# ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК РАССЕЯНИЯ В ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩЕМ ТЕЛЕ С КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

DOI: 10.36724/2072-8735-2025-19-2-15-22

**Manuscript received** 24 Decemberr 2024;
**Accepted** 21 January 2025

***Ключевые слова:*** *диаграмма рассеяния, метод диаграммных уравнений, метод Т-матриц, краевое условие Дирихле, краевое условие Неймана, прямоугольник со скруглениями, треугольник со скруглениями, овал Кассини, оптическая теорема*

**Демин Дмитрий Борисович,**
*Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия,* **d.b.demin@mtuci.ru**

**Данная работа посвящена исследованию характеристик рассеяния телами, представляющими собой бесконечный цилиндр произвольного сечения, на границе которого выполняются идеальные краевые условия. Выбор таких рассеивателей сводит решение исходной краевой задачи к двумерной задаче дифракции. При этом граница рассеивателя представляет собой плоский контур. В качестве основных геометрий рассматривались тела с кусочно-аналитической границей, а именно: прямоугольник и конус со скруглениями. Полученные характеристики рассеяния для таких геометрий сравнивались с теми, которые были получены для аналитических контуров: суперэллипс и овал Кассини. Цель работы – продемонстрировать корректность и точность использования известного численного метода решения задач дифракции и рассеяния волн – метода диаграммных уравнений (МДУ), для вычисления характеристик рассеяния тел с кусочно-аналитической границей. Рассматривалась двумерная задача дифракции на телах с идеальными краевыми условиями (условия Дирихле и Неймана). При помощи численного алгоритма МДУ были получены характеристики рассеяния для таких геометрий тел с кусочно-аналитической границей как: прямоугольник со скруглениями и конус со скруглениями. Для подтверждения точности результаты расчета для прямоугольника со скруглениями сравнивались с расчетами, полученными для аналитической геометрии, а именно, для овала Кассини. Также проводились сравнения вычислений, полученных другими численными методами (метод Т-матриц и метод моментов). Для всех численных расчетов проводилась проверка оптической теоремы.**

***Информация об авторе:***
***Демин Дмитрий Борисович,*** *доцент кафедры "теории вероятностей и прикладной математики", к.ф.-м.н., доцент, Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*

**Для цитирования:**
*Демин Д.Б.* Исследование характеристик рассеяния в двумерной задаче дифракции на идеально проводящем теле с кусочно-аналитической границей // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2025. Том 19. №2. С. 15-22.
**For citation:**
D. B. Demin, "Study of scattering characteristics in a two-dimensional diffraction problem on a perfectly conducting body with a piecewise analytic boundary," *T-Comm*, 2025, vol. 19, no.2, pp. 15-22. (*in Russian*)

## Введение

Данная работа посвящена исследованию характеристик рассеяния телами, представляющими собой бесконечный цилиндр произвольного сечения, на границе которого выполняются идеальные краевые условия (рис. 1). Выбор таких рассеивателей сводит решение исходной краевой задачи к двумерной задаче дифракции. При этом граница рассеивателя представляет собой плоский контур. В качестве основных геометрий рассматривались тела с кусочно-аналитической границей, а именно: прямоугольник и конус со скруглениями (см. рис. 2). Полученные характеристики рассеяния для таких геометрий сравнивались с теми, которые были получены для аналитических контуров: суперэллипс и овал Кассини.

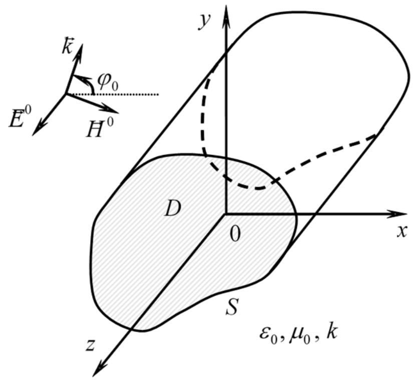



**Рис. 1.** Геометрия задачи (случай E поляризации)

Это сравнение достигалось тем, что размеры тел с кусочно-аналитической границей подбирались так, чтобы эти тела были как бы вписанными или близкими по форме к телам с аналитической границей.

При рассмотрении тел, чьи размеры соизмеримы с длиной волны падающего поля, чаще всего используют численные методы. Наиболее известные из них это методы интегральных уравнений. К ним относятся метод моментов, метод конечных элементов, метод Т-матриц (МТМ) и др. При рассмотрении тел больших размеров (по отношению к длине волны падающего поля) в основном используют асимптотические методы, такие как: методы физической и геометрической оптики и различные модификации указанных выше численных методов.

Для решения поставленной задачи применялся метод диаграммных уравнений (МДУ). МДУ – это универсальный численно-аналитический метод, позволяющий решать любую задачу дифракции и рассеяния волн как в двумерном, так и в трехмерном случае. Обоснование этого метода впервые было опубликовано в [1], где приведен алгоритм МДУ для решения двумерной задачи дифракции на импедансном теле. МДУ также относится к методам интегральных уравнений, но, в отличии от большинства численных методов, искомой характеристикой в нем является не волновое поле или токовая характеристика, а диаграмма рассеяния, отсюда и название этого метода.

Как было показано ранее, МДУ можно применять к телам различной геометрии как больших (несколько длин волн падающего поля), так и малых размеров (для этого были получены различные его модификации), с любыми краевыми условиями на границе (поверхности) тела [2-4]. Этот метод, в отличии от большинства других численных методов, имеет строгое математическое обоснование и условия применимости, которые, в случае двумерной задачи дифракции, приведены в [1-2]. Численные исследования алгоритма МДУ для двумерных импедансных тел (частным случаем которых являются идеально проводящие тела) и его сравнение с методом Т-матриц, приведены в [5]. Так было доказано, что численный алгоритм МДУ устойчив для всех так называемых слабо невыпуклых тел, к каковым относятся и все выпуклые тела. Что отличает его от метода Т-матриц, который применим в основном к так называемым рэлеевским телам (смысл этого понятия подробно приведен в [2, 5]). Класс слабо невыпуклых тел гораздо шире класса рэлеевских тел. При этом МДУ вполне пригоден для тел с кусочно-аналитической границей и другими неровностями, что было продемонстрировано в работе [6], в которой рассматривалась более сложная трехмерная векторная задача дифракции. Тела с изломами границы всегда можно представить в виде их модели с кусочно-аналитической границей, т.е. когда углы и острые неровности округляются или сглаживаются.

