

РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ВОЛН НА ФРАКТАЛОПОДОБНЫХ ТЕЛАХ МЕТОДОМ ДИАГРАММНЫХ УРАВНЕНИЙ

DOI: 10.36724/2072-8735-2021-15-9-4-10

Manuscript received 12 April 2021;
Accepted 28 May 2021

Давыдов Алексей Сергеевич,
МТУСИ, Москва, Россия

Демин Дмитрий Борисович,
МТУСИ, Москва, Россия,
dbdemin@gmail.com

Крысанов Дмитрий Владимирович,
МТУСИ, Москва, Россия,
dbdemin@gmail.com

*Работа выполнена при частичной поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований (проект № 19-02-00654а)*

Ключевые слова: метод диаграммных уравнений,
метод продолженных граничных условий,
фракталоподобные тела, диаграмма рассеяния,
оптическая теорема, треугольник, снежинка Коха

Рассматривалось решение двумерной задачи дифракции волн на бесконечном цилиндре сложного поперечного сечения методом диаграммных уравнений (МДУ). В качестве геометрий сечений цилиндра были выбраны треугольник и снежинка Коха I-й итерации. Кратко изложены численные алгоритмы МДУ для одиночного рассеивателя и для группы тел с условием Дирихле на их границе и приведено сравнение результатов численных расчетов характеристик рассеяния для указанных выше геометрий, полученных при помощи МДУ и метода продолженных граничных условий (МПГУ). Для проверки сходимости численного алгоритма в обоих методах использовалась оптическая теорема. Установлены границы применимости МДУ для фракталоподобных рассеивателей. Показано, что для всех выпуклых тел алгоритм МДУ достаточно устойчив и позволяет получать результаты расчета с приемлемой на практике точностью. В случае невыпуклого тела, а именно – снежинки Коха, алгоритм МДУ для одиночного рассеивателя оказывается неустойчивым и приемлемая точность может быть получена только если рассматривать данную геометрию как группу тел, составленную из выпуклых геометрий (например, треугольников).

Информация об авторах:

Давыдов Алексей Сергеевич, выпускник направления 01.03.04 "Прикладная математика" (2020), Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Демин Дмитрий Борисович, доцент кафедры "теории вероятностей и прикладной математики", к.ф.-м.н., доцент, Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Крысанов Дмитрий Владимирович, аспирант, ассистент кафедры "теории вероятностей и прикладной математики", Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Для цитирования:

Давыдов А.С., Демин Д.Б., Крысанов Д.В. Решение двумерной задачи дифракции волн на фракталоподобных телах методом диаграммных уравнений // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2021. Том 15. №9. С. 4-10.

For citation:

Davydov A.S., Demin D.B., Krysanov D.V. (2021) Solution of the two-dimensional wave diffraction problem on fractal bodies by the pattern equations method. T-Comm, vol. 15, no.9, pp. 4-10. (in Russian)

Введение

В работе впервые рассматривается применение метода диаграммных уравнений (МДУ) к задаче рассеяния на телах с изломами границы и фракталоподобных телах. Для простоты была выбрана двумерная задача рассеяния на цилиндрических одиночных телах и на группе тел, имеющих изломы, с краевым условием Дирихле на их границе.

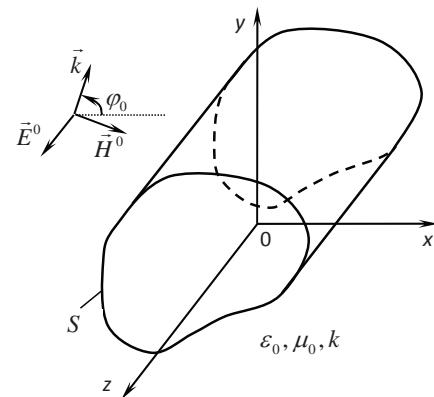
МДУ, впервые предложенный в работе [1], впоследствии был применен к широкому кругу задач дифракции, рассеяния и распространения волн, как на одиночном теле, так и на группе тел [2-4]. Последние работы по МДУ были посвящены разработке методики усреднения в методе и сравнению результатов расчета с теми, что получаются при помощи усреднения в методе Т-матриц [5-7]. Ранее МДУ уже применялся для исследования характеристик рассеяния на трехмерных телах с изломами границы, но фракталоподобные тела не рассматривались [8].

