

СЕТЕВОЕ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЕ 5G И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ЕГО ТОЧНОСТИ

DOI: 10.36724/2072-8735-2020-14-12-4-17

Manuscript received 22 July 2020;

Accepted 28 September 2020

Фокин Григорий Алексеевич,*Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, Санкт-Петербург, Россия, grihafokin@gmail.com***Ключевые слова:** сетевое позиционирования, экосистема 5G, сеть радиодоступа, сверхплотные сети, определение местоположения, эллипс рассеивания

Актуальность вопросов сетевого позиционирования в целом, и методик оценки точности в частности обусловлена тем, что технологии определения местоположения средствами инфраструктуры развернутых и проектируемых сетей мобильной радиосвязи получили новый стимул развития. Это вызвано рядом объективных факторов последних лет, которые являются результатом продолжающейся эволюции на очередном этапе перехода к сетям 5G. Если в сетях предыдущих поколений 2G-4G геолокация была опциональным сервисом, который развивался преимущественно по требованиям экстренных служб и обеспечения правопорядка, а также в сценариях, когда сигналы глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) оказывались недоступны, то для перспективной цифровой экосистемы 5G сетевое позиционирование можно по праву выделить в отдельное направление исследований и разработок. Аргументами к данному утверждению являются как минимум два обстоятельства. Во-первых, за последние годы получил развитие широкий спектр геоинформационных услуг, которые невозможно и/или нецелесообразно решать исключительно системами ГНСС. Показательным является и то, что в последних спецификациях партнерского проекта 3GPP среди прочих в явном виде появились требования к точности и доступности сервисов сетевого позиционирования, а также описание всевозможных сценариев геолокации с точностью до одного метра. Во-вторых, анализ зарубежных источников последних лет показал, что получила развитие так называемая концепция организации связи на основе данных позиционирования LAC (Location Aware Communication), согласно которой осведомленность о местоположении может быть использованы на различных уровнях модели OSI для повышения эффективности функционирования радиостанций в составе сверхплотных сетей радиодоступа 5G. В настоящей работе систематизированы сценарии позиционирования в сетях 5G, а также вероятностные модели и методы оценки точности геолокации применительно к задачам определения местоположения в сетях 5G. В первой части настоящей работы представлены сценарии сетевого позиционирования в экосистеме 5G, в частности: приводятся особенности организации радиосвязи на основе данных о местоположении; формулируются тенденции развития технологий позиционирования в сетях 5G; анализируются требования 3GPP к позиционированию в сетях 5G. Во второй части настоящей работы представлены результаты разработки и программной реализации инструментов вероятностной оценки и визуализации точности позиционирования по эллипсу рассеивания.

Информация об авторе:*Фокин Григорий Алексеевич, к.т.н., доцент, доцент кафедры радиосвязи и вещания Санкт-Петербургского государственного университета телекоммуникаций им. проф. М. А. Бонч-Бруевича, г. Санкт-Петербург, Россия***Для цитирования:***Фокин Г.А. Сетевое позиционирование 5G и вероятностные модели оценки его точности // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Том 14. №12. С. 4-17.***For citation:***Fokin G.A. (2020) 5G network positioning and statistic models for its accuracy evaluation. T-Comm, vol. 14, no.12, pp. 4-17. (in Russian)*

Введение

На сегодняшний день экосистема сетей подвижной радиосвязи (СПРС) 5G рассматривается как инфраструктурная основа цифровой экономики [1–3]. Сетевое позиционирование в экосистеме 5G может исследоваться с двух сторон: во-первых, как целевая задача непосредственного географического определения местоположения устройств в СПРС 5G [4–6]; во-вторых, как инструмент совершенствования механизмов установления и ведения радиосвязи на основе данных о местоположении устройств в сверхплотных сетях радиодоступа (СРД) 5G [7].

Традиционно позиционирование в СПРС предыдущих поколений 2G-4G было дополнительной услугой по определению местоположения (ОМП) абонента средствами сетевой инфраструктуры в сценариях, когда сигналы глобальных навигационных спутниковых систем (ГНСС) оказывались недоступны. Определение местоположения осуществлялось в интересах экстренных служб и обеспечения правопорядка преимущественно по требованию регулятора [7–9].

В результате продолжающейся эволюции на очередном этапе перехода к сетям пятого поколения для перспективной цифровой экосистемы 5G сетевое позиционирование можно рассматривать уже не просто как одну из дополнительных услуг, а как отдельное направление исследований и разработок. Во-первых, в последних спецификациях партнерского проекта 3GPP выполнена формализация требований к точности и доступности сервисов сетевого позиционирования, а также описаны сценарии геолокации с точностью до одного метра [10–15]. Во-вторых, в ряде зарубежных публикаций уже оформилась так называемая концепция организации связи на основе данных о местоположении LAC (Location Aware Communication), которая служит для повышения эффективности построения и функционирования радиостанций в составе сверхплотных СРД 5G [16–20].

Стимулом к пересмотру и актуализации вероятностных моделей и методов оценки точности ОМП в сетях 5G послужил цикл работ [21–23], в которых на основе эллипса визуализируется траектория подвижного объекта при его позиционировании в сверхплотных СРД. Целью настоящей работы является разработка и программная реализация инструментов вероятностной оценки и визуализации точности позиционирования по методу эллипса рассеивания в задачах определения местоположения в сверхплотных сетях 5G. Для достижения поставленной цели в разделе 1 представлены сценарии позиционирования в сетях 5G; в разделе 2 систематизируются вероятностные модели оценки точности позиционирования применительно к задачам ОМП в сверхплотных сетях 5G.

1. Сценарии сетевого позиционирования 5G

1.1. Организации радиосвязи на основе позиционирования в сетях 5G

В зарубежных работах подход к организации радиосвязи на основе осведомленности о местоположении (МП) абонентских терминалов (АТ) получил название LAC [17]. Амбициозной задачей сверхплотных сетей 5G является достижение точности 1 м, что примерно на порядок меньше, чем в СПРС предыдущих поколений.

Для достижения такой точности в экосистеме 5G планируется использовать комбинирование измерений ГНСС/GNSS (Global Navigation Satellite System) и наземных систем сетевого позиционирования 5G. В сценариях, где прием сигналов ГНСС затруднен, например, в местах плотной городской застройки и внутри помещений, для позиционирования могут использоваться отличные от партнерского проекта 3GPP технологии, такие как Wi-Fi, UWB, RFID, Bluetooth. Возможные сценарии организации радиосвязи на основе позиционирования в сетях 5G представлены на рис. 1 [17].

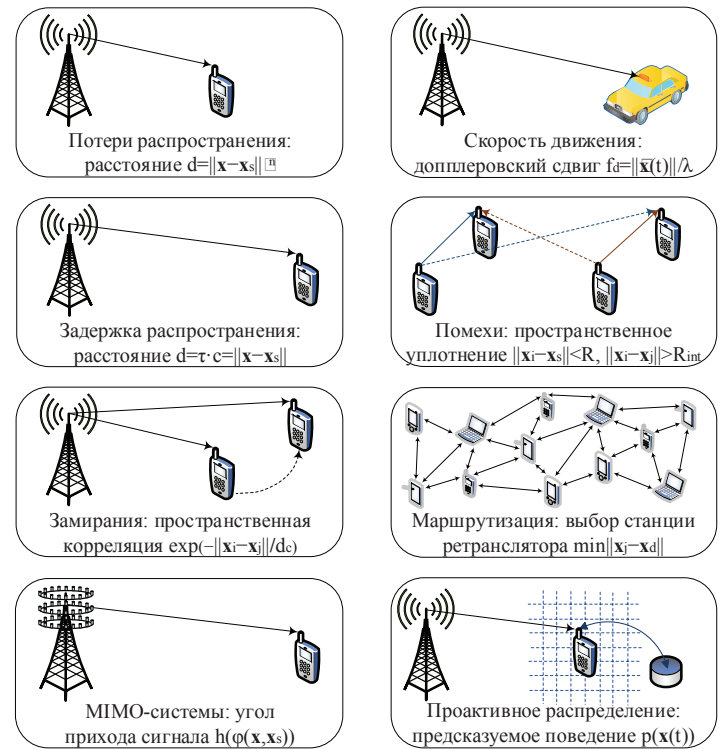


Рис. 1. Сценарии организации радиосвязи на основе позиционирования в сетях 5G [17]

На рисунке 1 приняты следующие обозначения: \mathbf{x}_{AT} – вектор координат АТ; $\mathbf{x}_{БС}$ – вектор координат базовой станции (БС); n – показатель потерь РРВ (распространении радиоволн); \mathbf{x}_i – вектор координат АТ_i, \mathbf{x}_j – вектор координат АТ_j, d_c – расстояние пространственной корреляции; φ – угол прихода сигнала; \mathbf{h} – матрица радиоканала MIMO; $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света; τ – задержка при распространении сигнала; f_d – доплеровский сдвиг частоты; $\mathbf{x}(t)$ – скорость движения АТ; λ – длина волны; R – радиус зоны обслуживания; R_{int} – радиус зоны помех; \mathbf{x}_d – вектор координат станции получателя; $p(\mathbf{x}(t))$ – функция распределения МП АТ в момент t . Во-первых, очевидным использованием пространственных данных является прогноз ОСШ (отношения сигнал шум, Signal to Noise Ratio): с увеличением расстояния $d = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s\|^{-n}$ уровень полезного принимаемого сигнала по закону средних потерь РРВ, а, следовательно, и SNR, уменьшается, поэтому станции, зная местоположения соседних источников радиозлучения, могут спрогнозировать уровень принимаемого сигнала и, таким образом, оценить внутрисистемные помехи. Во-вторых, выбор промежуточной станции – ретранслятора также можно осуществлять, руководствуясь расстояни-

ем до ближайшей соседней станции. В-третьих, учитывая предыдущие измерения, при перемещении на небольшое расстояние возможен текущий прогноз глубины замираний по коэффициенту пространственной корреляции $\exp(-|x_i - x_j|/d_c)$. В-четвертых, доплеровские измерители скорости позволяют прогнозировать степень мобильности.

Среди менее очевидных сценариев LAC можно выделить задачи управления радиоресурсами, которые обычно решаются по данным о состоянии радиоканала CSI (Channel State Information). Дополнительное использование данных о местоположении в комплексе с CSI позволяет сократить накладные расходы на сигнализацию при организации таких процедур, как хэндовер, балансировка нагрузки, управление топологией и мощностью, синхронизация (рис. 2).