В работе показано сравнение диаграмм рассеяния, вычисленных при помощи алгоритма МДУ, с теми, которые были получены другими методами (методом Т-матриц, методом моментов). Для обоснования сходимости численного алгоритма МДУ, помимо сравнения диаграмм рассеяния, проводилась проверка оптической теоремы.

## Постановка задачи

Рассмотрим двумерную задачу дифракции, случай *E* поляризации, когда вектор электрической напряженности $\vec{E}(\vec{r})$ имеет единственную составляющую, параллельную оси симметрии *Oz* (бесконечного) цилиндрического тела с гладкой направляющей *S* (см. рис. 1). Введем обозначение:

$$\vec{E}(\vec{r}) = u(\vec{r}) \cdot \vec{i}_z, \tag{1}$$

где $u(\vec{r}) = u = u^0 + u^1$ – полное (скалярное или акустическое) поле вне цилиндрического тела (т.е., вне границы *S*). Здесь $u^0$ – первичное (падающее) поле, а $u^1$ – вторичное (рассеянное или дифракционное) поле, которое, как известно, всюду вне *S* удовлетворяет однородному волновому уравнению Гельмгольца

$$\Delta u^1 + k^2 u^1 = 0, \tag{2}$$

где $k = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – волновое число во внешней среде, и условию излучения Зоммерфельда на бесконечности, имеющее следующий вид в двумерном случае:

$$\lim_{r \to \infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u^1}{\partial r} + iku^1\right) = 0, \tag{3}$$

где $r$ – длина радиус-вектора $\vec{r}$ точки наблюдения.

Будем рассматривать два случая краевых условий на границе *S*, а именно: условие Дирихле (мягкое краевое условие) вида:

$$u|_s = 0, \tag{4}$$

и условие Неймана (жесткое краевое условие) вида:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = 0\,. \tag{5}$$

В соотношении (5) $\dfrac{\partial}{\partial n}$ обозначает производную по направлению, которая берется вдоль плоского вектора внешней нормали $\vec{n}$ к контуру $S$.

### Математическая формулировка МДУ

Будем следовать работе [1]. Основу МДУ составляет сведение исходной краевой задачи (здесь 2-5) для уравнения Гельмгольца к интегро-алгебраическому уравнению (интегральному уравнению II рода) относительно диаграммы рассеяния (т.е. спектральной функции волнового поля), определяющей рассеянное поле в дальней зоне.

Всюду в $R^2 \setminus \overline{B}_0$ (где $\overline{B}_0$ – выпуклая оболочка особенностей продолжения поля $u^1$ внутрь рассеивателя, $\overline{B}_0 \subseteq \overline{D}$, $D$ – область внутри границы $S$) рассеянное поле $u^1(r,\varphi)$ (здесь и далее $r,\varphi$ – полярные координаты точки) представимо следующим интегралом плоских волн (интегралом Зоммерфельда):

$$u^1(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2-i\infty}^{\pi/2+i\infty} g(\varphi+\psi)\exp(-ikr\cos\psi)\,d\psi\,, \tag{6}$$

где $g(\varphi)$ – диаграмма рассеяния волнового поля $u^1$, связанная с ним асимптотическим равенством

$$u^1(r,\varphi) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}}\cdot\exp\left(-ikr+i\frac{\pi}{4}\right)\cdot g(\varphi) + O\left(\frac{1}{(kr)^{3/2}}\right),$$
$$kr\to\infty. \tag{7}$$

Множество $\overline{B}_0$ полностью определяется видом диаграммы $g(\varphi)$.

Воспользуемся волновым соотношением Грина для поля $u^1$:

$$u^1(\vec{r}) = \frac{i}{4}\int_S\left(\frac{\partial u}{\partial n'} - u\frac{\partial}{\partial n'}\right)H_0^{(2)}(k\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|)\,ds'\,, \tag{8}$$

в котором функция $H_0^{(2)}(k\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|)$ есть функция Грина для двумерного случая, представляющая собой цилиндрическую функцию Ганкеля второго рода и нулевого порядка.

Дальнейшая наша цель состоит в том, чтобы свести соотношение (8) к алгебраической системе МДУ. Для этого существует два основных способа. Первый состоит в алгебраизации интегрального уравнения относительно диаграммы рассеяния. Покажем это.

Подставляя в (8) соотношение (7), используя асимптотику функции $H_0^{(2)}$ (см. [1-2]) и формулы

$$\frac{\partial}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}}\left(\rho(\varphi)\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right),$$

$$ds = \sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}\,d\varphi\,,$$

получим следующее интегральное уравнение II рода для диаграммы рассеяния:

$$g(\alpha) = g^0(\alpha) + \frac{1}{\pi}\;{}^{2\pi}_{0}\;{}^{\pi/2+i\infty}_{-\pi/2-i\infty}\qquad\frac{k}{4}$$
$$\times\exp\big(-ik\rho(\phi)\big(\cos\psi-\cos(\alpha-\phi)\big)\big)\,d\psi\,d\phi \tag{9}$$

в котором

$$g^0(\alpha) = \int_0^{2\pi}\nu^0(\varphi)\exp\big(ik\rho(\varphi)\cos(\alpha-\varphi)\big)\,d\varphi\,. \tag{10}$$

Здесь и далее $\rho=\rho(\varphi)$ – уравнение контура $S$ в полярных координатах.