В недавних работах [9-10] показано применение другого известного и хорошо себя зарекомендовавшего метода теории дифракции и рассеяния: метода продолженных граничных условий (МПГУ), для поиска характеристик рассеяния (в том числе и усредненных) для фракталоподобных частиц. Подобные тела относятся к нерэлеевским телам. Рэлеевскими телами называются такие тела, у которых все особенности аналитического продолжения дифракционного поля лежат внутри сферы (в двумерном случае – круга) вписанной в рассеиватель. Этот класс геометрий тел является достаточно узким. Даже многие выпуклые тела могут быть как рэлеевскими, так и нерэлеевскими. Например, эллипс является рэлеевской геометрией только если соотношение его полуосей не превышает $\sqrt{2}$ (см. подробнее в [4], [11]). Многие численные методы теории дифракции, например, МТМ, практически не применимы к таким телам. Поэтому поставленная в работе задача остается достаточно актуальной, а именно: требуются достаточно простые, универсальные и надежные методы поиска характеристик рассеяния практически для любых сложных геометрий рассеивателей.

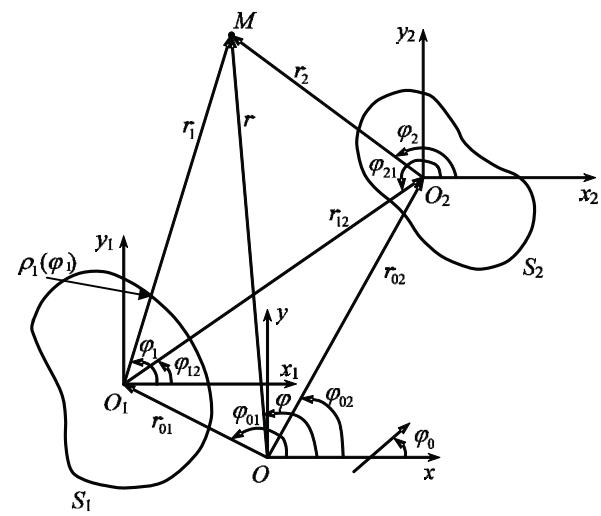
В качестве примеров тел со сложной геометрией границы в двумерном случае были рассмотрены: треугольник и снежинка Коха 1-й итерации [9]. Причем расчеты для снежинки Коха проводились как при помощи алгоритма МДУ для одиночного тела, так и для группы тел, когда снежинка Коха составлялась из четырех примыкающих друг к другу треугольников.

Постановка задачи

Рассмотрим постановку двумерной скалярной задачи рассеяния волн одновременно как на одиночном теле, так и на группе тел. Пусть вектор электрической напряженности $\vec{E}(\vec{r})$ имеет единственную составляющую, параллельную оси симметрии Oz (бесконечного) цилиндрического тела с гладкой направляющей S (см. рис.1а). Введем обозначение:



а) одиночное тело



б) группа тел

Рис. 1. Геометрия задачи

$$\vec{E}(\vec{r}) = u(\vec{r}) \cdot \vec{i}_z, \quad (1)$$

где $u(\vec{r}) = E_z(\vec{r}) = u = u^0 + u^1$ – полное (скалярное) поле вне цилиндрического тела (т.е., вне границы S). Здесь u^0 – первичное (падающее) поле, а u^1 – вторичное (рассеянное или дифракционное) поле, которое, как известно, удовлетворяет однородному волновому уравнению Гельмгольца

$$\Delta u^1 + k^2 u^1 = 0, \quad (2)$$

в котором $k = \omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ – волновое число во внешней среде, и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности. ϵ_0 и μ_0 – абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости во внешней среде.

В случае задачи дифракции на группе тел, рассматривалась падение поля $u^0(\vec{r})$ источников на N цилиндрических тел с направляющими S_j , $j = \overline{1, N}$ (см. рис.1б). В этом случае, полное поле u вне границ S_j представляется в виде:

$$u = u^0 + u_1^1 + u_2^1 + \dots + u_N^1, \quad (3)$$

где u_j^1 – вторичное (дифракционное) поле j -го тела ($j = \overline{1, N}$), которое всюду вне границы S_j удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца, аналогичному формуле (2), но для каждого из полей u_j^1 , а также условию излучения Зоммерфельда на бесконечности.

Для обеих задач рассеяния будем предполагать, что на границе тел выполняется краевое условие Дирихле, т.е.

$$u|_S = 0. \quad (4)$$

Кроме того, для каждого из N тел в случае рассеяния на нескольких телах можно записать условие Дирихле в следующем виде:

$$u_j|_{S_j} = 0, \quad j = \overline{1, N}, \quad (5)$$

где $u_j = u_j^0 + u_j^1$ – полное поле вне j -го тела; u_j^0 – первичное поле u^0 , записанное в координатах j -го тела. Для электромагнитной задачи дифракции краевые условия (4)-(5) соответствуют идеально проводящим краевым условиям на границе, а уравнение (1) – случаю Е-поляризации.