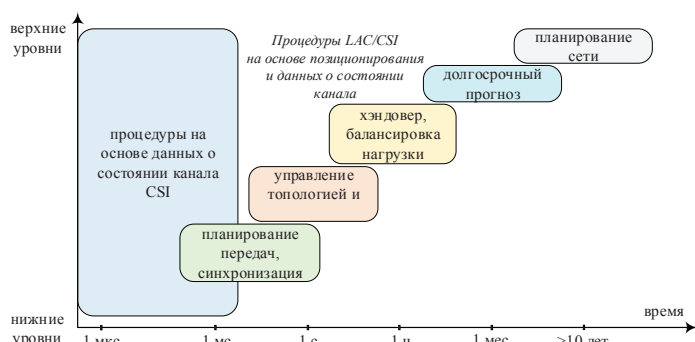


Рис. 2. Место процедур LAC/CSI в задачах управления радиоресурсами в сетях 5G [17]

Из анализа сценариев организации радиосвязи на основе позиционирования в сетях 5G можно сделать вывод о том, что использование данных о МП соседних радиостанций (location awareness) позволяет усовершенствовать некоторые процедуры функционирования СПРС. С другой стороны, сама архитектура и новые технологии радиоинтерфейса сверхплотных СПД 5G способствуют повышению точности и открывают новые сценарии позиционирования в сетях 5G.

1.2. Тенденции развития технологий позиционирования в сетях 5G

Систематизируем тенденции развития технологий позиционирования в сетях 5G, определяемые архитектурой сверхплотных СПД пятого поколения и новыми технологиями радиоинтерфейса 5G. Отличительными факторами нового радиоинтерфейса 5G, отсутствовавшими в сетях предыдущих поколений 2G-4G, являются миллиметровый диапазон волн (MMB) mmWave, значительно более широкие полосы частот и многоантенные системы Massive MIMO [16-20].

Диапазон MMB от 30 ГГц характеризуется высокими потерями при отражениях и слабой проникающей способностью, поэтому в СПД 5G при сверхплотном территориальном распределении БС можно ожидать высокой вероятности радиосвязи с АТ в условиях прямой видимости LOS (Line Of Sight); многолучевость при этом будет характеризоваться небольшим числом дискретных многолучевых компонент (МЛК, MPC – Multipath Components), существенно зависящих от ориентации БС и АТ. Если в сетях предыдущих поколений 2G-4G с несущими частотами до 3 ГГц число диффузных компонент было настолько велико, что их простран-

ственная фильтрация была сложно реализуема, то в сетях 5G диапазона MMB пространственная фильтрация МЛК может быть использована для оценки взаимной ориентации БС и АТ, в том числе, в условиях отсутствия прямой видимости NLOS (Non Line Of Sight).

Широкие полосы частот вместе с агрегацией в диапазоне MMB могут достигать нескольких сотен МГц и значительно превышают 100 МГц. С точки зрения сбора первичных дальномерных измерений более широкая полоса позволяет увеличить разрешающую способность методов позиционирования, основанных на измерении времени прихода сигналов. Помимо увеличения разрешающей способности более широкая полоса позволяет реализовывать пространственную фильтрацию МЛК: например, при ширине полосы 300 МГц могут быть разделены МЛК с разностью хода лучей в 1 м. Так как расстояние между объектами дорожного движения обычно превышает 1 м, ожидается, что сетевое позиционирование 5G может быть использовано для предотвращения столкновений, а также реализовано в интеллектуальных транспортных системах (ИТС).

Многоантенные системы Massive MIMO вместе с использованием диапазона MMB позволяют реализовывать компактные устройства с множеством антенных элементов; последние, в свою очередь, способствуют уплотнению одновременных передач в условиях прямой видимости LOS сверхплотных радиосетей UDN (Ultra Dense Network) с использованием адаптивного диаграммообразования. С точки зрения сбора первичных угломерных измерений многоантенные системы Massive MIMO позволяют осуществлять оценку направления прихода сигнала при измерении сигналов от АТ в восходящем пилотном канале. Узкие лучи диаграмм направленности антенн (ДНА) можно использовать, для пространственной фильтрации сигналов прямой видимости LOS, подавления МЛК, полученных в условиях NLOS.

На рисунке 3 представлены новые сценарии позиционирования с использованием систем Massive MIMO, обработки МЛК, сверхплотных СПД и кооперативной обработки при прямой связи между устройствами D2D [19].

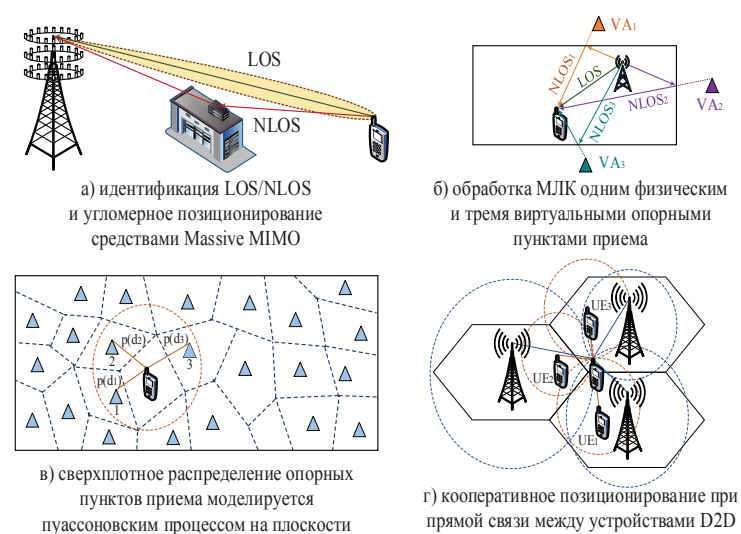


Рис. 3. Сценарии позиционирования в СПД 5G с использованием: а) Massive MIMO; б) обработки МЛК; в) сверхплотных СПД; г) кооперативной обработки D2D [19]

На рисунке 3,а представлен сценарий идентификации луча LOS и его ассоциации с принятым обрабатываемым многолучевым сигналом при позиционировании источника радиозлучения (ИРИ) в условиях NLOS.

На рисунке 3,б представлен сценарий позиционирования АТ внутри помещений на основе обработки многолучевых компонент. МЛК, извлеченные из импульсной характеристики многолучевого радиоканала, также как LOS компонента, могут быть использованы для ОМП: АТ принимает сигнал LOS от БС, а также отраженные от стен МЛК – копии переданного БС сигнала, принятые АТ в условиях NLOS; зная МП БС и отраженные МЛК путем обработки можно спрогнозировать МП виртуальных опорных станций VA (Virtual Anchor): VA₁, VA₂, VA₃, являющихся отражателями сигналов NLOS₁, NLOS₂, NLOS₃; комбинирование дальномерно-угломерных измерений из принятых компонент LOS и NLOS позволяет рассчитать местоположение АТ. Пространственная фильтрация МЛК при ОМП в условиях NLOS должна также производить анализ принятых сигналов по числу возможных многократных переотражений.

На рисунке 3, в представлен сценарий ОМП в сверхплотных радиосетях UDN, когда АТ с высокой вероятностью находятся в условиях LOS с несколькими БС и могут одновременно к ним подключаться как для повышения пропускной способности, так и для уменьшения энергопотребления. С точки зрения позиционирования сверхплотное территориальное/пространственное распределение БС с заранее известными координатами позволяет повысить точность ОМП по следующим обстоятельствам. Во-первых, помимо первичных измерений, на точность сбора которых влияет ширина полосы сигнала, точность оценки МП определяется также и взаимным расположением участвующих в сеансе ОМП опорных БС; при сверхплотном распределении БС для сеанса ОМП можно выбрать опорные станции с наиболее благоприятным территориальным распределением по метрике геометрического фактора снижения точности GDOP (Geometric Dilution of Precision); также сценарий UDN повышает точность позиционирования известными методами соседства, типа Cell ID. Во-вторых, само сверхплотное территориальное и пространственное распределение БС способствует условиям прямой видимости LOS между БС и АТ, как объектом позиционирования. С точки зрения точности первичных измерений прямая видимость, помимо дальномерных методов способствуют использованию также и угломерных методов за счет антенн с управляемыми ДНА. В-третьих, при сверхплотном расположении БС их территориальное распределение в 2D можно описать Пуассоновским процессом PPP (Poisson Point Process), на основе которого при заданной плотности БС поддается аналитическому прогнозу плотность вероятности расстояний $p(d_1)$, $p(d_2)$, $p(d_3)$ между АТ и k-соседями – ближайшими БС; далее, используя метод трилатерации можно выполнить оценку местоположения АТ. Справедливо ожидать более высокую точность данного подхода по сравнению с известными методами соседства в сетях 2G-4G. Важным нюансом при дальномерном и разностно-дальномерном позиционировании в UDN является синхронизация БС, а также необходимость их координации при организации периодов молчания для снижения внутрисистемных помех в процессе сбора первичных измерений.

На рисунке 3,г представлен сценарий позиционирования за счет режима прямой связи между устройствами D2D (Device-to-device). В СРД 5G непосредственная связь позволяет обеспечить прямой высокоскоростной обмен со сверхнизкой задержкой между подвижными АТ при их сверхплотном распределении; также сценарий D2D позволяет повысить показатели радиопокрытия и пространственного уплотнения одновременных передач. С точки зрения позиционирования режим прямой связи между устройствами способствует развитию методов *кооперативного позиционирования* путем совместного распределенного сбора, обмена и обработки первичных измерений и последующего вычисления МП: и БС и подвижные АТ осуществляют сбор различных первичных измерений (дальномерных, угломерных, доплеровских сдвигов) как относительно опорных пунктов с известным МП, так и относительно подвижных самих устройств UE₁, UE₂, UE₃. Комплексирование разнородных измерений от подвижных и неподвижных источников повышает и зону охвата, и точность позиционирования. Важным нюансом кооперативного позиционирования является его возможность повышения точности ОМП для сценариев относительного высокоточного позиционирования при отсутствии опорных ПП, которое востребовано в задачах управления движением, в том числе, для предотвращения столкновений. Важной задачей при кооперативном ОМП является учет неопределенности и/или неизвестности местоположения самих подвижных устройств в режиме D2D.

Вместе с кооперативным позиционированием гетерогенные СРД 5G способствуют развитию методов комбинирования разнородных измерений с использованием как технологий позиционирования 3GPP, и сторонних, таких как ГНСС, Wi-Fi, UWB, RFID, Bluetooth.