Вид функции $\nu^0(\varphi)$ в (10) полностью определяется через краевое условие. Именно, в случае краевого условия (4):

$$\nu^0(\varphi) = \frac{i}{4}\left(\rho(\varphi)\frac{\partial u^0}{\partial r} - \frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)}\frac{\partial u^0}{\partial\varphi}\right), \tag{11а}$$

а в случае краевого условия (5):

$$\nu^0(\varphi) = \frac{k}{4}u^0\big[\rho(\varphi)\cos(\alpha-\varphi) - \rho'(\varphi)\sin(\alpha-\varphi)\big]. \tag{11б}$$

Подставляя в (9) разложения функций $g(\alpha)$ и $g^0(\alpha)$ в ряды Фурье вида:

$$g(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m i^m e^{im\varphi}\,,\quad g^0(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m^0 i^m e^{im\varphi}\,, \tag{12}$$

придем к требуемой алгебраической системе уравнений МДУ:

$$c_m = c_m^0 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} G_{mn}c_n\,,\ m = 0,\pm1,\pm2,\ldots, \tag{13}$$

искомыми величинами в которой являются коэффициенты $c_m$ разложения диаграммы рассеяния $g(\varphi)$ в ряд Фурье (см. (12)).

Второй способ алгебраизации состоит в следующем. В этом способе не используется интегральное уравнение (9)-(10), а используется только соотношение (8) и разложение дифракционного поля $u^1$ в ряд Фурье (по аналогии с разложением диаграммы рассеяния) вида:

$$u^1(r,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n H_n^{(2)}(kr)e^{in\varphi}\,, \tag{14}$$

в котором $H_n^{(2)}(kr)$ – цилиндрические функции Ганкеля 2-го рода и $n$-го порядка.

Подставляя, далее, ряд (14) в (8) с учетом краевого условия (4) или (5) и с использованием разложения функции $H_0^{(2)}(k\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|)$ в аналогичный ряд Фурье вида

$$H_0^{(2)}(k\,|\,\vec{r}-\vec{r}\,'\,|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(kr')H_n^{(2)}(kr)e^{in(\varphi-\varphi')}\,,$$
$$(\,r > r_1 = \max_{\varphi}\rho(\varphi)\,), \tag{15}$$

придем к аналогичной системе уравнений МДУ вида (13), матричные коэффициенты $G_{mn}$ в которой в случае краевого условия Дирихле (4):

$$G_{mn} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(ik\rho(\phi)H_n'^{(2)}(k\rho(\phi)) + n\frac{\rho'(\phi)}{\rho(\phi)}H_n^{(2)}(k\rho(\phi))\right)\times \tag{16a}$$
$$\times J_m(k\rho(\phi))e^{i(n-m)\phi}d\phi$$

а в случае краевого условия Неймана (5):

$$G_{mn} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}H_n^{(2)}(k\rho(\phi))\times$$
$$\times\left(-ik\rho(\phi)J_m'(k\rho(\phi)) + m\frac{\rho'(\phi)}{\rho(\phi)}J_m(k\rho(\phi))\right)e^{i(n-m)\phi}d\phi. \tag{16б}$$

В формулах (16а) и (16б) величины $J_m(k\rho(\varphi))$ обозначают цилиндрические функции Бесселя $m$-го порядка.

Коэффициенты $c_m^0$ правой части системы МДУ (13) имеют следующий вид:
в случае краевого условия Дирихле (4):

$$c_m^0 = \int_0^{2\pi}v^0(\varphi)J_m(k\rho(\varphi))\exp(-im\varphi)d\varphi, \tag{17a}$$

а в случае краевого условия Неймана (5):

$$c_m^0 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}u^0\left(-ik\rho(\varphi)J_m'(k\rho(\varphi)) + m\frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)}J_m(k\rho(\varphi))\right)e^{-im\varphi}d\varphi \tag{17б}$$

Если первичное поле $u^0$ есть плоская волна, т.е.

$$u^0(r,\varphi) = e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)},$$

где $\varphi_0$ – угол падения плоской волны относительно оси О$x$, то в случае краевого условия Дирихле:

$$c_m^0 = \frac{k}{4}\int_0^{2\pi}\left[\rho(\phi)\cos(\phi-\phi_0) + \rho'(\phi)\sin(\phi-\phi_0)\right]J_m(k\rho(\phi))\times \tag{18a}$$
$$\times e^{-ik\rho(\phi)\cos(\phi-\phi_0)-im\phi}d\phi,$$

а в случае краевого условия Неймана:

$$c_m^0 = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\left(-ik\rho(\phi)J_m'(k\rho(\phi)) + m\frac{\rho'(\phi)}{\rho(\phi)}J_m(k\rho(\phi))\right)\times \tag{18б}$$
$$\times e^{-ikr\cos(\phi-\phi_0)-im\phi}d\phi.$$

**Математическая формулировка МТМ**

Изложим кратко математическую формулировку МТМ. В отличии от МДУ, исходным уравнением в этом методе является так называемое уравнение нулевого поля [5, 7-8]:

$$\frac{i}{4}\int_S\left(\frac{\partial u}{\partial n'} - u\frac{\partial}{\partial n'}\right)H_0^{(2)}(k|\vec{r}-\vec{r}'|)ds' = -u^0(\vec{r}),\ \vec{r}\in D. \tag{19}$$

МТМ, как и МДУ, сводит исходную краевую задачу к решению алгебраической системы уравнений относительно неизвестных коэффициентов $c_n$ разложения рассеянного поля $u^1$ в ряд (14). Для вывода этой системы будет следовать работе [3]. Введем вспомогательную функцию $J(\varphi)$, которая в случае краевого условия Дирихле определяется как: $J(\varphi) = \frac{i}{4}\frac{\partial u}{\partial n}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}$, а в случае краевого условия Неймана: $J(\varphi) = \frac{i}{4}u(r,\varphi)$. Положим:

$$J(\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}b_m e^{im\varphi}. \tag{20}$$