Формулировка МДУ

Основным моментом при решении поставленной выше краевой задачи (здесь (1)-(5)) при помощи МДУ является сведение ее к интегральному уравнению относительно диаграммы рассеяния, т.е. спектральной функции волнового поля, определяющей рассеянное поле в так называемой дальней зоне.

Следуя работам [1], [3], [4] и [11], искомое интегральное уравнение в случае одиночного рассеивателя с учетом краевого условия (4) на границе S в полярной системе координат (r, φ) будет иметь вид:

$$g(\alpha) = g^0(\alpha) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2-i\infty}^{\pi/2+i\infty} g(\varphi + \psi) \frac{k}{4} [\rho(\varphi) \cos \psi - \rho'(\varphi) \sin \psi] \times \quad (6)$$

$$\times \exp(-ik\rho(\varphi)(\cos \psi - \cos(\alpha - \varphi))) d\psi d\varphi,$$

где

$$g^0(\alpha) = \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \left(\rho(\varphi) \frac{\partial u^0}{\partial r} - \frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} \right) \exp(ik\rho(\varphi) \cos(\alpha - \varphi)) d\varphi. \quad (7)$$

В уравнениях (6)-(7): $r = \rho(\varphi)$ – уравнение контура S в полярной системе координат; $g(\varphi)$ – диаграмма рассеяния волнового поля u^1 .

Аналогично, в случае группы тел, придем к следующей системе интегро-дифференциальных уравнений относительно диаграмм рассеяния $g_j(\varphi)$ ($j = \overline{1, N}$) каждого из тел:

$$g_j(\alpha) = g_j^0(\alpha) + \frac{k}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} [\rho_j(\varphi_j) \cos \psi - \rho'_j(\varphi_j) \sin \psi] g_j(\varphi_j + \psi) \cdot \exp(-ik\rho_j(\varphi_j) \cos \psi + ik\rho_j(\varphi_j) \cos(\alpha - \varphi_j)) d\psi d\varphi_j + \quad (8)$$

$$+ \sum_{l=1}^N (1 - \delta_{jl}) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \exp(ik\rho_l(\varphi_j) \cos(\alpha - \varphi_j)) \cdot D_j \int_0^{2\pi} g_l(\varphi_l + \psi) \exp(-ikr_l \cos \psi) d\psi d\varphi_j;$$

$$g_j^0(\alpha) = \int_0^{2\pi} v_j^0(\varphi_j) \exp(ik\rho_j(\varphi_j) \cos(\alpha - \varphi_j)) d\varphi_j, \quad (9)$$

$$v_j^0(\varphi_j) = \frac{i}{4} \left(\rho_j(\varphi_j) \frac{\partial u_j^0}{\partial r_j} - \frac{\rho'_j(\varphi_j)}{\rho_j(\varphi_j)} \frac{\partial u_j^0}{\partial \varphi_j} \right) \Big|_{r_j=\rho_j(\varphi_j)} \equiv D_j u_j^0, \quad (10)$$

$$j = \overline{1, N}$$

в которой $r_j = \rho_j(\varphi_j)$ – уравнение границы S_j j -го тела в полярной системе координат.

Как видно из формул (7) и (9), функции $g^0(\alpha)$ и $g_j^0(\alpha)$ полностью определяются через первичное поле u^0 . Интегральные уравнения (6) и (8) являются основополагающими в МДУ, именно их вид и дает название самому методу.

Дальнейшей нашей целью является получение численного алгоритма МДУ. Этого можно добиться при помощи алгебраизации исходной краевой задачи (или диаграммного уравнения). Существует несколько способов алгебраизации, т.е. сведения интегральных уравнений поля к алгебраической системе уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения искомых функций в ряды. Один из таких способов состоит в следующем.

Рассматривая одиночный рассеиватель, подставим в уравнения (6)-(7) разложения функций $g(\alpha)$ и $g^0(\alpha)$ в ряды Фурье вида:

$$g(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m i^m e^{im\varphi}, \quad g^0(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^0 i^m e^{im\varphi}. \quad (11)$$

В результате придем к следующей алгебраической системе уравнений МДУ (см.[1]):

$$c_m = c_m^0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{G}_{mn} c_n, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (12)$$

где

$$\tilde{G}_{mn} = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left(ik\rho(\varphi) H_n^{(2)}(k\rho(\varphi)) + n \frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)} H_n^{(2)}(k\rho(\varphi)) \right) J_m(k\rho(\varphi)) e^{i(n-m)\varphi} d\varphi, \quad (13)$$

$$c_m^0 = \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} \left(\rho(\varphi) \frac{\partial u^0}{\partial r} - \frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)} \frac{\partial u^0}{\partial \varphi} \right) J_m(k\rho(\varphi)) \exp(-im\varphi) d\varphi. \quad (14)$$