1.3. Требования 3GPP к позиционированию в сетях 5G

Анализ тенденций развития технологий сетевого позиционирования 5G продемонстрировал потенциал повышения точности за счет следующих факторов: а) диапазон ММВ; б) более широкие полосы частот; в) системы Massive MIMO; г) использование МЛК; д) прямая связь между устройствами; е) сверхплотные радиосети; ж) комбинирование измерений.

Требования к точности и доступности услуг позиционирования регламентируются спецификацией 3GPP TS 22.261 [14] и представлены в табл. 1.

Согласно спецификации 3GPP TS 22.261 [14] различают 7 уровней сервиса/услуг позиционирования в сетях 5G, которые дифференцируются по ряду показателей. Сценарии позиционирования в сетях 5G подробно исследованы в [10, 11] и описывают различные приложения услуг определения местоположения.

Из анализа в таблицы 1 можно выделить следующие категории требований.

Во-первых, различают требования относительного и абсолютного определения местоположения (ОМП): в первом случае речь идет об оценке абсолютных координат, в то числе, для отображения на цифровой карте; во-втором случае имеют ввиду оценку удаления/сближения, например, в задачах автономной посадки беспилотных летательных аппаратов (БПЛА).

Во-вторых, в отличие от позиционирования абонентов на плоскости в 2D в СПРС предыдущих поколений 2G-4G [7-

13], в сетях 5G различают требования как к горизонтальной, так и к вертикальной пространственной точности в 3D.

В-третьих, если в СПРС 2G–4G требования к позиционированию предъявлялись преимущественно регулятором для решения задач обеспечения правопорядка, то в сетях 5G определение местоположения востребовано уже для различных геоинформационных услуг; данные обстоятельства приводят к дифференциации показателей доступности и задержки в предоставлении услуг позиционирования; например, для задач автономного беспилотного транспорта доступность услуг позиционирования должна составлять 99,9%

с задержкой не более 10 мс (уровень сервиса 6), а для маломощных устройств IoT требования доступности и задержки могут быть существенно снижены.

В-четвертых, различают зоны позиционирования 5G с обычной и так называемой повышенной точностью; в последнем случае предполагается сверхплотное территориальное распределение опорных станций. Рассмотрим далее реализуемость требований к точности сетевого позиционирования 5G существующими технологиями.

Таблица 1

Требования к позиционированию в сетях 5G [14]

Уровень сервиса позиционирования	Абсолютное (А) или относительное (О)	Точность в 95%		Доступность услуги позиционирования	Задержка услуги позиционирования	Сценарий использования		
		Горизонтальная точность	Вертикальная точность			Зона позиционирования 5G	Зона позиционирования 5G с повышенной точностью	
							Снаружи помещений и в туннелях	Внутри помещений
1	А	10 м	3 м	95 %	1 с	Внутри помещений, скорость до 30 км/ч; Снаружи помещений (город и пригород), скорость до 250 км/ч	–	Внутри помещений, скорость до 30 км/ч
2	А	3 м	3 м	99 %	1 с	Снаружи помещений (город и пригород), скорость до 500 км/ч для поездов и до 250 км/ч для других средств	Снаружи помещений (плотная городская застройка), скорость до 60 км/ч; Вдоль дорог, скорость до 250 км/ч; вдоль железных дорог, скорость до 500 км/ч	Внутри помещений, скорость до 30 км/ч
3	А	1 м	2 м	99 %	1 с	Снаружи помещений (город и пригород), скорость до 500 км/ч для поездов и до 250 км/ч для других средств	Снаружи помещений (плотная городская застройка), скорость до 60 км/ч; Вдоль дорог, скорость до 250 км/ч; вдоль железных дорог, скорость до 500 км/ч	Внутри помещений, скорость до 30 км/ч
4	А	1 м	2 м	99,9 %	15 мс	–	–	Внутри помещений, скорость до 30 км/ч
5	А	0,3 м	2 м	99 %	1 с	Снаружи помещений (пригород), скорость до 250 км/ч	Снаружи помещений (плотная городская застройка), скорость до 60 км/ч; Вдоль дорог, скорость до 250 км/ч; вдоль железных дорог, скорость до 500 км/ч	Внутри помещений, скорость до 30 км/ч
6	А	0,3 м	2 м	99,9 %	10 мс	–	Снаружи помещений (плотная городская застройка), скорость до 60 км/ч	Внутри помещений, скорость до 30 км/ч
7	О	0,2 м	0,2 м	99 %	1 с	Внутри и снаружи помещений (пригород, город, плотная городская застройка), скорость до 30 км/ч; Относительное позиционирование между двумя UE в пределах 10 м друг от друга, или между UE и опорным пунктом 5G в пределах 10 м друг от друга (опорный пункт 5G представляет собой дополнительное оборудование, развернутое в зоне обслуживания для повышения показателей позиционирования, например, маяки по периметру зоны сближения устройств)	Внутри помещений, скорость до 30 км/ч	

В [10, 11] показано, что существующие технологии ОМП, как входящие в спецификации партнерского проекта 3GPP (3rd Generation Partnership Project), так и сторонние, такие как ГНСС/GNSS (Global Navigation Satellite System): BeiDou, Galileo, GLONASS, GPS), системы наземного позиционирования с использованием маяка TBS (Terrestrial Beacon Systems), инерциальные измерительные модули IMU (Inertial Measurement Unit), СРД WiFi/Bluetooth удовлетворяют достаточно широкий спектр требований к точности в различных сценариях, особенно при их совместном использовании. Однако остаются и такие сценарии, в которых существующие технологии ОМП не обеспечивают требуемой точности, поэтому остается актуальной задача в области совершенствования технологий позиционирования в радиосетях 5G. Особенно это касается сценариев ОМП внутри помещений и условий плотной городской застройки, в том числе в зонах обеспечения повышенной точности позиционирования (рис. 4).

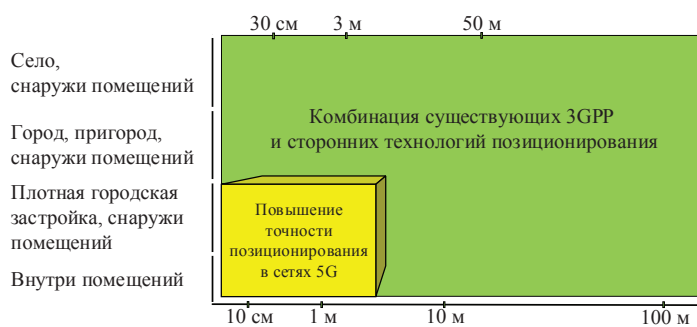


Рис. 4. Сценарии повышения точности позиционирования в сетях 5G

Таким образом, новые требования к позиционированию в сетях 5G определяют необходимость уточнения метрик оценки и визуализации точности и доступности сервисов ОМП. Далее представим вероятностные модели и методы оценки точности позиционирования в сетях 5G с точки зрения математического аппарата теории многопозиционной пассивной радиолокации. Для рассмотренных условий сетевого позиционирования необходим совместный учет горизонтальной и вертикальной точности с заданной вероятностью, а также должны быть предусмотрены сценарии позиционирования подвижного объекта с одновременным построением его траектории как снаружи, так и внутри помещений, поэтому далее исследуем вероятностные модели в оценке и визуализации точности позиционирования по эллипсу рассеивания.

2. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ ОЦЕНКИ ТОЧНОСТИ ПОЗИЦИОНИРОВАНИЯ В СЕТЯХ 5G

2.1. Постановка задачи оценки точности позиционирования в сетях 5G

Сетевое позиционирование устройств в СПРС, являющихся ИРИ в СРД, в терминах теории радиолокации можно рассматривать как ОМП в многопозиционных системах пассивной радиолокации (МПСПР), когда множество позиций представлено БС СРД, являющимися пунктами приема (ПП) первичных измерений. Позиционирование ИРИ в МПСПР

осуществляется по измерениям на пространственно разнесенных ПП времени прихода, направления прихода или доплеровских сдвигов сигналов, излучаемых ИРИ. Наиболее распространенными пассивными измерениями являются дальномерные, разностно-дальномерные (РДМ) и угломерные (УМ) измерения [7–13]. Задача позиционирования может решаться сразу в процессе совместной обработки принимаемых в МПСПР сигналов. Однако принято рассматривать двухэтапную процедуру: на первом этапе оценивают параметры принятых от ИРИ сигналов, т.е. первичные измерения, связанные с каждой позицией ПП (дальность, пеленг) или парой позиций ПП (разность дальностей); на втором этапе по этим измерениям выполняют оценку пространственных координат ИРИ. Если в разнесенных ПП МПСПР первичные измерения собираются для движущихся ИРИ в различные моменты времени, целесообразно, как правило, сразу строить траектории ИРИ [24].

Точность позиционирования ИРИ определяется рядом факторов, среди которых, во-первых, свойства используемых для ОМП сигналов и, во-вторых, взаимное расположение ИРИ и ПП МПСПР, характеризуемое GDOP. При позиционировании неизбежно появляются различного рода погрешности в измеряемых параметрах, ведущих к ошибкам ОМП ИРИ, что приводит к необходимости поиска наилучшего в данных условиях метода позиционирования или их комбинации, оценка точности которых выполняется с использованием специальных метрик.

Задачи позиционирования востребованы в различных практических приложениях и предъявляют различные требования к точности ОМП. Так, например, для позиционирования АТ в СПРС может быть достаточно точности в десятки метров, в то время как для задач автономной посадки БПЛА предъявляются гораздо более высокие требования к точности сетевого позиционирования. Верификация требований к позиционированию в сетях 5G определяет необходимость обоснования выбора метрики оценки и визуализации точности ОМП.

Для разработки и программной реализации инструментов вероятностной оценки и визуализации точности сетевого позиционирования 5G далее исследуются вопросы в следующих разделах: погрешности первичных измерений и точность оценок координат в 2.2; эллипсоид рассеивания как метрика оценки точности позиционирования в 2.3; эллипс рассеивания как сечение двумерной плотности вероятности в 2.4; эллипс рассеивания в главной и произвольной системах координат в 2.5; построение эллипса рассеивания по матрице ковариации в 2.6; геометрическая интерпретация матрицы ковариации в 2.7; направление максимального рассеивания в 2.8; вероятность попадания в эллипс рассеивания в 2.9; эллипс рассеивания заданной доверительной вероятности в 2.10.

2.2. Погрешности первичных измерений и точность оценок координат

Общепринятой метрикой оценки точности позиционирования в зависимости от погрешности первичных измерений является информационная матрица Фишера FIM (Fisher Information Matrix) и связанная с ней нижняя граница Крамера-Рао (НКГР, CRLB – Cramer-Rao Lower Bound). НКГР дает нижнюю границу для дисперсии оценки координат ИРИ,

которая не может быть меньше НКГР и визуализируется эллипсом ошибок на плоскости [25, 26].