Тогда, подставляя разложение (20) в левую часть (19), а также используя разложения:

$$u^0(r,\varphi) = e^{-ikr\cos(\varphi-\varphi_0)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-i)^n J_n(kr)e^{in(\varphi-\varphi_0)},$$

$$H_0^{(2)}(k|\vec{r}-\vec{r}'|) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(kr)H_n^{(2)}(kr')e^{in(\varphi-\varphi')},\ (r<\min_{\phi}\rho(\phi)),$$

получим из (19) следующую систему:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}H_{nm}b_m = a_n,\ n = 0,\pm1,\pm2,... \tag{21}$$

где

$$H_{nm} = \int_0^{2\pi}H_n^{(2)}(k\rho)e^{i(m-n)\varphi}d\varphi \text{ (для условия Дирихле)}, \tag{22a}$$

$$H_{nm} = -\int_0^{2\pi}\left(k\rho(\varphi)H_n'^{(2)}(k\rho) + in\frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)}H_n^{(2)}(k\rho)\right)e^{i(m-n)\varphi}d\varphi$$
(для условия Неймана), (22б)

$$a_n = -(-i)^n e^{-in\varphi_0}. \tag{23}$$

Для получения второй системы МТМ, связывающей коэффициенты $b_m$ с $c_n$, необходимо воспользоваться соотношением (8), которое, с учетом краевых условий (4) или (5), примет один из следующих двух видов:

$$u^1(\vec{r}) = \int_0^{2\pi}J(\varphi')H_0^{(2)}(k|\vec{r}-\vec{r}'|)d\varphi'$$ (для краевого условия Дирихле), (24а)

$$u^1(\vec{r}) = -\int_S J(\varphi')\frac{\partial}{\partial n'}H_0^{(2)}(k|\vec{r}-\vec{r}'|)ds'$$ (для краевого условия Неймана).(24б)

Далее, подставляя в одно из соотношений (24а) или (24б) разложения (14), (15) и (20), придем к системе вида:

$$c_n = \sum_{m=-\infty}^{\infty}Q_{nm}b_m,\ n = 0,\pm1,\pm2,... \tag{25}$$

где

$$Q_{nm} = \int_0^{2\pi}J_n(k\rho)e^{i(m-n)\varphi}d\varphi$$ (для краевого условия Дирихле), (26а)

$$Q_{nm} = -\int_0^{2\pi}\left(k\rho(\varphi)J_n'(k\rho) + in\frac{\rho'(\varphi)}{\rho(\varphi)}J_n(k\rho)\right)e^{i(m-n)\varphi}d\varphi$$
(для краевого условия Неймана). (26б)

В матричных обозначениях алгебраические системы МТМ можно записать следующим образом:

$$H\overline{b} = \overline{a}\,,\ \overline{c} = Q\overline{b}\,. \qquad (27)$$

В результате из (27) придем к

$$\overline{c} = Q\overline{b} = QH^{-1}\overline{a} = T\overline{a}\,, \qquad (27а)$$

где $T = QH^{-1}$ является так называемой Т-матрицей (матрицей перехода от одной системы к другой). Отсюда произошло и название самого метода.

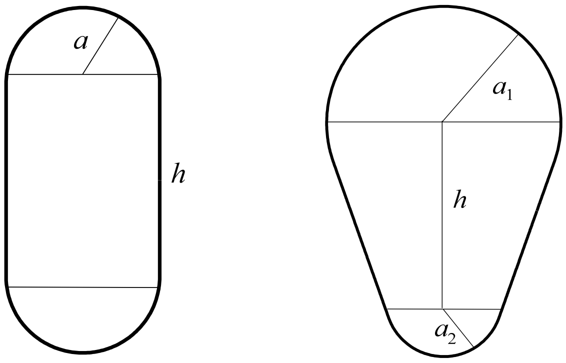
### Численные результаты

При численной реализации приведенного выше алгоритма МДУ рассматривалась конечная алгебраическая система уравнений вида:

$$c_m = c_m^0 + \sum_{n=-N}^{N} G_{mn} c_n\,, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm N\,, \qquad (13а)$$

в которой число $N$ есть наибольшее число гармоник при разложении диаграммы рассеяния $g(\varphi)$ в ряд (13). Аналогичная ситуация будет и в МТМ: каждая из систем (21) и (25) будет рассматриваться как конечная с тем же размером матриц, что и в МДУ, поэтому число $N$ будет также обозначать и наибольшее число гармоник в численном алгоритме МТМ.

В качестве геометрий сечений бесконечного цилиндра с кусочно-аналитической границей были выбраны такие геометрии как: прямоугольник со скруглениями (рис. 2а) и треугольник со скруглениями (рис.2б). Параметры прямоугольника со скруглениями следующие: $a$ – радиусы верхнего и нижнего полукругов, $h$ – расстояние между центрами двух полуокружностей (т.е. высота прямоугольной части). Геометрия треугольника со скруглениями имеет следующие параметры: $a_1$ и $a_2$ – радиусы верхнего и нижнего полукругов, $h$ – расстояние между центрами двух круговых частей.