В случае, если первичное поле – плоская волна, т.е.

$$u^0(r, \varphi) = \exp(-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)), \quad (15)$$

(φ_0 – угол падения плоской волны относительно оси Ox) то

$$c_m^0 = \frac{k}{4} \int_0^{2\pi} [\rho(\varphi) \cos(\varphi - \varphi_0) + \rho'(\varphi) \sin(\varphi - \varphi_0)] J_m(k\rho(\varphi)) e^{-ik\rho(\varphi)\cos(\varphi-\varphi_0)-im\varphi} d\varphi. \quad (14a)$$

Функции J_m и $H_n^{(2)}$ в (13)-(14) являются цилиндрическими функциями Бесселя и Ганкеля второго рода различных порядков.

Аналогично, в случае группы тел, подставляя в (8)-(10) разложения функций $g_j(\alpha)$ и $g_j^0(\alpha)$ в ряды Фурье:

$$g_j(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{jn} e^{in\alpha}; \quad g_j^0(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{jn}^0 e^{in\alpha}; \quad (16)$$

и учитывая, что первичное поле есть плоская волна, т.е.

$$u_j^0 = \exp(-i\vec{k}\vec{r}_{0j}) \cdot \exp(-ikr_j \cos(\varphi_j - \varphi_0)), \\ \vec{k}\vec{r}_{0j} = kr_{0j} \cos(\varphi_0 - \varphi_{0j}), \quad (17)$$

придем к следующей алгебраической системе МДУ (см. [3]):

$$a_{jn} = a_{jn}^0 + \sum_{l=1}^N \sum_{m=-\infty}^{\infty} G_{nm}^{jl} a_{lm}; \quad j = \overline{1, N}, \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \quad (18)$$

где

$$G_{nm}^{jj} = \frac{i^{n-m+1}}{4} \int_0^{2\pi} \left[k\rho_j(\varphi_j) H_m^{(2)'}(k\rho_j(\varphi_j)) - im \frac{\rho'_j(\varphi_j)}{\rho_j(\varphi_j)} H_m^{(2)}(k\rho_j(\varphi_j)) \right] \cdot J_n(k\rho_j(\varphi_j)) \cdot \exp(i(m-n)\varphi_j) d\varphi_j, \quad j = \overline{1, N}; \quad (19)$$

$$G_{nm}^{jl} = \frac{i^{n-m+1}}{4} \sum_{p=-\infty}^{\infty} H_{m-p}^{(2)}(kr_{lj}) \exp(i(m-p)\varphi_{lj}) \cdot \int_0^{2\pi} \left[k\rho_j(\varphi_j) J_p'(k\rho_j(\varphi_j)) - ip \frac{\rho'_j(\varphi_j)}{\rho_j(\varphi_j)} J_p(k\rho_j(\varphi_j)) \right] \cdot J_n(k\rho_j(\varphi_j)) \cdot \exp(i(p-n)\varphi_j) d\varphi_j, \quad j \neq l, \quad j, l = \overline{1, N}; \quad (20)$$

$$a_{jn}^0 = \frac{i^n k}{4} \exp(-i\vec{k}\vec{r}_{0j}) \int_0^{2\pi} [\rho_j(\varphi_j) \cos(\varphi_j - \varphi_0) + \rho'_j(\varphi_j) \sin(\varphi_j - \varphi_0)] \cdot J_n(k\rho_j(\varphi_j)) \cdot \exp(-in\varphi_j - ik\rho_j(\varphi_j) \cos(\varphi_j - \varphi_0)) d\varphi_j, \quad j = \overline{1, N}. \quad (21)$$

В соотношениях (19)-(21) r_{lj} – расстояния между l -м и j -м рассеивателями; φ_{lj} – полярный угол в l -ой системе координат начала координат (центра O_j) j -го тела; (r_{0j}, φ_{0j}) – полярные координаты центра O_j в некоторой общей системе координат (см. рис.1б).

Вычисление диаграммы рассеяния $g(\varphi)$ всей группы из N тел нужно проводить по формуле

$$g(\varphi) = \sum_{j=1}^N g_j(\varphi) \exp(ikr_{0j} \cos(\varphi - \varphi_{0j})) \quad (22)$$

Численные результаты

При численном решении с использованием предложенного алгоритма МДУ, ряды в (11) и (16) усекаются, в результате этого системы (12) и (18) становятся конечными и принимают следующий вид:

$$c_m = c_m^0 + \sum_{n=-N'}^{N'} \tilde{G}_{mn} c_n, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, N', \quad (12a)$$

$$a_{jn_j} = a_{jn_j}^0 + \sum_{l=1}^N \sum_{m_j=-N_j}^{N_j} G_{n_j m_j}^{jl} a_{lm_j}; \quad j = \overline{1, N}, \quad n_j = \overline{-N_j, N_j}, \quad (18a)$$

где N' – максимальное число гармоник в разложении диаграммы рассеяния $g(\varphi)$ одиночного рассеивателя в ряд (11); N_j – максимальное число гармоник в разложении диаграммы рассеяния $g_j(\varphi)$ j -го тела в ряд (16). При практических расчетах при рассмотрении группы тел для простоты можно положить все числа N_j равными одному и тому же числу N' , как и в одиночном случае.