Формализуем процедуру переноса погрешностей первичных измерений в погрешности оценки координат. Обозначим вектор координат ИРИ $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, вектор нелинейных функций $\mathbf{f}(\mathbf{x})=[f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_N(\mathbf{x})]^T$ и вектор измерений $\mathbf{y}=[y_1, y_2, \dots, y_N]^T$, где $()^T$ – знак транспонирования, n – размерность (в 2D $n=2$, в 3D $n=3$). Компоненты оцениваемого n -мерного вектора \mathbf{x} – это истинные координаты МП ИРИ в двух- или трехмерном пространстве. Набор N первичных измерений $y_i, i=1, 2, \dots, N$ собран в различных местоположениях ПП. При отсутствии ошибок измерений, y_i приравнивается к известной нелинейной функции $f_i(\mathbf{x})$, которая определяет зависимость первичных измерений от оценки координат ИРИ. При аддитивных ошибках первичных измерений n_i, i -е измерение y_i задается как:

$$y_i = f_i(\mathbf{x}) + n_i, i = 1, \dots, N \quad (1)$$

где N уравнений (1) для $y_i, i = 1, 2, \dots, N$ измерений могут быть записаны в векторном виде как одно уравнение для N -мерных векторов-столбцов:

$$\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{n}$$

где $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ – вектор-столбец измерений; $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{N \times 1}$ – вектор-столбец погрешностей первичных измерений с ковариационной матрицей $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{N \times N}$:

$$\mathbf{N} = E[(\mathbf{n} - E[\mathbf{n}])(\mathbf{n} - E[\mathbf{n}])^T]$$

где $E[\cdot]$ – математические ожидание. На главной диагонали \mathbf{N} находятся дисперсии измеряемых навигационных параметров, а вне диагонали – ковариационные моменты, которые характеризуют статистическую связь между измерениями.

Оценка координат $\hat{\mathbf{x}}$ связана с ковариационной матрицей \mathbf{N} как [12, 13]:

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_0 + (\mathbf{J}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{N}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]$$

где \mathbf{x} и \mathbf{x}_0 – вектор-столбцы $n \times 1$; $\mathbf{J} \in \mathbb{R}^{N \times n}$ – матрица Якоби разложенной в ряд функции $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, т.е. матрица частных производных $\partial f_i(\mathbf{x}_0) / \partial x_j, i=1, \dots, N; j=1, \dots, n$ размерности $N \times n$, вычисляемая при начальной оценке $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$. Обозначим через Σ ковариационную матрицу оценки координат $\hat{\mathbf{x}} = [\hat{x} \ \hat{y}]^T$ в 2D [12, 13]:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & r\sigma_x\sigma_y \\ r\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = (\mathbf{J}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{J})^{-1} = FIM^{-1}(\hat{\mathbf{x}})$$

Элементы σ_x^2, σ_y^2 на главной диагонали Σ представляют собой дисперсии оценок координат по x и y соответственно, а $\sigma_{xy}=r\sigma_x\sigma_y$ – их ковариации. Обратная матрица Σ^{-1} существует и равна $\mathbf{J}^T \mathbf{N}^{-1} \mathbf{J}$. Процедура переноса погрешностей первичных измерений в погрешности оценки координат МП заключается в получении информационной матрицы Фишера $FIM(\hat{\mathbf{x}})$, из которой получают НКГР для нижней границы дисперсии σ_x^2 и σ_y^2 оценки координат $\hat{\mathbf{x}}$:

$$CRLB(\hat{\mathbf{x}}) = trace(FIM^{-1}(\hat{\mathbf{x}})) = trace(\Sigma)$$

Рассмотрим далее геометрическую трактовку матрицы Σ .

2.3. Эллипсоид рассеяния как метрика оценки точности позиционирования

Эллипсоид рассеяния получается из ковариационной матрицы ошибок оценок координат $\Sigma \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ и вместе с проекциями на плоскости XY, YZ и XZ является метрикой оценки точности позиционирования (рис. 5) [12, 13].

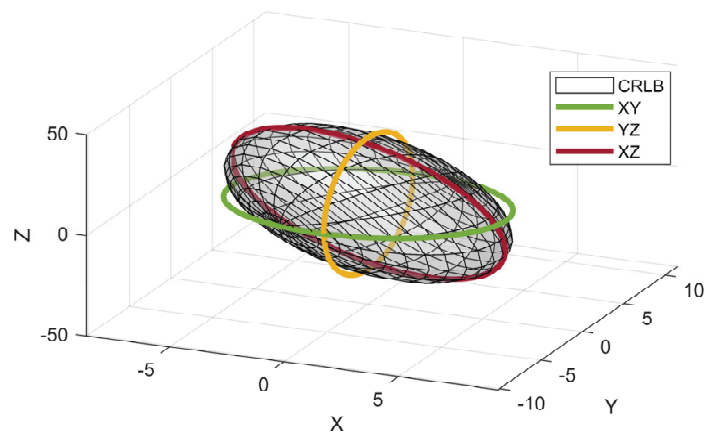


Рис. 5. Эллипсоид рассеяния НКГР и его проекции на плоскости

Если n -мерная случайная величина (СВ) $\hat{\mathbf{x}}$ имеет нормальное распределение с вектором средних $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)^T$ и матрицей ковариации Σ , то геометрическое место точек постоянных значений плотности вероятности (ФПВ) [7]:

$$(\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) = k^2 \quad (2)$$

где k – константа, определяющая размер n -мерной области. Для 2D поверхность размера k представляет собой эллипс, для 3D – эллипсоид. Левая часть (16) есть положительно определенная квадратичная форма, которая, определяет в пространстве \mathbb{R}^n область, ограниченную гиперэллипсоидом с центром в $\boldsymbol{\mu}$, оси которого параллельны собственным векторам Σ , а полуоси пропорциональны $\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные числа Σ . Правая часть (16) есть сумма квадратов нормальных СВ; k^2 имеет распределение χ^2 с n -степенями свободы:

$$(\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1} (\hat{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu}) \sim \chi^2(n)$$

Размер эллипсоида можно определить квантилями распределения хи-квадрат. Ориентация эллипсоида вращения в пространстве характеризует направления рассеяния/дисперсии оценок координат по соответствующим осям в 3D. Далее для оценки точности позиционирования по горизонтали и вертикали рассмотрим метрику эллипса рассеяния на плоскости и для удобства примем $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$.

2.4. Эллипс рассеяния как сечение двумерной плотности вероятности

Система двух СВ $\mathbf{x}=[x \ y]^T$ в декартовой системе координат (СК) изображается случайной точкой на плоскости с функцией ПВ (ФПВ) [27]:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} \right]} \quad (3)$$

где μ_x, μ_y – математические ожидания (МО, центры рассеивания) x и y ; σ_x, σ_y – их средние квадратические отклонения (СКО); r – коэффициент корреляции СВ x и y . Параметры σ_x, σ_y и r полностью определяются матрицей Σ . Эллипсы рассеивания получаются в сечении ФПВ плоскостями, параллельными xOy (рис. 6, 7).

Каноническое уравнение эллипса в декартовой СК описывает эллипс с центром в начале координат, оси которого совпадают с осями СК:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

где *большая* и *малая полуоси* эллипса обозначаются a и b соответственно.

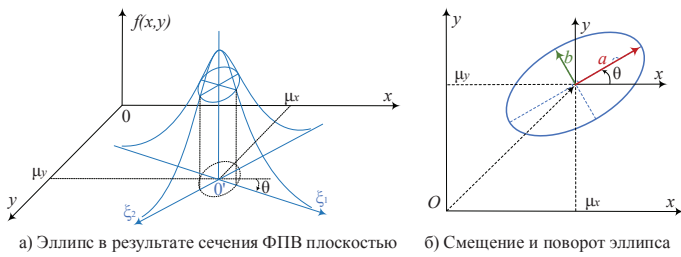


Рис. 6. Двумерная ФПВ нормального распределения и модель эллипса

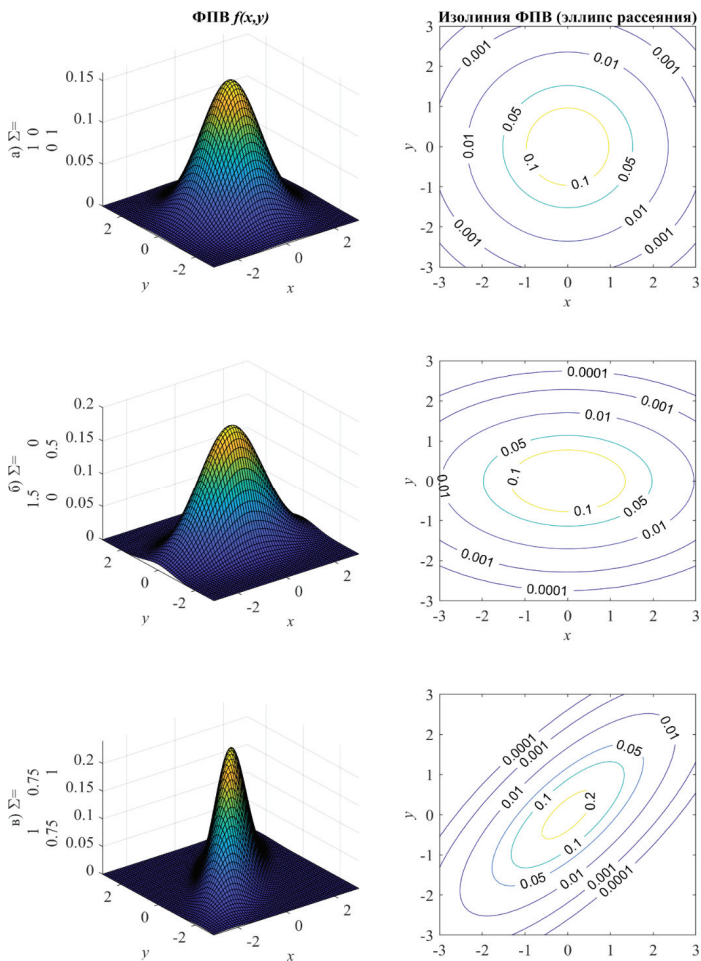


Рис. 7. Примеры ФПВ и ее изолиний (эллипсов рассеивания) для разных матриц ковариации Σ

В общем случае, главные оси эллипса не совпадают с осями СК xOy (рис. 6, б); направление его осей симметрии в СК xOy определяется углом θ [28]:

$$\operatorname{tg}2\theta = \frac{2r\sigma_x\sigma_y}{\sigma_x^2 - \sigma_y^2} \quad (4)$$

Угол θ принимает два значения, отличающиеся на $\pi/2$. Если $\sigma_x = \sigma_y$, то при любом r главные оси наклонены к оси x на 45° и 135° [28].

Уравнение проекции эллипса на плоскость xOy из (3) [27]:

$$\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2r(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2} = k^2 \quad (5)$$

где k^2 – константа. Из (4) получается два угла θ , различающихся на $\pi/2$, поэтому ориентация эллипса (5) относительно осей СК зависит от коэффициента корреляции r СВ (x,y) ; если (x,y) не коррелированы, то оси симметрии эллипса параллельны осям СК; в противном случае они составляют с осями СК некоторый угол. Пересекая ФПВ плоскостями, параллельными xOy , и проектируя сечения на плоскость xOy , получается семейство эллипсов с общим центром (μ_x, μ_y) . Во всех точках каждого из таких эллипсов ФПВ $f(x,y)$ постоянна, поэтому такие эллипсы называются *эллипсами равной плотности* или, *эллипсами рассеивания*. Общие оси всех эллипсов рассеивания называются *главными осями рассеивания*.

Для СВ с нулевым МО матрицей ковариаций Σ на рис. 7 представлены примеры ФПВ и изолинии (эллипсы рассеивания заданной вероятности): а) некоррелированные СВ с единичными дисперсиями $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$; б) некоррелированные СВ с дисперсиями $\sigma_x^2 = 1,5$ и $\sigma_y^2 = 0,5$; в) коррелированные СВ с единичными дисперсиями $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = 1$ и повернутым на угол θ эллипсом.

2.5. Эллипс рассеивания в главной и произвольной системах координат

Уравнение эллипса принимает наиболее простой *канонический вид*, если координатные оси совпадают с осями симметрии эллипса. Для того чтобы привести уравнение эллипса рассеивания к каноническому виду, достаточно перенести начало координат в точку (μ_x, μ_y) и повернуть координатные оси на θ , определяемый (4). При этом оси СК совпадут с главными осями рассеивания, и нормальный закон на плоскости преобразуется к каноническому виду [27]:

$$f(\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2}\right)}; B_k = \left\{ \xi_1, \xi_2 : \frac{\xi_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{\xi_2^2}{\sigma_2^2} = k^2 \right\} \quad (6)$$

где σ_1, σ_2 – главные СКО, т.е. СКО СВ (ξ_1, ξ_2) , представляющих собой координаты случайной точки в системе координат, определяемой главными осями рассеивания $0\xi_1, 0\xi_2$. Главные СКО σ_1, σ_2 выражаются через СКО в прежней СК [27]:

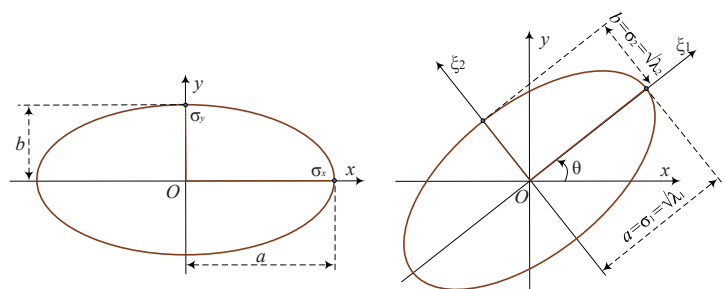
$$\begin{aligned} \sigma_1^2 &= \sigma_x^2 \cos^2\theta + r\sigma_x\sigma_y \sin 2\theta + \sigma_y^2 \sin^2\theta; \\ \sigma_2^2 &= \sigma_x^2 \sin^2\theta + r\sigma_x\sigma_y \sin 2\theta + \sigma_y^2 \cos^2\theta; \end{aligned}$$

Для удобства вероятностного анализа оценок точности позиционирования на плоскости следует выбрать координатные оси $0x, 0y$ так, чтобы они совпали с главными осями

эллипса рассеивания (рис. 8, а); при этом СКО σ_x, σ_y и будут главными средними квадратическими отклонениями, нормальный закон и уравнение эллипса рассеивания в каноническом виде будут иметь вид [27]:

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)}; \quad B_k = \left\{x, y: \frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = k^2\right\} \quad (7)$$

где k – постоянное число. Из уравнения (6, 7) следует, что полуоси эллипса рассеивания пропорциональны главным средним квадратическим отклонениям.



а) оси эллипса совпадают с осями СК б) оси эллипса повернуты относительно СК

Рис. 8. Поворот эллипса рассеивания

Единичным эллипсом рассеивания называют тот из эллипсов равной плотности вероятности, полуоси которого равны главным средним квадратическим отклонениям σ_1, σ_2 (или же σ_x, σ_y , если оси СК Ox, Oy совпадают с главными осями эллипса). Кроме единичного иногда рассматривают еще «полный» эллипс рассеивания, под которым понимают тот из эллипсов равной плотности вероятности, в который с практической достоверностью укладывается все рассеивание. Если принять за достоверность вероятность порядка 0,99, то полным эллипсом рассеивания можно считать эллипс с полуосями $3\sigma_x, 3\sigma_y$ с $k=3$ [27].

Рассмотрим ортогональное преобразование главных осей СК. Закон $f(x, y)$ можно получить преобразованием канонического закона при повороте главных осей ξ_1, ξ_2 на угол θ до совпадения с xOy матрицей поворота \mathbf{R} (рис. 8, б):

$$f(\mathbf{x}) = f(\boldsymbol{\xi})|_{\boldsymbol{\xi}=\mathbf{R}\mathbf{x}}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

В главной СК ξ_1, ξ_2 эллипсы равной плотности можно представить квадратичными формами с диагональной матрицей \mathbf{D}^{-1} [7]:

$$B_k = \{\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\xi} = k^2\}; \quad \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

Если векторы $\boldsymbol{\xi}$ и \mathbf{x} связаны преобразованием $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{R}\mathbf{x}$, то матрица \mathbf{D} получается преобразованием $\mathbf{D}=\mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}^T$ матрицы $\boldsymbol{\Sigma}$. Эллипс B_k в произвольной системе xOy образуется симметричной обратной матрицей $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}=\mathbf{R}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}$:

$$B_k = \{\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\xi} = k^2\} = \{\mathbf{x}; (\mathbf{R}\mathbf{x})^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}\mathbf{x} = k^2\} = \{\mathbf{x}; \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{D}^{-1} \mathbf{R}\mathbf{x} = k^2\}$$

где

$$\mathbf{D} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}^T \Rightarrow \mathbf{D}^{-1} = (\mathbf{R}^T)^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{R}^T \Rightarrow \boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{R}^T\mathbf{D}^{-1}\mathbf{R}$$

Для диагонализации $\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$ используется матрица поворота \mathbf{R} на угол θ

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (8)$$

После поворота эллипса на угол θ имеем диагональный вид \mathbf{D}^{-1} :

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{R}^T = \mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-2} & 0 \\ 0 & \sigma_2^{-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{-2} & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{bmatrix}$$

Тогда уравнение эллипса можно записать в виде:

$$\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{R}^T \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}^T \mathbf{D}^{-1} \boldsymbol{\xi} = 1; \quad a^{-2} < b^{-2}; \quad \boldsymbol{\xi} = \mathbf{R}\mathbf{x};$$

Поясним геометрический смысл ортогонализации на рис. 8. Пусть матрице ковариаций случайного двумерного вектора соответствует изображенный на рис. 8, б эллипс с параметрами a, b, θ . В СК $\xi_1O\xi_2$, выбранной как показано на рис. 8, б этому эллипсу будет соответствовать диагональная матрица ковариаций \mathbf{D} . Переход от представления вектора в системе координат xOy к его представлению в системе координат $\xi_1O\xi_2$, повернутой относительно оси Ox против часовой стрелки на угол θ , осуществляется с помощью матрицы \mathbf{R} . Таким образом, решение задачи ортогонализации сводится к нахождению матрицы преобразования \mathbf{R} от исходной СК xOy к системе координат $\xi_1O\xi_2$, направления осей которой совпадают с направлениями главных осей эллипса равных вероятностей.

2.6. Построение эллипса рассеивания по матрице ковариации

Если задана матрица ковариаций $\boldsymbol{\Sigma}$ случайного двумерного вектора \mathbf{x} , эта матрица недиагональная, и ее элементы определяют коэффициент корреляции между случайными величинами (x, y) – компонентами вектора \mathbf{x} . Вместе с тем, поскольку матрица $\boldsymbol{\Sigma}$ симметричная, она с помощью преобразования, задаваемого ортогональной матрицей \mathbf{R} , может быть приведена к диагональному виду

$$\mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}^T = \mathbf{D} = \{\lambda_i\} = \{\sigma_i^2\}, \quad i = 1, \dots, n$$

где $\mathbf{R}^T\mathbf{R}=\mathbf{I}$; $\mathbf{R}^T=(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$, а $\lambda_i, \mathbf{v}_i, i=1, \dots, n$ – собственные числа и собственные векторы матрицы $\boldsymbol{\Sigma}$:

$$\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{v}_i = \lambda_i\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Поскольку $\mathbf{D}=\mathbf{R}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{R}^T$ является матрицей ковариаций для вектора $\boldsymbol{\xi}=\mathbf{R}\mathbf{x}$, то случайный вектор \mathbf{x} с коррелированными компонентами (с недиагональной матрицей ковариаций $\boldsymbol{\Sigma}$) с помощью преобразования ортогональной матрицей \mathbf{R} может быть преобразован к новому вектору с некоррелированными (ортогональными) компонентами, для которого матрица ковариаций \mathbf{D} диагональная.

Задача нахождения ортогональной матрицы \mathbf{R} в теории матриц известна как задача диагонализации матрицы, а в приложении к случайным векторам – как задача ортогонализации компонент случайного вектора. В главных осях рассеивания лучше проявляются инвариантные свойства распределения и проще вычислять вероятности попадания случайной точки в заданную область.

В главных осях уравнение эллипса вероятности (5) имеет вид:

$$\frac{x^2}{\sigma_1^2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2} = k^2 \Rightarrow \frac{x^2}{(k\sigma_1)^2} + \frac{y^2}{(k\sigma_2)^2} = 1 \quad (9)$$

Выражение (9) показывает, что размеры главных СКО эллипсов равных значений ФПВ пропорциональны размерам их главных полуосей с коэффициентом пропорциональности k . Это значение определяет высоту соответствующего эллипса, получаемого горизонтальным сечением «колокола» гауссиана (рис. 7).

В качестве стандартного обычно рассматривают эллипс при $k=1$ с его главными СКО σ_1^2, σ_2^2 и соответствующими им безусловными СКО σ_x^2, σ_y^2 .

В задачах сетевого позиционирования для визуализации важными являются соотношения, устанавливающие связь элементов матрицы ковариаций с параметрами соответствующего ей эллипса. Собственные числа матрицы ковариаций $\lambda_1=a^2$ и $\lambda_2=b^2$, представляющие собой квадраты от малой и большой полуосей эллипса задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} a^2 &= \sigma_1^2 = \lambda_1 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(r\sigma_x\sigma_y)^2} \right) \\ b^2 &= \sigma_2^2 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sqrt{(\sigma_x^2 - \sigma_y^2)^2 + 4(r\sigma_x\sigma_y)^2} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Эти соотношения позволяют рассчитать параметры среднеквадратического эллипса для заданной матрицы ковариаций Σ .

2.7. Геометрическая интерпретация матрицы ковариации

Рассмотрим геометрическую интерпретацию ковариационной матрицы Σ , как меры разброса оценок координат \hat{x} на плоскости на примерах на рис. 9.

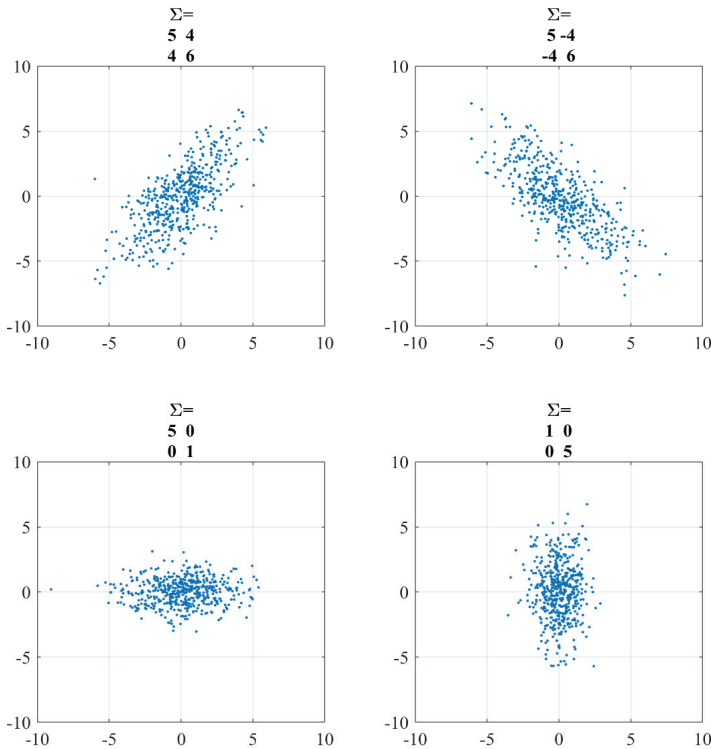


Рис. 9. Разброс СВ в 2D в зависимости от матрицы ковариации

Для визуализации разброса СВ в 2D можно оценить дисперсию $\sigma(x,x)$ в направлении x и дисперсию $\sigma(y,y)$ в направлении y . Однако, горизонтальный и вертикальный разброс выборок СВ не объясняют очевидную диагональную корреляцию на двух верхних графиках рис. 9, из которых следует, что, в среднем, если увеличивается координата x СВ, то возрастает и координата y СВ, что говорит о наличии положительной корреляции. Данная корреляция может быть охарактеризована расширением понятия *дисперсии* на понятие *ковариации*:

$$\sigma(x,y) = E\{(x - E[x])(y - E[y])\}$$

Для двумерной СВ можно оценить коэффициенты $\sigma(x,x), \sigma(y,y), \sigma(x,y)$ и $\sigma(y,x)$; четыре величины можно объединить в матрицу ковариации [29]

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma(x,x) & \sigma(x,y) \\ \sigma(y,x) & \sigma(y,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & r\sigma_x\sigma_y \\ r\sigma_x\sigma_y & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

Элементы $\sigma(x,x)=\sigma_x^2$ и $\sigma(y,y)=\sigma_y^2$ служат для оценки разброса координат \hat{x} в направлении, параллельном осям СК, а внедиагональные элементы $\sigma_{xy}=r\sigma_x\sigma_y$ определяют коэффициенты корреляции r ($|r|\leq 1$) СВ x и y . Если x положительно коррелирована с y , то и y положительно коррелирована с x ; т.е. $\sigma(x,y)=\sigma(y,x)$, следовательно, Σ симметрична и содержит дисперсии на главной и ковариации на побочной диагонали. Из графиков на рис. 9 следует, что разброс по диагонали определяется ковариациями $\sigma(x,y)=\sigma(y,x)$ на побочной диагонали, а разброс по осям СК x, y – дисперсиями $\sigma(x,x), \sigma(y,y)$ на главной диагонали соответственно.

2.8. Направление максимального рассеивания

Для верификации требований к позиционированию устройств в сверхплотных сетях 5G получим направление максимального разброса оценок координат. Такая задача возникает при обработке навигационной информации, например, при движении транспортного средства вдоль трассы наиболее важной представляется величина ошибки определения координат в направлении поперек трассы.

Для нахождения вектора направления максимального разброса его компоненты должны максимизировать $\mathbf{v}^T \Sigma \mathbf{v}$. Максимизация формы $\mathbf{v}^T \Sigma \mathbf{v}$ относительно искомого нормированного единичного вектора \mathbf{v} сводится к нахождению наибольшего собственного вектора матрицы Σ [30]. Из рис. 9 следует, что ковариационная матрица Σ определяет как величину, так и направление разброса. Σ можно разложить на *собственные вектора* \mathbf{v}_i и *собственные значения* λ_i , представляющие направление и величину разброса x . Обозначим вектор направления наибольшего разброса \mathbf{v} , тогда проекция данных СВ \mathbf{x} на этот вектор определяется как $\mathbf{v}^T \mathbf{x}$, а дисперсия проекции данных СВ определяется выражением $\mathbf{v}^T \Sigma \mathbf{v}$.

Полагая, что ошибка определения координат описывается как двухмерный случайный вектор, величина ошибки может быть найдена следующим образом. Пусть задан двухмерный случайный вектор $\mathbf{x}=[x,y]^T$ с МО $\boldsymbol{\mu}=[\mu_x, \mu_y]^T$ и матрицей ковариаций Σ . Найдем МО и дисперсию СВ $R=\mathbf{v}^T \mathbf{x}$, связанной с \mathbf{x} как

$$R = \mathbf{v}_1 x + \mathbf{v}_2 y$$

где v_1, v_2 – известные числа. Если в качестве \mathbf{v} принять $\mathbf{v}=(v_1, v_2)^T$, получим

$$\mu_R = v_1\mu_x + v_2\mu_y; \sigma_R^2 = v_1^2\sigma_x^2 + v_2^2\sigma_y^2 + 2v_1v_2\sigma_{xy}$$

Конкретизируем эту задачу, полагая, что компоненты x – координаты точки на плоскости, и требуется найти статистические характеристики СВ R , определяющей длину проекции вектора \mathbf{x} на некоторое произвольное направление, задаваемое единичным вектором $\mathbf{v} = [\cos\theta \sin\theta]^T$ (рис. 10). Величина, определяющая длину проекции, может быть представлена как

$$R = x\cos\theta + y\sin\theta$$

для ее математического ожидания и дисперсии можно записать:

$$\mu_R = \mu_x\cos\theta + \mu_y\sin\theta; \sigma_R^2 = \sigma_x^2\cos^2\theta + \sigma_y^2\sin^2\theta + \sigma_{xy}\sin 2\theta$$

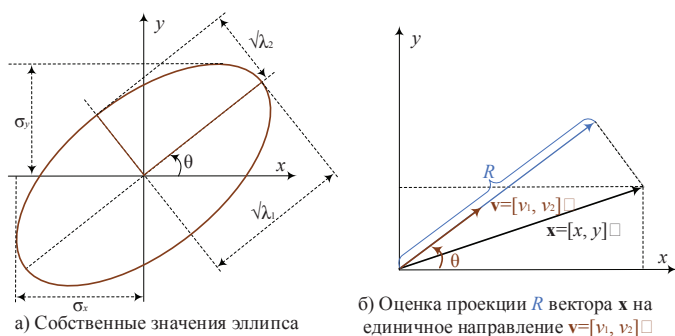


Рис. 10. Собственные значения эллипса рассеивания и оценка проекции вектора

В частности, если $\mathbf{x}=[x, y]^T$ – центрированный вектор, то величина, определяющая с учетом знака длину проекции на произвольное направление, также будет представлять собой центрированную СВ с дисперсией

$$\sigma_R^2 = [\cos\theta \sin\theta]\Sigma \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix} = \mathbf{v}^T \Sigma \mathbf{v} = \sigma_x^2\cos^2\theta + \sigma_y^2\sin^2\theta + \sigma_{xy}\sin 2\theta$$

При изменении направления θ единичного вектора \mathbf{v} меняется и значение дисперсии. Интересной представляется задача нахождения таких значений углов θ , при которых дисперсия принимает минимальное и максимальное значения. Ее решение определяют собственные числа матрицы ковариаций, характеризующие максимальное λ_1 и минимальное $\lambda_2, \lambda_1 > \lambda_2$, значения дисперсии, и соответствующие им собственные векторы. Если изначально матрица ковариаций диагональная, то направления, соответствующие наибольшему и наименьшему значениям дисперсий, совпадают с направлениями координатных осей, при этом $\lambda_1 = a^2, \lambda_2 = b^2$ (рис. 8, а). На рис. 11 представлен пример, когда компоненты двухмерного центрированного гауссовского вектора $\mathbf{x}=[x, y]^T$ описывают ошибки МП на плоскости, и матрица ковариаций этого вектора имеет вид:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ м}^2$$

Дисперсия СВ в направлении максимального разброса $\theta = 196,8^\circ$ при $\sigma_x^2 = 4, \sigma_y^2 = 1, \sigma_{xy} = 1$ будет равна 4,3 (рис. 11).

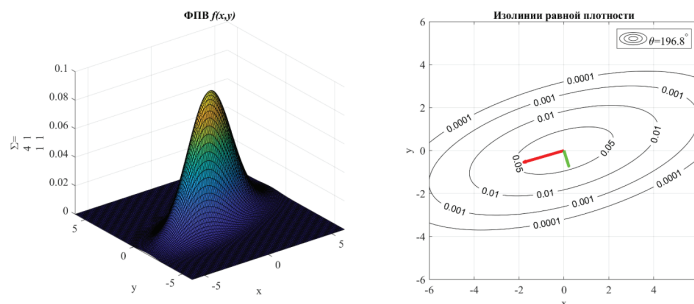


Рис. 11. ФПВ и угол наклона изолиний равной плотности

2.9. Вероятность попадания в эллипс рассеивания

Вероятность попадания в эллипс рассеивания может быть вычислена в конечном виде. Если нормальный закон $f(x, y)$ и эллипс рассеивания $B_{2,k}$ при $n=2$ для случая на плоскости в 2D заданы в канонической форме (7), где параметр k представляет собой отношение полуосей эллипса рассеивания к главным средним квадратическим отклонениям, то вероятность $P_{n,k}$ попадания точки $\mathbf{x}=[x, y]^T$ в область $B_{n,k}$ может быть получена интегрированием [27]:

$$P\{(x, y) \in B_{n,k}\} = \iint_{B_{n,k}} f(x, y) dx dy = 1 - e^{-k^2/2}$$

Например, вероятность попадания случайной точки, распределенной по нормальному закону в 2D, в единичный эллипс рассеивания, полуоси которого равны средним квадратическим отклонениям: $a = \sigma_x$ и $b = \sigma_y$, при $k=1$ равна [27]

$$P\{(x, y) \in B_{2,1}\} = 1 - e^{-1/2} \approx 0,393$$

Для эллипса с полуосями $a = 3\sigma_x$ и $b = 3\sigma_y, k=3$, следовательно

$$P\{(x, y) \in B_{2,3}\} = 1 - e^{-9/2} \approx 0,989$$

В работе [7] получены вероятности вычисления $P_{n,k}$ через Гамма-функцию, функцию Лапласа, функцию ошибок и функцию распределения хи-квадрат для случаев в 1D ($n=1$), 2D ($n=2$) и 3D ($n=3$) (табл. 2).

Таблица 2

Вероятность попадания в n -мерный эллипсоид рассеивания $P_{n,k}$

n	Через гамма-функцию $I(k^2/2, n/2)$	Через функцию Лапласа $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-t^2/2} dt$	через функцию ошибок $\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$	через функцию $F_{\chi^2}(k^2, n)$
$n=1$	$I(k^2/2, 1/2)$	$2\Phi(k)$	$\text{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right)$	$F_{\chi^2}(k^2, 1)$
$n=2$	$I(k^2/2, 1)$	$1 - e^{-k^2/2}$	$1 - e^{-k^2/2}$	$F_{\chi^2}(k^2, 2)$
$n=3$	$I(k^2/2, 3/2)$	$2\Phi(k) - \sqrt{2/\pi} k e^{-k^2/2}$	$\text{erf}\left(\frac{k}{\sqrt{2}}\right) - \sqrt{2/\pi} k e^{-k^2/2}$	$F_{\chi^2}(k^2, 3)$

2.10. Эллипс рассеивания заданной доверительной вероятности

Исходными данными для эллипса рассеивания являются матрица ковариаций Σ и доверительная вероятность p . Оси эллипса определяются СКО σ_x и σ_y и параметром k^2 . Если

выборки СВ \mathbf{x} некоррелированы, оси СК совпадают с главными осями эллипса и равны дисперсиям:

$$\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2} = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = k^2; \mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & 0 \\ 0 & \sigma_y^2 \end{bmatrix}$$

При построении эллипса заданной доверительной вероятности p требуется определить такое k^2 , при котором двумерная СВ $\mathbf{x} \sim \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$ попадает в эллипс с вероятностью p . Вероятность того, что k^2 имеет значение, не превышающее распределение χ^2 определяется квантилем с доверительной вероятностью p :

$$k^2 = \chi_{p,n}^2 = F_{\chi^2}^{-1}(p) \quad (11)$$

Решить (11) для эллипса в 2D можно используя таблицы распределения χ^2 , функцию Matlab $k^2 = \text{chi2inv}(p, 2)$, а также выражение

$$k^2 = -2 \ln(1 - p) \quad (12)$$

Так, например, при $p=0,9$, получаем $k^2=4,605$; при $p=0,95 \rightarrow k^2=5,991$; при $p=0,99 \rightarrow k^2=9,21$. Эллипс может быть построен с радиусами $k\sigma_x$ и $k\sigma_y$.

В общем случае, ковариации σ_{xy} и σ_{yx} не равны нулю и, поэтому, полуоси эллипса не совпадают с осями координат. Однако, предложенный подход все еще может быть использован с тем отличием, что вместо дисперсий, как показателей рассеивания, используются собственные числа ковариационной матрицы:

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y^2 \end{bmatrix} = \mathbf{R}^T \mathbf{D} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{R} \quad (13)$$

Собственные числа λ_1 и λ_2 являются дисперсиями в повернутой СК и характеризуют рассеивание в направлении собственных векторов \mathbf{v}_1 и \mathbf{v}_2 .

На рисунке 12 представлены эллипсы рассеивания для заданных доверительных вероятностей p .

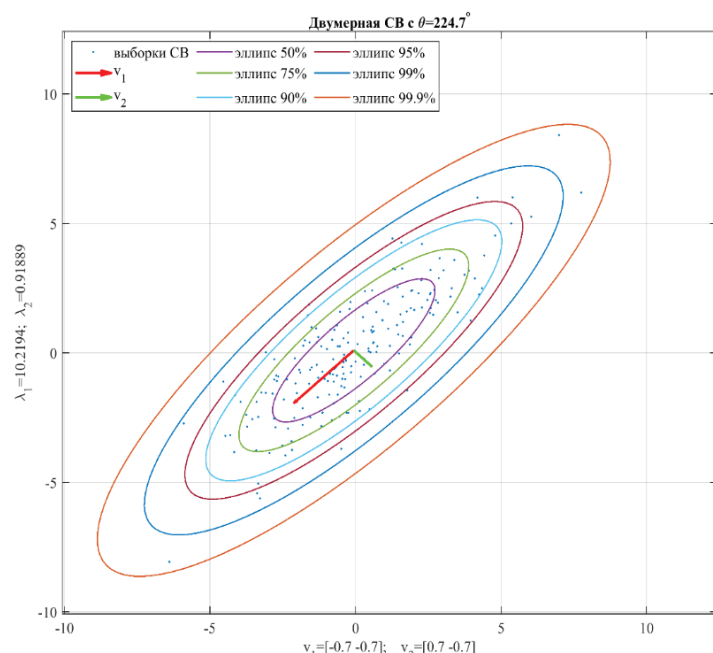


Рис. 12. Эллипсы рассеивания доверительного интервала в 2D

Например, доверительный интервал эллипса 95% означает, что лишь 5% реализаций двумерной СВ с нормальным распределением окажутся за пределами данного эллипса рассеивания; для попадания внутрь эллипса 95% реализаций двумерной СВ необходимо выбрать $k^2=5,991$, или, что то же самое, эллипс с диагональной матрицей $\mathbf{\Sigma}$ с доверительным интервалом 95% имеет большую $a = \sigma_x \sqrt{5,991} \sqrt{5,991 \lambda_1}$ и малую $b = \sigma_y \sqrt{5,991}$ полуоси.

Заключение

В настоящей работе программно реализован комплекс моделей и методов для оценки и визуализации точности позиционирования в сценариях сверхплотных сетей 5G, в частности, программно реализованы средства визуализации изолиний двумерной плотности вероятности, проиллюстрирована геометрическая интерпретации матрицы ковариации, направление максимального рассеивания и рассеивания заданной доверительной вероятности. Практическим результатом настоящей работы является программный инструмент для вероятностной оценки точности позиционирования по методу эллипса рассеивания при верификации требований спецификаций 3GPP по точности и доступности приложений геолокации в перспективной экосистеме сверхплотных радиосетей 5G.

Литература

1. Тихвинский В.О. Стандартизация мобильной связи 5G как процесс создания инфраструктурной основы цифровой экономики // Электросвязь. 2018. № 12. С. 24-30.
2. Тихвинский В.О. Технологии 5G – базис мобильной инфраструктуры цифровой экономики // Электросвязь. 2018. № 3. С. 48-55.
3. Тихвинский В.О. Сети 5G и IoT – инновационная среда для цифровой экономики России // Электросвязь. 2017. № 8. С. 18-24.
4. Wen F. H. et. al. A survey on 5G massive MIMO localization // Digital Signal Processing. 2019. vol. 94, pp. 21-28.
5. A. Hakkarainen et. al. High-Efficiency Device Localization in 5G Ultra-Dense Networks: Prospects and Enabling Technologies // IEEE 82nd Vehicular Technology Conference (VTC2015-Fall), Boston. 2015, pp. 1-5.
6. Roth J. D., Tummala M., McEachen J. C. Efficient System Geolocation Architecture in Next-Generation Cellular Networks // IEEE Systems Journal. 2018. vol. 12, no. 4, pp. 3414-3425.
7. Фокин Г.А. Технологии сетевого позиционирования. СПбГУТ, 2020. 558 с.
8. Фокин Г. А. Эволюция технологий позиционирования в сетях 2G-4G. Часть 1 // Первая миля. 2020. № 2 (87). С. 32-39.
9. Фокин Г. А. Эволюция технологий позиционирования в сетях 2G-4G. Часть 2 // Первая миля. 2020. № 3 (88). С. 30-35.
10. Фокин Г. А. Сценарии позиционирования в сетях 5G // Вестник связи. 2020. № 2. С. 3-9.
11. Фокин Г. А. Сценарии позиционирования в сетях 5G. Продолжение // Вестник связи. 2020. № 3. С. 13-21.
12. Фокин Г.А., Лазарев В.О. Оценка точности позиционирования источника радиоизлучения разностно-дальномерным и угломерным методами. Часть 3. 3D-моделирование // Труды учебных заведений связи. 2020. Т. 6. № 2. С. 87-102.
13. Лазарев В.О., Фокин Г.А. Оценка точности позиционирования источника радиоизлучения разностно-дальномерным и угломерным методами. Часть 1 // Труды учебных заведений связи. 2019. Т. 5. № 2. С. 88-100.
14. 3GPP TS 22.261 V17.3.0. Service requirements for the 5G system, Stage 1. 2020.

15. 3GPP TR 22.872 V16.1.0. Study on positioning use cases, Stage 1. 20 .
16. *Slock D.* Location aided wireless communications // 2012 5th International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, Rome, 2012, P. 1-6.
17. *Taranto R. Di. et. al.* Location-Aware Communications for 5G Networks: How location information can improve scalability, latency, and robustness of 5G // IEEE Signal Processing Magazine. 2014. Vol. 31, no. 6, pp. 102-112.
18. *Wymeersch H. et. al.* 5G mmWave Positioning for Vehicular Networks // IEEE Wireless Communications. 2017. vol. 24, no. 6, pp. 80-86.
19. *Liu Y., Shi X., He S., Shi Z.* Prospective Positioning Architecture and Technologies in 5G Networks // IEEE Network 2017. vol. 31, no. 6, pp. 115-121.
20. *Lemic F. et al.* Localization as a Feature of mmWave Communication // Wireless Commun. and Mobile Computing Conf. 2016, pp. 1033-38.
21. *Koivisto M. et al.* Joint Device Positioning and Clock Synchronization in 5G Ultra-Dense Networks // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2017. Vol. 16, no. 5, pp. 2866-2881.
22. *Koivisto M. et al.* High-Efficiency Device Positioning and Location-Aware Communications in Dense 5G Networks // IEEE Communications Magazine. 2017. Vol. 55, no. 8, pp. 188-195.
23. *M. Koivisto et al.* Continuous high-accuracy radio positioning of cars in ultra-dense 5G networks // 13th International Wireless Communications and Mobile Computing Conference (IWCMC), Valencia, 2017, pp. 115-120.
24. *Черняк В. С., Заславский Л. П., Осипов Л. В.* Многопозиционные радиолокационные станции и системы // Зарубежная радиоэлектроника. 1987. № 1. С.9-69.
25. *Torrieri D. J.* Statistical Theory of Passive Location Systems // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems 1984 vol. AES-20, no. 2, pp. 183-198.
26. *Reza Zekavat, R. Michael Buehrer.* Handbook of Position Location: Theory, Practice, and Advances, 2nd Edition. John Wiley & Sons, 2019. 1376 p.
27. *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей: Учеб. для вузов. 6-е изд. стер. М.: Высш. шк., 1999. 576 с.
28. *Платонов А. К., Иванов Д. С.* Методы обработки измерений // М.: МФТИ. 2013. https://www.keldysh.ru/microsatellites/Measurement_processing_methods.pdf (Дата обращения 21.07.2020).
29. <https://www.visiondummy.com/2014/04/geometric-interpretation-covariance-matrix/> (Дата обращения 21.07.2020).
30. <https://www.visiondummy.com/2014/04/draw-error-ellipse-representing-covariance-matrix/> (Дата обращения 21.07.2020).

5G NETWORK POSITIONING AND STATISTIC MODELS FOR ITS ACCURACY EVALUATION

Grigoriy A. Fokin, *The Bonch-Bruевич St. Petersburg State University of Telecommunications, St. Petersburg, Russia,*
grihafokin@gmail.com

Abstract

The relevance of issues of network positioning in general, and methods of assessing accuracy in particular, is due to the fact that technologies for location estimation by means of infrastructure of deployed and projected mobile radio communication networks have received a new impetus for development. This is due to a number of objective factors in recent years, which are the result of ongoing evolution at the next stage of the transition to 5G networks. If in the networks of previous generations 2G-4G geolocation was an optional service, which developed mainly according to the requirements of emergency services and law enforcement, as well as in scenarios when signals from global navigation satellite systems (GNSS) were unavailable, then for a promising 5G digital ecosystem, network positioning can rightfully be stated as a separate area of research and development. The arguments for this statement are at least two circumstances. First, in recent years, a wide range of geoinformation services has been developed, which are impossible and / or inappropriate to solve exclusively by GNSS systems. It is also indicative that in the latest specifications of the 3GPP partner project, among others, there were explicit requirements for the accuracy and availability of network positioning services, as well as a description of all possible geolocation scenarios with an accuracy of one meter. Secondly, the analysis of foreign sources in recent years has shown that the so-called concept of communication organization based on LAC (Location Aware Communication) positioning data has been developed, according to which location awareness can be used at different levels of the OSI model for improving the efficiency of building and operating radio stations as part of ultra-dense 5G radio access networks. In this paper, positioning scenarios in 5G networks are systematized, as well as probabilistic models and methods for assessing the accuracy of geolocation in relation to the problems of location estimation in 5G networks. In the first part of this paper, scenarios of network positioning for the 5G ecosystem are presented, in particular: specifics of organizing radio communications based on location data are presented; the development trends of positioning technologies in 5G networks are formulated; analyzes 3GPP requirements for positioning in 5G networks. In the second part of this work, the results of the development and software implementation of tools for probabilistic assessment and visualization of positioning accuracy along the scattering ellipse are presented.

Keywords: *network positioning, 5G ecosystem, radio access network, super-dense networks, positioning, scattering ellipse*

References

1. Tikhvinsky V.O. (2018). Standardization of 5G mobile communications as a process of creating an infrastructural basis for the digital economy. *Electrosvyaz*, no. 12, pp. 24-30. (in Russian)
2. Tikhvinsky V.O. (2018). 5G technologies – the basis of the mobile infrastructure of the digital economy. *Electrosvyaz*, no. 3, pp. 48-55. (in Russian)
3. Tikhvinsky V.O. (2017). 5G and IoT networks – an innovative environment for the digital economy of Russia. *Electrosvyaz*, 2017. no. 8, pp. 18-24. (in Russian)
4. Wen F. H. et. al. (2019). A survey on 5G massive MIMO localization. *Digital Signal Processing*, vol. 94, pp. 21-28.
5. A. Hakkarainen et. al. (2015). High-Efficiency Device Localization in 5G Ultra-Dense Networks: Prospects and Enabling Technologies. *IEEE 82nd Vehicular Technology Conference (VTC2015-Fall)*, Boston, pp. 1-5.
6. Roth J. D., Tummala M., McEachen J. C. (2018). Efficient System Geolocation Architecture in Next-Generation Cellular Networks. *IEEE Systems Journal*, vol. 12, no. 4, pp. 3414-3425.
7. Fokin G. A. (2020). Technologies of network positioning. SPbSUT, 558 p. (in Russian)
8. Fokin G. A. (2020). Evolution of positioning technologies in 2G-4G networks. Part 1. *First mile*, no. 2 (87), pp. 32-39. (in Russian)
9. Fokin G. A. (2020). Evolution of positioning technologies in 2G-4G networks. Part 2. *First Mile*, no. 3 (88), pp. 30-35. (in Russian)
10. Fokin G. A. (2020). Positioning scenarios in 5G networks. *Vestnik sviazy*, no. 2, pp. 3-9. (in Russian)
11. Fokin G. A. (2020). Positioning scenarios in 5G networks. Continuation. *Vestnik sviazy*, no. 3, pp. 13-21. (in Russian)
12. Fokin G., Lazarev V. (2020). Positioning Accuracy Evaluation of Radio Emission Sources Using Time Difference of Arrival and Angle of Arrival Methods. Part 3. 3D-Simulation. *Proc. of Telecom. Universities*. No. 6 (2), pp. 87-102. (in Russian)
13. Lazarev V., Fokin G. (2019). Positioning Accuracy Evaluation of Radio Emission Sources Using Time Difference of Arrival and Angle of Arrival Methods. Part 1. *Proceedings of Telecommunication Universities*. no. 5(2), pp. 88-100. (in Russian)
14. 3GPP TS 22.261 V17.3.0 (2020). Service requirements for the 5G system, Stage 1.
15. 3GPP TR 22.872 V16.1.0 (2018) Study on positioning use cases, Stage 1.
16. Slock D. (2012). Location aided wireless communications. *5th International Symposium on Communications, Control and Signal Processing*, Rome, pp. 1-6.
17. Taranto R. Di. et. al. (2014). Location-Aware Communications for 5G Networks: How location information can improve scalability, latency, and robustness of 5G. *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 31, no. 6, pp. 102-112.
18. Wymeersch H. et. al. (2017). 5G mmWave Positioning for Vehicular Networks. *IEEE Wireless Communications*, vol. 24, no. 6, pp. 80-86.
19. Liu Y., Shi X., He S., Shi Z. (2017). Prospective Positioning Architecture and Technologies in 5G Networks. *IEEE Network*, vol. 31, no. 6, pp. 115-121.
20. Lemic F. et al. (2016). Localization as a Feature of mmWave Communication. *Wireless Commun. and Mobile Computing Conf.*, pp. 1033-38.
21. Koivisto M. et al. (2017). Joint Device Positioning and Clock Synchronization in 5G Ultra-Dense Networks. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 16, no. 5, pp. 2866-2881.
22. Koivisto M. et al. (2017). High-Efficiency Device Positioning and Location-Aware Communications in Dense 5G Networks. *IEEE Communications Magazine*, vol. 55, no. 8, pp. 188-195.
23. M. Koivisto et al. (2017). Continuous high-accuracy radio positioning of cars in ultra-dense 5G networks. *13th International Wireless Communications and Mobile Computing Conference (IWCMC)*, Valencia, pp. 115-120.
24. Chernyak V. S., Zaslavsky L. P. Osipov L. V. (1987). Multi-position radio-location stations and systems. *Foreign radio electronics*, no. 1, pp. 9-69. (in Russian)
25. Torrieri D. J. (1984). Statistical Theory of Passive Location Systems. *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. AES-20, no. 2, pp. 183-198.
26. Reza Zekavat, R. Michael Buehrer. (2019). Handbook of Position Location: Theory, Practice, and Advances, 2nd Edition. John Wiley & Sons, 1376 p.
27. Wentzel E.S. (1999). Probability theory: Textbook. for universities. 6th ed. erased. Moscow: Higher. shk., 576 p.
28. Platonov A. K., Ivanov D. S. (2013). Methods of processing measurements. Moscow: MIPT. https://www.keldysh.ru/microsatellites/Measurement_processing_methods.pdf (Accessed 21.07.2020). (in Russian)
29. <https://www.visiondummy.com/2014/04/geometric-interpretation-covariance-matrix/> (Accessed 21.07.2020).
30. <https://www.visiondummy.com/2014/04/draw-error-ellipse-representing-covariance-matrix/> (Accessed 21.07.2020)

Information about author:

Grigoriy A. Fokin, candidate of technical sciences, do-cent, associate professor of the department of radio communications and broadcasting of the Bonch-Bruевич St. Petersburg State University of Telecommunications, St. Petersburg, Russia