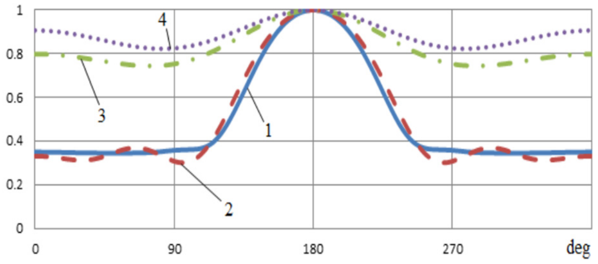

а) б)

**Рис. 2.** Геометрии тел с кусочно-аналитической границей

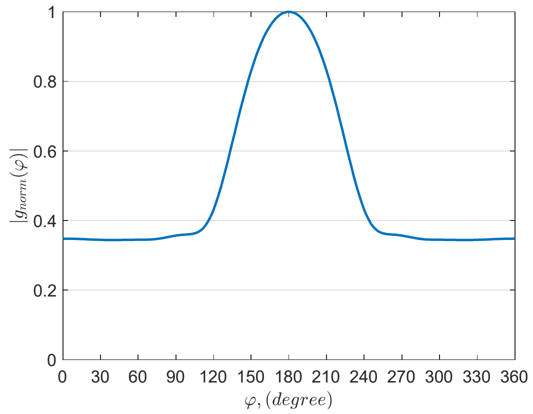
Остановимся теперь на результатах расчета характеристик рассеяния для указанных выше геометрий тел. Выберем размеры прямоугольника и треугольника со скруглениями аналогичными тем, что в работах [9] и [10]. Именно, для прямоугольника со скруглениями были выбраны размеры $a = 1,\ h = 5$ (см. [8]), а для треугольника со скруглениями: $a_1 = 3,\ a_2 = 1,\ h = 5$ (см. [9]).

На рисунке 3-6 приведены диаграммы рассеяния выбранных тел с учетом краевых условий Дирихле и Неймана. При этом рисунки 3б-6б показывают диаграммы рассеяния, полученные при помощи МДУ (при числе гармоник $N$ = 20), а рис.3а-6а – это результаты, взятые из [9] и [10]. Аналогичные диаграммы рассеяния, полученные при помощи указанного в работе численного алгоритма МТМ. полностью совпали с теми, что получались при помощи МДУ. Отметим, что угол падения плоской волны в работах [9, 10] отличается от угла падения в нашем случае на 270$^0$. Кроме этого, диаграммы рассеяния, приведенные на рисунке 3-4, нормированы.

Сравнивая наши диаграммы рассеяния с диаграммами из работ [9, 10], видим полное совпадение с синей кривой (кривая 1), которая соответствует методу моментов, выбранного в качестве эталонного в этих работах. Остальные кривые на рисунке 3а-6а соответствуют: гибридному методу с учетом взаимодействия (кривая 2), гибридному методу без взаимодействия (кривая 3) и физико-оптическому приближению (кривая 4).

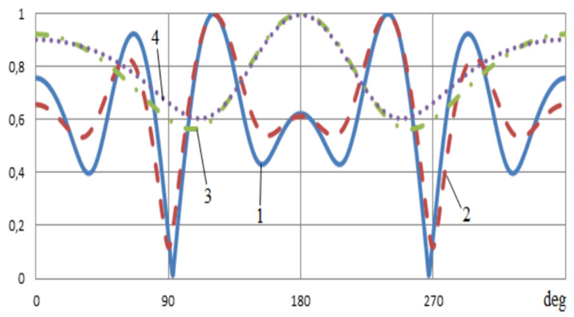



а) $\varphi_0 = 0$

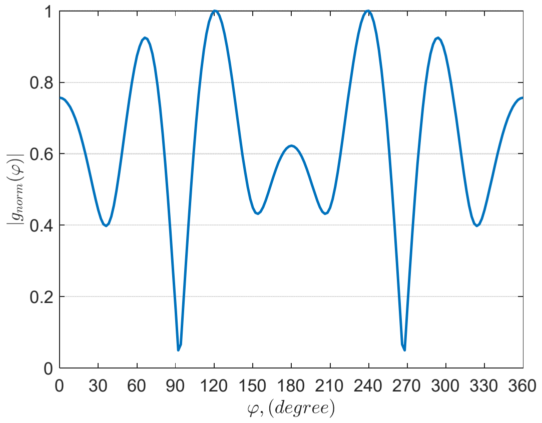



б) $\varphi_0 = 270^0$

**Рис. 3.** Диаграмма рассеяния прямоугольника со скруглениями: $a$ = 1, $h$ = 5 (краевое условие Дирихле)



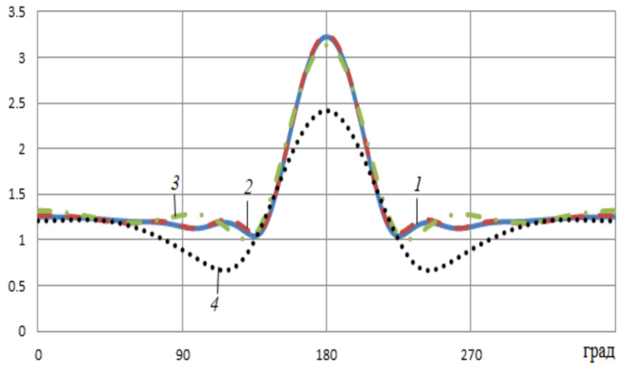

а) $\varphi_0 = 0$



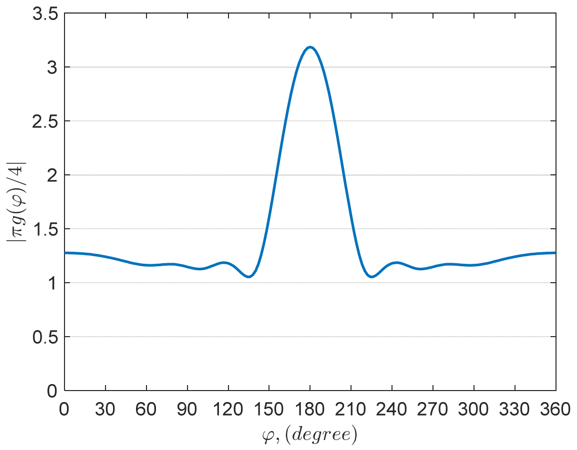

б) $\varphi_0 = 270^0$

**Рис. 4.** Диаграмма рассеяния прямоугольника со скруглениями: $a = 1$, $h = 5$ (краевое условие Неймана)

Для проверки сходимости численных алгоритмов МДУ и МТМ была использована оптическая теорема, согласно которой в двумерном случае в отсутствии поглощения (что соответствует краевым условиям Дирихле и Неймана) полный поперечник рассеяния $\sigma_s$ равен со знаком минус значению действительной части диаграммы рассеяния в направлении падения плоской волны [8].