Для анализа сходимости численного алгоритма МДУ, помимо сравнения значений диаграмм рассеяния при различном числе гармоник, пользуются проверкой так называемой оптической теоремы. Согласно оптической теореме, в отсутствии поглощения внутри тела (что соответствует краевым условиям Дирихле или Неймана):

$$\sigma_s = -\frac{4 \operatorname{Re} g(\varphi_0)}{k}, \quad (23)$$

где

$$\sigma_s = \frac{2}{k\pi} \int_0^{2\pi} |g(\varphi)|^2 d\varphi \quad (24)$$

– интегральное сечение (поперечник) рассеяния.

Приведем теперь расчеты характеристик рассеяния для нескольких сложных геометрий тел при помощи указанного выше алгоритма МДУ.

Сначала рассмотрим одиночный бесконечный цилиндр с сечением в виде равностороннего треугольника с длиной стороны a . На рисунках 2 и 3 показаны геометрия треугольника и модуль диаграммы рассеяния при $ka = 1$, вычисленной при угле падения плоской волны $\varphi_0 = 0$ и при $N' = 10$. Сплошная линия на рисунке 3 – результат, полученный при помощи МДУ, а пунктирная линия – результат, полученный при помощи МПГУ (число точек $N = 600$, см. подробнее в [9]). Отметим, что уже при $N' > 2$ графики диаграммы рассеяния, полученные по МДУ, полностью сливаются. В таблице 1 продемонстрирована точность выполнения оптической теоремы при различном числе гармоник, причем в последнем столбце приведен модуль разности Δ левой и правой частей равенства (23). Нижние строки таблицы 1 – результат проверки оптической теоремы по МПГУ

при различных N . Из рисунка 3 и таблицы 1 видно, что оба метода дают хорошую точность, достаточную для вычисления диаграммы рассеяния на телах с изломами границы.

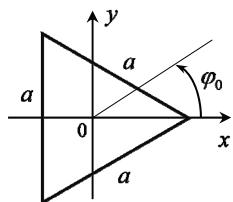


Рис. 2. Геометрия треугольника

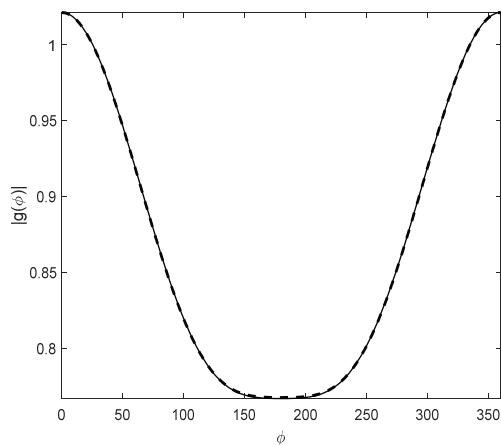


Рис. 3. Диаграмма рассеяния треугольника

Таблица 1

Проверка оптической теоремы для треугольника

N'	$\sigma_s / 4$	$-\operatorname{Re} g(\phi_0)$	Δ
МДУ			
1	0.7195394	0.71953900	1.74e-06
2	0.7256820	0.72567926	1.13e-05
4	0.7512197	0.75121978	3.25e-07
6	0.7577175	0.75771757	1.92e-08
8	0.7584966	0.75849664	1.23e-07
10	0.760986	0.76098630	2.84e-09
12	0.762349	0.76234968	4.03e-08
МПГУ			
300	0.75366	0.75366981	1.66e-07
450	0.75857	0.75857306	1.15e-07
600	0.76098	0.76098132	8.68e-08

Далее, продемонстрируем результаты расчета для геометрии поперечного сечения бесконечного цилиндра, в виде так называемой снежинки Коха 1-й итерации. Вид этой снежинки приведен на рисунке 4. Для вычисления характеристик рассеяния для подобных фракталоподобных тел алгоритм МДУ для одиночных рассеивателей уже не совсем подходит. Известно, что численный алгоритм МДУ имеет приемлемую сходимость только для всех так называемых слабо невыпуклых тел, к которым относятся и все выпуклые тела. Снежинка Коха относится уже к невыпуклым телам, и поэтому для нее этот алгоритм практически не подходит. Нами были проведены соответствующие вычисления для снежинки Коха малых размеров, которые показали, что только при $3ka < 1$ (a – длина стороны каждого из трех

малых треугольников, примыкающих к большому, как показано на рис. 4) получается приемлемая точность, не более двух знаков после запятой при $N' \leq 10$. При большем же числе гармоник начинается сильное возрастание вычислительной погрешности алгоритма. Поэтому для решения подобных задач при помощи МДУ необходимо избрать другой путь, а именно: представить эту снежинку в виде четырех примыкающих друг к другу равносторонних треугольников. При этом длина стороны большого треугольника будет в три раза больше длин сторон каждого из трех малых треугольников. Для решения задачи рассеяния в такой постановке мы использовали численный алгоритм МДУ для группы тел.

На рисунке 5 представлена диаграмма рассеяния для снежинки Коха при $ka = 0.4$ и при угле падения $\phi_0 = 0$. Сплошная кривая на рисунке 5 – результат, полученный при помощи МДУ для группы из четырех треугольников, составляющих вместе снежинку Коха ($N' = 12$ – общее число гармоник для всех четырех тел), а пунктирная линия – результат, полученный при помощи МПГУ (число точек $N = 600$). В МПГУ подобного перехода к группе тел, как в МДУ, делать не нужно, так как этот метод годится для любых геометрий сечений.

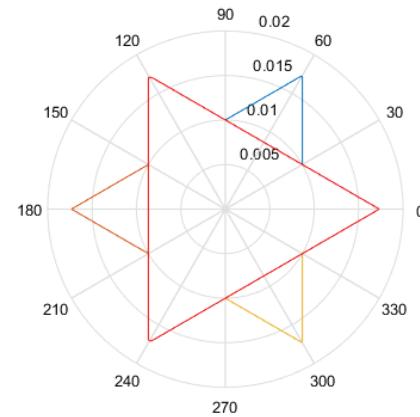


Рис. 4. Геометрия снежинки Коха 1-й итерации

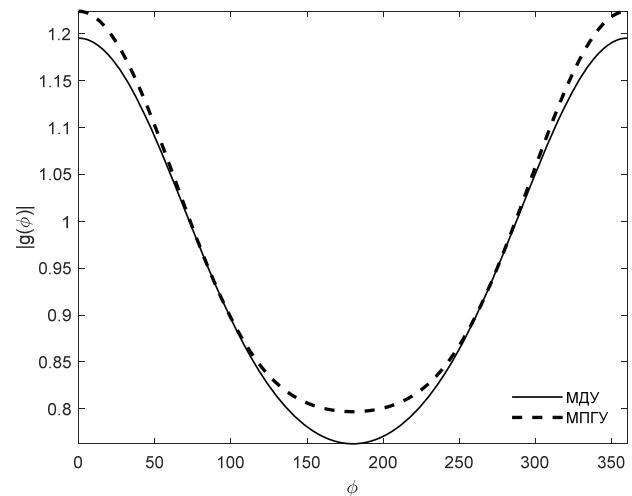


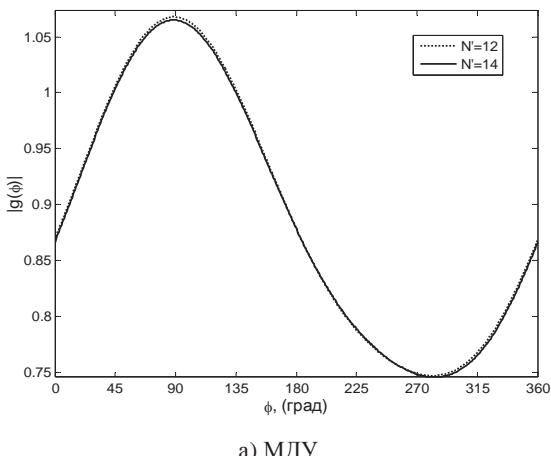
Рис. 5. Диаграмма рассеяния для снежинки Коха 1-й итерации

В таблице 2 приведена проверка оптической теоремы для снежинки Коха ($ka = 0.4$) с использованием МДУ и МПГУ.

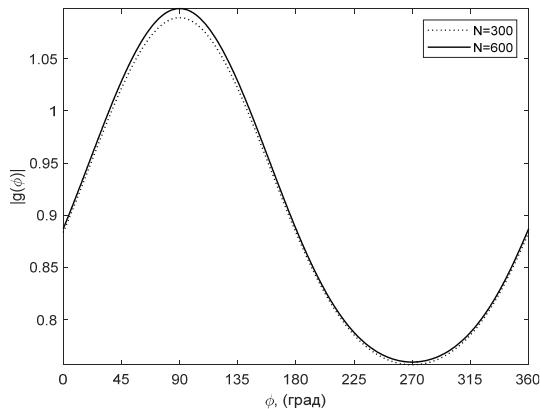
**Проверка оптической теоремы
для снежинки Коха 1-й итерации**

N'	$\sigma_s / 4$	$-\operatorname{Re} g(\phi_0)$	Δ
МДУ			
8	0.8880601	0.89219973	0.0041395
10	1.14928524	0.93673590	0.1781926
12	0.9226801	0.92982507	0.0071449
14	0.9137823	0.92640863	0.0126263
МПГУ			
300	0.95592	0.95592133	7.5e-10
600	0.96681	0.96681515	4.3e-10
900	0.97037	0.97037809	2.9e-10

На рисунке 6 приведены диаграммы рассеяния для снежинки Коха при $ka = 0.33$ и угле падения $\phi_0 = \pi/2$, полученные при помощи МДУ (а) и МПГУ (б).



а) МДУ



б) МПГУ

Рис. 6. Диаграмма рассеяния для снежинки Коха 1-й итерации

В таблице 3 приведена проверка оптической теоремы для снежинки Коха указанного выше размера. Из рисунков 5-6 видно небольшое отличие диаграмм рассеяний, вычисленных по МДУ и МПГУ. Таблицы 2 и 3 показывают, что алгоритм МДУ имеет меньшую точность и скорость сходимости по сравнению с МПГУ при вычислении характеристик рассеяния для фракталоподобных тел.

В основном, при помощи МДУ можно решать задачи рассеяния на фракталоподобных телах небольших размеров (в несколько раз меньших длины волны падающего поля).

Таблица 2

**Проверка оптической теоремы
для снежинки Коха 1-й итерации**

N'	$\sigma_s / 4$	$-\operatorname{Re} g(\phi_0)$	Δ
МДУ			
12	0.804515	0.80691255	0.002397
14	0.796424	0.80388883	0.007463
МПГУ			
300	0.83002956	0.83002956	4.4e-11
600	0.83900	0.83900173	2.5e-11

Заключение

В работе впервые приведены вычисления характеристик рассеяния для фракталоподобных тел, полученные при помощи МДУ. Продемонстрированы хорошая точность и сходимость метода для решения задач рассеяния на телах с изломами, достаточные для расчета диаграмм рассеяния и интегральных характеристик. Проведено сравнение результатов расчета с теми, что получаются при помощи МПГУ. Как показали исследования для решения задач рассеяния на сложных фракталоподобных телах нужно использовать МДУ для группы тел, представляя эти тела в виде группы близко расположенных выпуклых тел, при этом численный алгоритм МДУ будет наиболее эффективен, если размеры тел не превосходят длины волны падающего поля.

Литература

1. Кюркчан А.Г. Об одном интегральном уравнении в теории дифракции // Доклады АН. 1992. Т.325. №2. С. 273-280.
2. Кюркчан А.Г. Об одном методе решения задач рассеяния волн "прозрачными" препятствиями // Доклады АН. 1997. Т.352. № 2. С. 180-183.
3. Кюркчан А.Г. Применение метода диаграммных уравнений к решению задачи рассеяния волн группой тел // Радиотехника и электроника. 1996. Т. 41. № 1. С. 40-45.
4. Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И. Математическое моделирование в теории дифракции с использованием априорной информации об аналитических свойствах решения. М.: ИД Медиа Паблишер, 2014, 226 с.
5. Демин Д.Б., Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И. Усреднение по углам облучения в двумерной скалярной задаче дифракции // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2012. № 11. С. 15-21.
6. Демин Д.Б., Кюркчан А.Г. Усреднение характеристик рассеяния в задачах дифракции волн на нескольких импедансных телах на основе метода диаграммных уравнений // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2013. № 11. С.123-129.
7. Демин Д.Б. Моделирование усредненных характеристик рассеяния в двумерной задаче дифракции на диэлектрическом теле методами диаграммных уравнений и Т-матриц // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2019. Т.13. № 4. С. 27-35.
8. Кюркчан А.Г., Демин Д.Б. Дифракция электромагнитных волн на импедансных рассеивателях, имеющих изломы границы // Радиотехника и электроника. 2002. Т.47. №8.
9. Крысанов Д.В., Кюркчан А.Г. Моделирование усредненных по углам ориентации характеристик рассеяния волн частицами сложной геометрии и фракталоподобными частицами // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2017. Т.11. № 7. С. 17-22.
10. Кюркчан А.Г., Маненков С.А., Смирнова Н.И. Решение задач рассеяния волн телами, имеющими изломы границы и фракталоподобными телами вращения // Оптика и спектроскопия. 2019. Т. 126. № 5. С. 547-553.
11. Апельцин В.Ф., Кюркчан А.Г. Аналитические свойства волновых полей. М.: Изд-во МГУ, 1990. 208 с.

SOLUTION OF THE TWO-DIMENSIONAL WAVE DIFFRACTION PROBLEM ON FRACTAL BODIES BY THE PATTERN EQUATIONS METHOD

Aleksey S. Davydov, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Dmitry B. Demin, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia, dbdemin@gmail.com

Dmitry V. Krysanov, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia,
d.v.krysanov@mtuci.ru

Abstract

The solution of the two-dimensional wave diffraction problem for infinite cylinder of complex cross-section was considered by using the pattern equations method (PEM). A triangle and a Koch snowflake of first iteration were chosen as the geometry of the cross-sections of the cylinder. The numerical algorithms of the PEM for a single scatterer and for a group of bodies with the Dirichlet condition on their boundary are briefly presented, and the results of numerical calculations of the scattering characteristics for the above geometries are obtained using the PEM and the method of continued boundary conditions (MCBC). To check the convergence of the numerical algorithm in both methods, the optical theorem was used. The limits of applicability of the PEM for fractal scatterers are established. It is shown that for all convex bodies the algorithm of the PEM is sufficiently stable and allows obtaining calculation results with an accuracy acceptable in practice. In the case of a non-convex body, namely, a Koch snowflake, the algorithm of the PEM for a single scatterer turns out to be unstable and the acceptable accuracy can be obtained only if this geometry is considered as a group of bodies composed of convex geometries (for example, triangles).

Keywords: pattern equations method, method of continued boundary conditions, fractal bodies, scattering pattern, optical theorem, triangle, Koch snowflake.

References

1. A. G. Kyurkchan (1992). A new integral equation in the diffraction theory. *Soviet Physics-Doklady*. Vol. 37. No.7, pp. 338-340.
2. Kyurkchan A.G. On a Method for Solving Problems of Wave Scattering by "Transparent" Obstacles. *Doklady Mathematics*, 1997, Vol.55, No.1, pp. 136-139.
3. A. G. Kyurkchan (1996). Application of the Method of Pattern Equations to the Solution of the Multiple-Body Scattering Problem. *Journal of Communications Technology and Electronics*. Vol. 41. No. 1, pp. 33-38.
4. A. G. Kyurkchan, N. I. Smirnova (2016). Mathematical Modeling in Diffraction Theory Based on A Priori Information on the Analytic Properties of the Solution. Amsterdam: Elsevier. 280 p.
5. D. B. Demin, A. G. Kyurkchan, N. I. Smirnova (2012). Averaging by the Radiation Angles in 2-D Diffraction Problem. *T-Comm*. No.11, pp.15-21. (in Russian)
6. D. B. Demin, A. G. Kyurkchan (2013). Averaging of Scattering Characteristics in Wave Diffraction Problems on Several Impedance Bodies by Using Pattern Equations Method. *T-Comm*. No 11, pp. 123-129. (in Russian)
7. D. B. Demin (2019). Simulation of Averaged Scattering Characteristics of Dielectric Particles in a 2D Diffraction Problem Using Pattern Equations Method and T-Matrix Method. *T-Comm*. No 4, pp. 27-35. (in Russian)
8. A. G. Kyurkchan, D. B. Demin (2002). Electromagnetic wave diffraction from impedance scatterers with piecewise-smooth boundaries. *Journal of Communications Technology and Electronics*. Vol. 47. No. 8, pp. 856-63.
9. D. V.Krysanov, A. G. Kyurkchan. (2017). Modeling averaged over the angles of orientation characteristics of the scattering by particles of complex geometry and fractal particles. *T-Comm*. No.7, pp. 17-22. (in Russian)
10. A. G. Kyurkchan, S. A. Manenkov, N. I. Smirnova (2019). Solution of Problems of Wave Scattering by Bodies Having Boundary Breaks and Fractal-Like Bodies of Rotation. *Optics and Spectroscopy*. Vol. 126. No. 5, pp. 466-472.
11. V. F. Apel'tsin, A. G. Kyurkchan (1990). Analytical properties of wave fields, Moscow, Mosk. Gos. Univ. 208 p. (in Russian)

Information about authors:

Aleksey S. Davydov, graduate student of branch 01.03.04 "Applied Mathematics" (2020), Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Dmitry B. Demin, Assistant Professor, Ph.D., Assistant Professor of Probability Theory and Applied Mathematics Department, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Dmitry V. Krysanov, Postgraduate, Assistant of Probability Theory and Applied Mathematics Department, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia