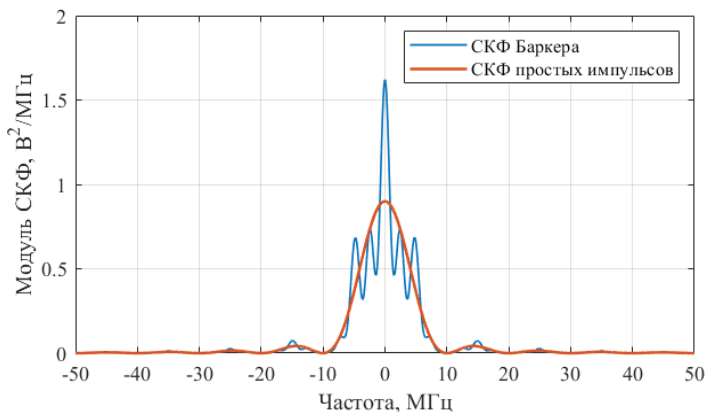


Рис. 9. СПМ, или компоненты СКФ на нулевой циклической частоте

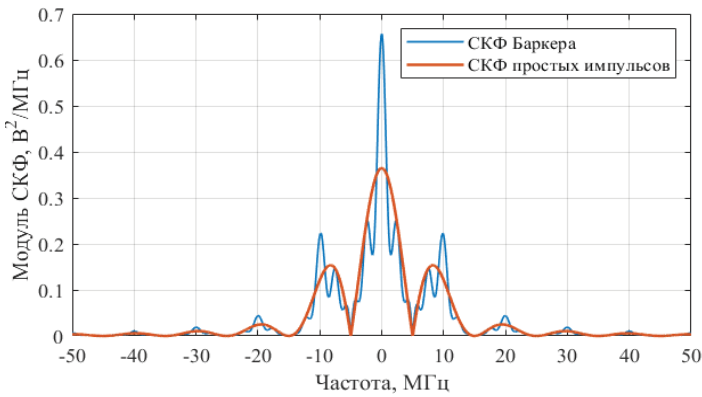


Рис. 10. Компоненты СКФ на циклической частоте $1/T_c$

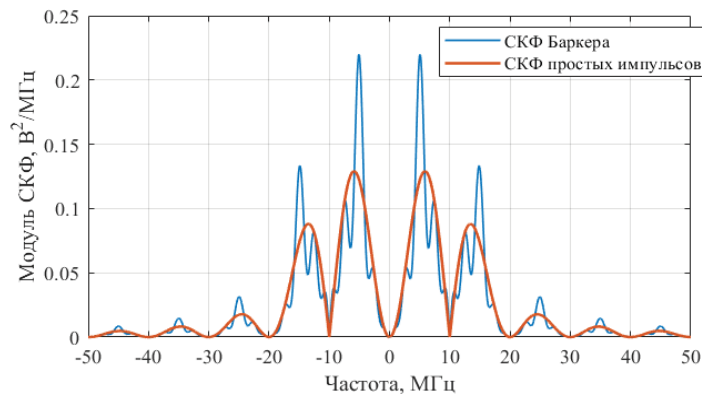


Рис. 11. Компоненты СКФ на циклической частоте $2/T_c$

Сопоставив модули компонент СКФ двух сравниваемых ЦССП, можно заметить выраженное сходство: функции имеют лепестковую структуру, при этом ширина лепестка обратно длительности элементарного импульса, за исключением центрального лепестка СПМ, ширина которого в два раза больше.

Однако компоненты модули СКФ кодированного ЦССП имеют изрезанный вид в силу колебательного характера (26), обусловленного формируемой частотной характеристикой (27).

Заключение

Предложенный в статье метод формирующего оператора для моделирования ЦССП импульсного типа состоит в формировании элементарного процесса, обладающего циклостационарными свойствами, и его последующего преобразования с использованием ЛИВ-системы с известной ИХ. В качестве элементарного ЦССП предложена последовательность дельта-функций Дирака, следующих равномерно во времени с постоянным шагом, формирующим структурную периодичность моделируемого процесса; при этом весовые множители дельта-функций моделируются как независимые одинаково распределенные случайные величины. Прохождение такой последовательности через ЛИВ-систему позволяют получить ЦССП с заданными спектральными свойствами, которые могут быть компактно описаны с помощью СКФ.

Выявленное в представленном в работе примере различие СКФ двух ЦССП может быть использовано как информационный признак, позволяющий выполнить различение процессов, имеющих в своей структуре модулирующие кодовые импульсы, и процессов, представляющих последовательности элементарных импульсов со случайными ампли-

тудами. В тех случаях, когда время наблюдения реализаций ЦССП будет коротким, или в присутствии шумов подобные детали компонент СКФ могут быть сглажены или искажены. Поэтому такой признак, как различие форм СКФ для двух ЦССП с одинаковой длительностью элементарного импульса нельзя считать надежным признаком в практических задачах. Напротив, присутствие компонент СКФ не только на циклических частотах, кратных частоте следования элементарных импульсов, но и на дольных циклических частотах, кратных частоте следования символов кода, является признаком того, что сигнал сформирован с использованием методов прямого расширения спектра. Дальнейшее развитие предложенных в настоящей статье подходов может быть проведено при решении задач, направленных на построение эффективных протоколов связи в системах когнитивного радио, в задачах контроля радиочастотного ресурса и его использования вторичными потребителями, в алгоритмах обработки сигналов в радиолокационных системах в условиях существенного перекрытия сигналов и помех одновременно во временной и частотной областях.

Финансирование

Работа выполнена в рамках государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации: проект № FSFF-2020-0015.

Литература

1. Gardner W.A. Cyclostationarity in communications and signal processing. IEEE Press. 1994. 506 p.
2. Napolitano A. Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. Academic Press. 2019 DOI: 10.1016/C2017-0-04240-4
3. Шевзунов Т.Я., Основные характеристики циклостационарного описания случайных процессов на примере последовательности импульсов со случайными амплитудами // Радиотехнические и телекоммуникационные системы. Муром: ВлГУ. 2019. № 2 (34). С. 30-40.
4. Шевзунов Т.Я. Симметричные и общие формы двумерной корреляционной функции и циклической корреляционной функции нестационарных случайных процессов // Радиотехника. М.: Радиотехника. 2019. № 3. С. 33-38.
5. Хищенко В.И. Случайные данные: структура и анализ. М.: Техносфера. 2018. 424 с.
6. Ефимов Е.Н., Шевзунов Т.Я. Циклостационарные модели радиосигналов с квадратурной амплитудной модуляцией // Электросвязь. М.: Инфо-Электросвязь. 2016. №11. С. 65-71
7. Gardner W.A. Statistical spectral analysis: A non-probabilistic theory. 1st ed. Prentice Hall. 1988. 591 p.
8. Sondhi M.M. Random Processes with Specified Spectral Density and First-Order Probability Density // The Bell System Technical. vol 62, no. 3. March 1983. P. 679-701. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1983.tb04411.x.
9. Kay S.A. Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume III: Practical algorithm development. Pearson. 2017. 504 p.
10. Васильев К.К., Служивый М.Н. Математическое моделирование систем связи: учебное пособие. Ульяновск: УлГТУ, 2008. 170 с.
11. Прохоров С.А. Математическое описание и моделирование случайных процессов. Самара: СГАУ, 2001. 209 с.
12. Barker R. H. Group Synchronizing of Binary Digital Systems // Communication Theory. London: Butterworth. 1953. P. 273-287.
13. Шевзунов Т.Я., Шевцов В.А., Петраков А.М., Бородин В.В., Циклостационарные модели инфокоммуникационных сигналов с амплитудно-импульсной модуляцией // Электросвязь. М.: Инфо-Электросвязь. 2019. № 7. С. 63-67.

SHAPING OPERATOR TECHNIQUE FOR MODELLING CYCLOSTATIONARY RANDOM PROCESSES

Timofey Ya. Shevgunov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, shevgunov@gmail.com

Abstract

The paper proposes the shaping operator technique for modelling cyclostationary random process (CSRP) which belong to the class of second-order processes being described by the parametric pulse train model. Generating CSRP is expressed as the propagation result of the specially chosen elementary CSRP through the linear time-invariant system with a known impulse response. The paper describes the approach to forming the elementary CSRP based on the train made of Dirac delta-function uniformly following in time domain with constant step and defining the desired structural periodicity of the process being modelled. The analytical expressions for the main characteristics used for describing cyclostationary properties of the elementary process, including two-dimensional, cyclic and spectral correlation functions, were obtained. In addition to the case of the elementary CSRP with correlated weighting coefficients of delta-functions, the case of statistically independent coefficients was considered. It was shown that utilization of the spectral correlation function (SCF) for describing the cyclic property reveals the explicit analytical relation between characteristics of the elementary and modelled CSRPs provided the filter frequency response is known. The paper presents the comparative example which describes the modelling of two CSRPs: one of them was chosen as the train of rectangle pulses which is pulse amplitude modulated by stationary random time series, while the other is considered as a signal formed by the method of direct sequence spread spectrum. The chosen short-length Barker sequence as the code allowed performing visual comparison between absolute value of SCF components taken at the cyclic frequencies multiple of the chip frequency and cyclic frequencies multiple of the symbol frequency. The future development of the methods proposed in the paper opens the road to improving the performance of modern radar and telecommunication systems by means of utilizing cyclic frequencies which are non-random parameters describing the structural properties of signals under processing.

Keywords: cyclostationarity, spectral correlation function, code modulation, shaping operator, direct-sequence spread spectrum.

References

1. W.A. Gardner (1994). Cyclostationarity in communications and signal processing. IEEE Press. 506 p.
2. A. Napolitano (2019). Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. Academic Press. DOI: 10.1016/C2017-0-04240-4
3. T.Ya. Shevgunov (2019) The main characteristics of the cyclostationary representation of random processes by example of a pulse train with random amplitudes. *Radio and telecommunication systems*. No. 2 (34). P. 30-40.
4. T.Ya. Shevgunov (2019) Symmetric and general forms of the two-dimensional and cyclic autocorrelation functions of non-stationary random processes. *Radiotekhnika*. No 3. P. 33-38.
5. V.I. Khimenko (2018) Random data: structure and analysis. Moscow: Technosphere. 424 p.
6. E.N. Efimov, T.Ya. Shevgunov (2016). Cyclostationary models of radio signals with quadrature amplitude modulation. *Electrosvyaz*. No. 11. P. 65-71
7. W.A. Gardner (1988). Statistical spectral analysis: A non-probabilistic theory. 1st ed. Prentice Hall. 591 p.
8. M.M. Sondhi (1983). Random Processes with Specified Spectral Density and First-Order Probability Density. *The Bell System Technical*. Vol 62, No. 3. P. 679-701. DOI: 10.1002/j.1538-7305.1983.tb04411.x.
9. S.A. Kay (2017). Fundamentals of Statistical Signal Processing, Volume III: Practical algorithm development. Pearson. 504 p.
10. K.K. Vasiliev, M.N. Sluzhiviyi (2008). Mathematical modelling of communication systems: textbook. Ulyanovsk: ULSTU. 170 p.
11. S.A. Prokhorov (2001). Mathematical description and modelling of random processes. Samara: SSAU. 209 p.
12. R. H. Barker (1953) Group Synchronizing of Binary Digital Systems. *Communication Theory*. London: Butterworth. P. 273-287.
13. T.Ya. Shevgunov, V.A. Shevtsov, A.M. Petrakov, V.V. Borodin (2019). Cyclostationary models of infocommunication signals with pulse amplitude modulation. *Electrosvyaz*. No. 7. P. 63-67

Information about author:

Timofey Ya. Shevgunov, Ph.D. (candidate of technical sciences), associate professor, Theoretical Radio Engineering department, Moscow Aviation Institute (National Research University) "MAI", Moscow, Russia