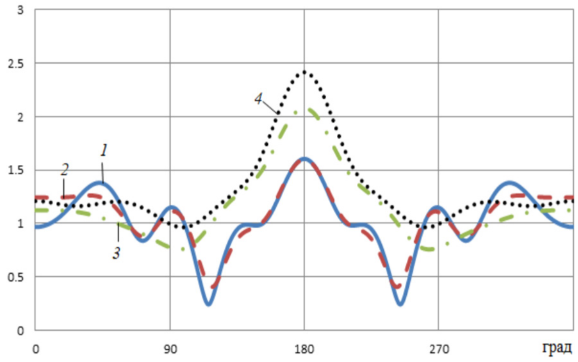



а) $\varphi_0 = 0$

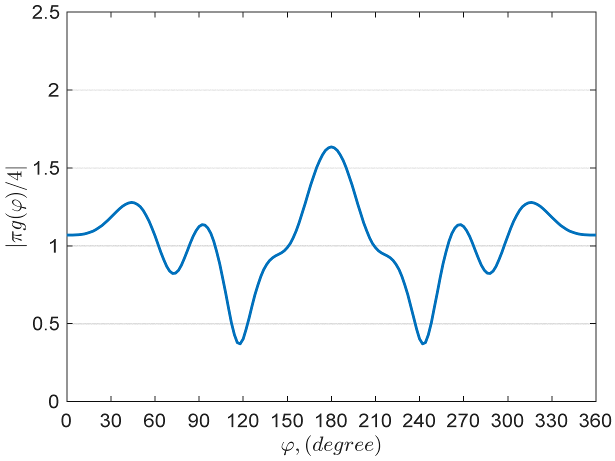



б) $\varphi_0 = 270^0$

**Рис. 5.** Диаграмма рассеяния треугольника со скруглениями: $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $h = 5$ (краевое условие Дирихле)




а) $\varphi_0 = 0$




б) $\varphi_0 = 270^0$

**Рис. 6.** Диаграмма рассеяния треугольника со скруглениями: $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $h = 5$ (краевое условие Неймана)

Именно:

$$\sigma_s = -\frac{4\,\mathrm{Re}\,g(\varphi_0)}{k}, \tag{28}$$

где

$$\sigma_s = \frac{2}{k\pi}\int_0^{2\pi} |\,g(\varphi)\,|^2\, d\varphi = \frac{4}{k}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \,. \tag{29}$$

В таблицах 1-2 показаны значения полного поперечника рассеяния $\sigma_s$ и абсолютная погрешность $\Delta$ выполнения оптической теоремы:

$$\Delta = \left|\sigma_s + \frac{4\,\mathrm{Re}\,g(\varphi_0)}{k}\right|, \tag{30}$$

полученные при помощи численных алгоритмов МДУ и МТМ.

Таблица 1

Прямоугольник со скруглениями: $a = 1$, $h = 5$, $\varphi_0 = 270^o$ (краевое условие Дирихле)

| | МДУ | | МТМ | |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | $\sigma_s$ | $\Delta$ | $\sigma_s$ | $\Delta$ |
| 15 | 9.482400 | 0.098522 | 9.864834 | 0.373601 |
| 20 | 9.253553 | 0.026102 | 9.338639 | 0.047284 |
| 25 | 9.383608 | 0.049836 | 9.242560 | 0.105894 |
| 28 | 9.346772 | 0.025587 | 172.839336 | 166.398654 |

Таблица 2

Треугольник со скруглениями $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $h = 5$, $\varphi_0 = 270^o$ (краевое условие Дирихле)

| | МДУ | | МТМ | |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | $\sigma_s$ | $\Delta$ | $\sigma_s$ | $\Delta$ |
| 15 | 14.631625 | 0.076355 | 14.985799 | 0.000915 |
| 20 | 15.221027 | 0.191279 | 14.979994 | 0.004335 |
| 25 | 14.718018 | 0.045990 | 14.982531 | 0.000574 |
| 30 | 14.948819 | 0.003591 | 14.982264 | 0.000316 |

Анализ таблиц 1-2 показывает хорошую сходимость численного алгоритма МДУ для всех рассмотренных геометрий. Так, уже при числе гармоник $N$ примерно равным $2 \div 3kd$ (где $d$ – характерный размер или диаметр рассматриваемого тела), наблюдается сходимость оптической теоремы в 1-2 знаках после запятой. Точность численного алгоритма МТМ для треугольника со скруглением оказалась выше, чем в МДУ, но для прямоугольника со скруглением с ростом $N$ наблюдается ухудшение сходимости МТМ, так как данная геометрия не удовлетворяет гипотезе Рэлея. Это еще раз подтверждает тот факт, что МТМ хорошо применим и показывает высокую сходимость для рэлеевских геометрий [2], но не применим либо имеет плохую сходимость для нерэлеевских рассеивателей. Например, эллипс будет рэлеевской геометрией при выполнении соотношения $a/b < \sqrt{2}$, где $a$ – большая полуось, а $b$ – малая полуось эллипса. Если вписать в наш прямоугольник со скруглениями эллипс соответствующего размера, то это и приведет к тому, что было сказано выше, а именно, что эта геометрия не будет удовлетворять гипотезе Рэлея.

В качестве следующего примера рассматривалось сравнение характеристик рассеяния, вычисленных для прямоугольника со скруглениями, с такой геометрией как овал Кассини. Уравнение овала Кассини с параметрами $a$ и $\varepsilon$ в полярной системе координат имеет вид:

$$\rho(\varphi) = a\sqrt{1+\varepsilon^2 \cos^2\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)},\ \varepsilon < 1,$$

где $\varepsilon$ – коэффициент скругления. Чем ближе $\varepsilon$ к единице, тем меньше овал Кассини похож на эллипс. На рисунке 7 приведено сравнение геометрий прямоугольника со скруглениями и овала Кассини при следующих параметрах: $a = 4$, $\varepsilon = 0.99$ (овал Кассини) и $a = 4$, $h = 3.25$ (прямоугольник со скруглениями).

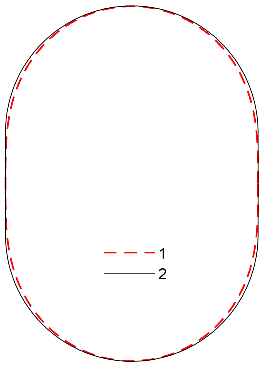
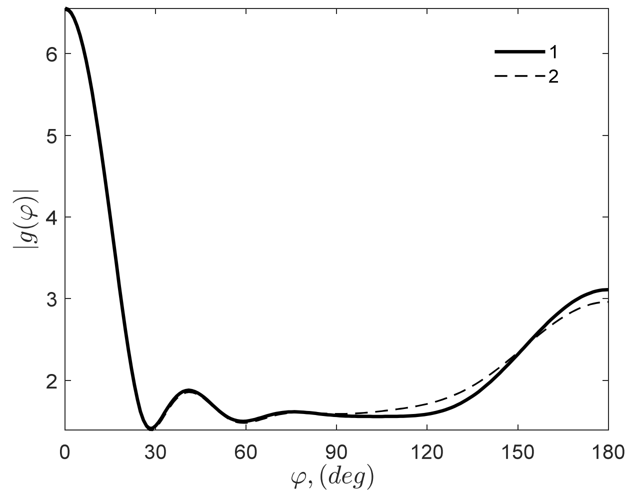


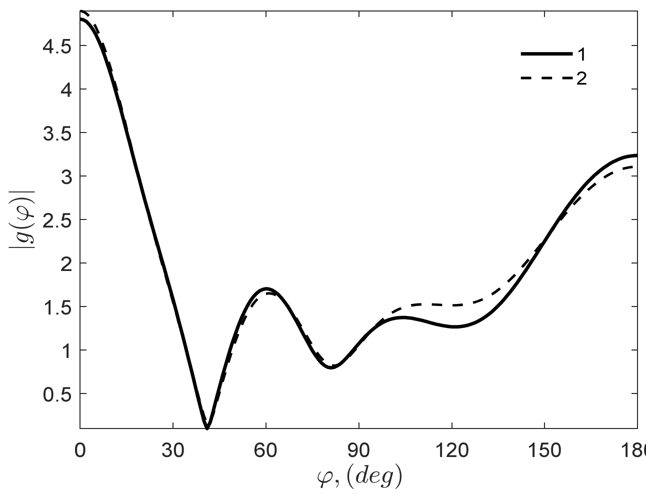

**Рис. 7.** Линия 1 – овал Кассини;
линия 2 – прямоугольник со скруглениями

Как видно из рисунка 7 при заданных параметрах обе геометрии очень близки, что позволяет сравнить их характеристики рассеяния.

На рисунке 8а,б приведены диаграммы рассеяния для прямоугольника со скруглениями и овала Кассини с указанными выше параметрами при падении плоской волны под углом $\varphi_0 = 0^0$ и при $N = 20$. Рисунок 8а соответствует краевому условию Дирихле, а рисунок 8б – краевому условию Неймана. В таблицах 3 и 4 приведена величина поперечника рассеяния $\sigma_s$ и проверка оптической теоремы при различных $N$ для указанных выше геометрий тел при краевом условии Неймана.




а) условие Дирихле




б) условие Неймана

**Рис. 8.** Диаграммы рассеяния прямоугольника со скруглениями (линия 1) и овала Кассини (линия 2)

Таблица 3

Прямоугольник со скруглениями $a = 4$, $h = 3{,}25$, $\varphi_0 = 0^o$ (краевое условие Неймана)

| | МДУ | | МТМ | |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | $\sigma_s$ | $\Delta$ | $\sigma_s$ | $\Delta$ |
| 18 | 18.87897934 | 0.0003521 | 18.87824814 | $1.33\times10^{-5}$ |
| 20 | 18.87844157 | $8.12\times10^{-5}$ | 18.87824860 | $6.44\times10^{-6}$ |
| 22 | 18.87826434 | $5.6\times10^{-6}$ | 18.87824534 | $4.74\times10^{-6}$ |

Таблица 4

Овал Кассини $a = 4$, $\varepsilon = 0{,}99$, $\varphi_0 = 0^{\circ}$
(краевое условие Неймана)

| | МДУ | | МТМ | |
|---|---|---|---|---|
| $N$ | $\sigma_s$ | $\Delta$ | $\sigma_s$ | $\Delta$ |
| 18 | 19.25527985 | 0.0005985 | 19.256485629952 | $1.88\times10^{-8}$ |
| 20 | 19.25678052 | 0.0001466 | 19.256485674589 | $8.53\times10^{-10}$ |
| 22 | 19.25641588 | $3.47\times10^{-5}$ | 19.256485675809 | $4.51\times10^{-12}$ |

Из рисунка 8а,б и таблиц 3-4 видно хорошее совпадение диаграмм рассеяния и поперечников рассеяния для обеих геометрий, что позволяет использовать аналитическую границу, а именно, овал Кассини, в качестве приближения кусочно-аналитической границы.

Проведенные вычисления характеристик рассеяния на телах с кусочно-аналитической границей и размерами, сопоставимыми с длиной волны падающего поля, показали хорошую сходимость и устойчивость численного алгоритма МДУ, и его применимость к таким геометриям. Результаты, полученные при помощи МДУ, совпали с теми, что были получены методом моментов в работах [9]-[10]. МТМ продемонстрировал высокую сходимость в основном для всех рэлеевских геометрий тел, к каковым в данной работе можно отнести треугольник со скруглениями, а также особый случай прямоугольника со скруглениями, в который можно вписать овал Кассини. В остальных случаях численный алгоритм МТМ с ростом числа гармоник $N$ приводит к росту погрешности вычислений.

**Литература**

1. *Кюркчан А.Г.* Об одном новом интегральном уравнении в теории дифракции. ДАН, 1992. С. 273-279.

2. *Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И., Клеев А.И.* Методы решения задач дифракции, основанные на использовании априорной аналитической информации. М.: Физматлит, 2022. 312 с.

3 *Демин Д.Б., Клеев А.И., Кюркчан А.Г.* Использование метода диаграммных уравнений для анализа рассеяния на малых частицах сложной формы // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. № 10, 2016. С. 38-42.

4. *Demin D.B., Kleev A.I., Kyurkchan A.G.* Modeling of Electromagnetic Scattering by Thin Cylinders Using Pattern Equation Method // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2017. T. 187. C. 287-292.

5. *Демин Д.Б., Кюркчан А.Г., Смирнова Н.И.* Усреднение по углам облучения в двумерной скалярной задаче дифракции // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт, № 11, 2012. С. 15-21.

6. *Kyurkchan A.G., Demin D.B.* Electromagnetic wave diffraction from impedance scatterers with piecewise-smooth boundaries // Journal of Commun. Techn. and Electron. Vol 47. № 8, 2002, pp. 856-63.

7. *Waterman P.C.* New formulation of acoustic scattering // J. Acoust. Soc. Amer. 1969. Vol. 45, pp. 1417-1429.

8. *Шендеров Е.Л.* Излучение и рассеяние звука. Л.: Судостроение, 1989.

9. *Калошин В.А., Луу Д.Т.* Рассеяние плоской волны на цилиндре с кусочно-аналитической формой сечения // Радиотехника и электроника, Т. 65. № 5, 2020. С. 457-463.

10. *Kaloshin V.A., Luu D.T.* Plane Wave Scattering on Ideally Conductive Plate with Rounded Edges // Proc. Of IEEE Int. Conf. «2019 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW)», Divnomorskoe, Krasnodar Region, Russia. 2019, pp. 232-235.

## STUDY OF SCATTERING CHARACTERISTICS IN A TWO-DIMENSIONAL DIFFRACTION PROBLEM ON A PERFECTLY CONDUCTING BODY WITH A PIECEWISE ANALYTIC BOUNDARY

***Dmitry B. Demin,*** *Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia,* **d.b.demin@mtuci.ru**

**Abstract**

The purpose of this work was to demonstrate correctness and accuracy of use of a well-known method of solving diffraction and wave scattering problems – the Pattern Equation Method (PEM), for calculation of scattering characteristics of bodies with a piecewise analytic boundary. A two-dimensional problem of diffraction on bodies with perfect boundary conditions (Dirichlet and Neumann conditions) was considered. Using a numeric technique of PEM, scattering characteristics were obtained for such geometries of bodies with piecewise analytic boundaries as a rectangle with roundings and a triangle with roundings. For accuracy verification, the calculation results for the rectangle with roundings were compared with the calculations obtained for analytical geometry, namely, for Cassini oval. Besides, calculations obtained with other numerical methods were compared (T-matrix method and method of moments). For all numerical calculations, the optical theorem was verified.

***Keywords:*** *Scattering pattern, Pattern Equation Method, T-matrix Method, Dirichlet boundary condition, Neumann boundary condition, Rectangle with roundings, Triangle with roundings, Cassini oval, Optical theorem.*

**References**

[1] A.G. Kyurkchan, “A new integral equation in the diffraction theory,” *Soviet Physics-Doklady*, 1992, vol. 37, no 7, pp. 338-340.

[2] A.G. Kyurkchan, N.I. Smirnova, A.I. Kleev, "Methods for solving diffraction problems based on the use of a priori analytical information," Moscow: Fizmatlit, 2022, 312 p. (in Russian)

[3] D.B. Demin, A.I. Kleev, A.G. Kyurkchan, “The Applying of the Pattern Equation Method for the Analysis of Scattering by Small Particles of the Complicated Shape,” *T-Comm*, no. 10, 2016, pp. 38-42. (in Russian)

[4] D.B. Demin, A.I. Kleev, A.G. Kyurkchan, “Modeling of Electromagnetic Scattering by Thin Cylinders Using Pattern Equation Method,” *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. 2017. Vol. 187, pp. 287-292.

[5] D.B. Demin, A.G. Kyurkchan, N.I. Smirnova, “Averaging of scattering charcteristics in a 2D difraction problem,” *T-Comm*, no. 11, 2012, pp.15-21. (in Russian)

[6] A.G. Kyurkchan, D.B. Demin, “Electromagnetic wave diffraction from impedance scatterers with piecewise-smooth boundaries,” *Journal of Commun. Techn. and Electron*. Vol 47, no. 8, 2002, pp. 856-63.

[7] P.C. Waterman, “New formulation of acoustic scattering,” *J. Acoust. Soc. Amer*. 1969. Vol. 45, pp. 1417-1429.

[8] E.L. Shenderov, "Radiation and scattering of sound,. L.: Shipbuilding, 1989. (in Russian)

[9] V.A. Kaloshin, D.T. Luu, “Scattering of a Plane Wave by a Cylinder with a Piecewise Analytical Form of the Section,” *Journal of Commun. Techn. and Electron*., Vol. 65, No. 5, 2020, pp. 495-501.

[10] V.A. Kaloshin, D.T. Luu, "Plane Wave Scattering on Ideally Conductive Plate with Rounded Edges," *2019 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW)*, Divnomorskoe, Krasnodar Region, Russia. 2019, pp. 232-235.

**Information about author:** ***Dmitry B. Demin,*** *Associate Professor, Cand. Sc., Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia*