

ПРИМЕНЕНИЕ ПАРАМЕТРИЗОВАННОГО БПФ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА ОБРАБОТКИ СИГНАЛА В СИСТЕМЕ СВЯЗИ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ АНТЕНН

DOI: 10.36724/2072-8735-2024-18-7-13-20

Manuscript received 27 May 2024;

Accepted 24 June 2024

Исследование выполнено в Сколтехе
при поддержке Российского Научного Фонда
(проект № 24-29-00189)

Бычков Роман Алексеевич,
Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия,
r.bychkov@skoltech.ru

Ключевые слова: MIMO, пространственный
базис, БПФ, многоабонентный режим, оптимизация

В данной работе рассматривается использование параметризованных структур на основе быстрого преобразования Фурье (БПФ) для определения пространства обработки сигнала в многоабонентном режиме многоантенного приёмника. Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) широко используется для преобразования принятых цифровых сигналов благодаря низкой вычислительной сложности БПФ. При этом для многоабонентного режима работы такое преобразование приводит к потере полезной мощности сигнала и снижению точности. Причиной является несоответствие фиксированного базиса ДПФ направлениям прихода сигнала в многолучевом канале распространения. Целью данной работы является разработка метода выбора пространственного базиса сигнала на основе обучаемого БПФ. Предлагаются 3 версии обучаемого БПФ, отличающиеся вычислительной сложностью и результирующей точностью выбора пространства обработки сигнала. Аналитически доказано, что используемые в литературе модификации БПФ являются частными случаями предложенных алгоритмов. Для каждого варианта обучаемого БПФ проведена оптимизация структуры с учётом особенностей задачи выбора пространства обработки сигнала и проанализирована вычислительная сложность. Валидация разработанных алгоритмов проводилась с помощью имитационного моделирования работы многоантенного приёмника с использованием канала распространения сигнала, полученного с помощью программного обеспечения QuaDRiGa 2.0. В сценарии не прямой видимости с 8 абонентами прирост производительности относительно стандартного БПФ составил до 2 дБ.

Информация об авторе:

Бычков Роман Алексеевич, научный сотрудник, аспирант, Сколковский институт науки и технологий, Москва, территория инновационного центра "Сколково", ORCID: 0000-0001-7648-5399

Для цитирования:

Бычков Р.А. Применение параметризованного БПФ для определения пространства обработки сигнала в системе связи с большим числом антенн // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2024. Том 18. №7. С. 13-20.

For citation:

Bychkov R.A. (2024) Parameterized FFT application for signal processing space estimation in massive MIMO system. *T-Comm*, vol. 18, no.7, pp. 13-20. (in Russian)

Введение

Для удовлетворения требований к пропускной способности модернизированной мобильной широкополосной связи в качестве основной технологии беспроводных сетей пятого поколения (5G) была принята технология многоантенной обработки сигналов (Multiple Input Multiple Output, MIMO) [1, 2]. В то время как количество антенн в стандартном 4G MIMO равно $N_{RX}^{4G} = 8$, в 5G MIMO оно начинается с $N_{RX}^{5G} = 64$ [3]. Чрезмерная сложность блоков оценки канала [4] и детектора MIMO [5, 6] является серьезной проблемой. Сложность оценки минимальной среднеквадратичной ошибки (МСКО) в 5G по меньшей мере в $[N_{RX}^{5G}/N_{RX}^{4G}]^2_{min} = 64$ раза больше, чем в 4G. Кроме того, использование общего открытого радиointерфейса [7] для передачи N_{RX} цифровых сигналов с удаленного радиомодуля на вычислительный модуль является слишком дорогостоящим.

Таким образом, в реальных приложениях преобразование сигналов цифровой антенны в пространственный базис [8,9] меньшей размерности широко используется для решения проблем низкой точности, высокой сложности и высокой стоимости в приёмнике MIMO [10], как показано на рисунке 1. На этой схеме дискретное преобразование Фурье (ДПФ) является базовым модулем, который преобразует цифровой сигнал каждой приёмной антенны в частотную область, распаковщик извлекает опорный сигнал зондирования (sounding reference signal, SRS), пилот-сигналы и символы данных [11]. SRS используется для нахождения матрицы преобразования пространственного базиса в удалённом радиомодуле [12], оптимальный выбор которой и является предметом исследования в данной работе. Эта матрица далее используется для преобразования пилотных символов и символов данных в пространственный базис с размерностью меньше N_{RX} . Таким образом, вычислительный модуль работает только в пространственном базисе, реализуя стандартные функции приёмника: оценку канала с помощью опорных сигналов демодуляции (demodulation reference signal, DMRS), интерполяцию канала на символы данных, демодуляцию и декодирование [13].



Рис. 1. Структура приемника с преобразованием в пространство обработки сигнала

Чтобы найти низкоразмерный пространственный базис, можно, например, выполнить сингулярное разложение (СР) антенного сигнала в частотной области $\mathbf{Y} \in \mathbb{C}^{N_{SC} \times N_{RX}}$, принятого во временные интервалы SRS на стороне удалённого радиомодуля, где N_{SC} – количество выделенных поднесущих. А затем выбирается подпространство сигнала в качестве подпространства сингулярных векторов, соответствующего N_{beam} наибольшим сингулярным значениям [14].

Более быстрой альтернативой является выбор направлений с максимальной мощностью после выполнения ДПФ в области антенн [15]. Поскольку ДПФ может быть эффективно реализован с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ), вычислительная сложность такого подхода очень мала, что обеспечивает его широкое распространение [13, 16]. Однако вероятность ошибки при выборе пространственного базиса на основе ДПФ может отличаться на несколько дБ от пространственного базиса СР [14] при одновременной работе с несколькими абонентами. Причиной этого является низкая выразительность ДПФ: разрешается выбирать только N_{beam} векторов из N_{RX} заданных направлений. Поскольку ни одно из этих направлений N_{RX} точно не совпадает с принятым сигналом, происходит большая потеря мощности полезного сигнала и, как следствие, качества работы приёмника.

Для решения этой проблемы был проведён ряд работ, направленных на повышение выразительности ДПФ для задачи выбора пространственного базиса в приёмнике с минимальными дополнительными вычислениями. Например, в статье [14] предлагалось комбинировать ДПФ и СР в качестве компромисса между точностью пространственного базиса и сложностью его вычисления, в то время как в статье [17] авторы предложили использовать несколько матриц ДПФ, размеры которых соответствуют размерам антенной решётки. В работе [18], авторы предложили выполнить дополнительный поворот на произвольный угол перед выполнением БПФ. А в [19] предлагалось обучить матрицу преобразования с использованием обучаемых пилотов.

Насколько нам известно, параметризованный или обучаемый БПФ – новая концепция для задачи выбора пространственного базиса. Она потенциально может нивелировать недостатки стандартного БПФ, при этом сохраняя низкую асимптотику для вычислительной сложности.

Вклад автора

В данной работе предложено обобщённое выражение для БПФ с произвольными весами в его рекурсивной структуре. Параметризация и обучение этих весов позволяет реализовать адаптивные алгоритмы с сохранением низкой асимптотической сложности и лучшим соответствием базиса направлениям прихода абонентского сигнала. Предложены несколько вариантов реализации обучаемого БПФ, отличающихся количеством параметров. Большее число весов приводит к большей вычислительной сложности, но точность преобразования становится выше.

Раздел 1. Обучаемое Фурье преобразование

Обозначим преобразование ДПФ вектора (столбца) $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ в $\mathbf{x}^f = F_N \mathbf{x} \in \mathbb{C}^N$ в виде:

$$x_k^f = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k n / N}.$$

В случае, когда N равно степени 2, соответствующий БПФ по основанию 2 имеет следующую рекурсивную структуру [20]:

$$\mathbf{F}_N = \mathbf{P}_N \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{N/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \\ \mathbf{I}_{N/2} & -\mathbf{I}_{N/2} \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $\mathbf{D}_N = \text{diag}(1, e^{-2\pi i / N}, \dots, e^{-2\pi i (N-1) / N})$, $\mathbf{I}_N$ – единичная матрица $N \times N$, а $\mathbf{P}_N$ – матрица перестановок, которая ставит чётные индексы в начало, а нечётные индексы в конец:

$$(\mathbf{P}_N \mathbf{x})_k = \begin{cases} x_{2k}, & k < N/2 \\ x_{2k+1}, & k \geq N/2 \end{cases}$$

Уравнение (1) описывает реализацию БПФ во временной области. Здесь матрицы из единичных блоков умножаются на $\mathbf{x}$ (вектор во временной области), а перестановки выполняются в последнюю очередь (в частотной области). Перестановки, определяемые матрицей $\mathbf{P}_N$, являются последними операциями, которые необходимо выполнить. Таким образом, они могут быть удалены, поскольку любая (фиксированная) перестановка элементов x^f не влияет на выбранный пространственный базис.

В выражении (1) есть одна матрица $\mathbf{F}_N$ размера N и две матрицы $\mathbf{F}_{N/2}$ размера $N/2$. Подставляя $\mathbf{F}_{N/2}$ из той же рекурсивной формулы (получим 4 матрицы размера $N/4$ и, в общем случае, N/K матриц $\mathbf{F}_K$, $K = 1, 2, 4, \dots, N/2, N$). Другими словами, существует N/K умножений на $\mathbf{F}_K$, каждое умножение на $\mathbf{F}_K$ содержит менее $K/2 - 1$ комплексных умножений, все они берутся из матрицы $\mathbf{D}_{K/2}$ (не включая умножения внутри $\mathbf{F}_{K/2}$ на дальнейших уровнях рекурсии). Таким образом, число комплексных умножений на каждом уровне рекурсии меньше, чем $N/K \cdot K/2 = N/2$. Исключая умножения на $1, -1, i$ и $-i$, число комплексных умножений равно $N \log_2 N / 2 - 2N + 4$. Аналогично, количество комплексных сложений может быть вычислено равным $N \log_2 N$. В этих вычислениях не используется точная форма $\mathbf{D}_K$, а только тот факт, что это диагональная матрица. Более того, не используется тот факт, что эти N/K умножений на $\mathbf{F}_K$ используют одну и ту же матрицу $\mathbf{D}_{K/2}$. Таким образом, можно заменить $\mathbf{D}_K$ произвольными диагональными матрицами с сохранением той же границы по числу комплексных умножений и сложений. Это приводит к идее обучения диагональных элементов $\mathbf{D}_K$ для более точного представления возможных направлений принимаемого сигнала.

Раздел 2. Варианты обучаемого БПФ

Вариант 1. В качестве простейшего метода параметризуются матрицы $\mathbf{D}_{K/2}$ в (1), но их диагональные элементы остаются в виде комплексных экспонент, поэтому при умножении меняются только фазы. В рекурсивной структуре имеется N/K матриц $\mathbf{F}_K$, каждая из которых содержит одну матрицу $\mathbf{D}_{K/2}$. Пусть эти матрицы будут пронумерованы по индексу j . Тогда получится N/K матриц $\mathbf{D}_{K/2}^{(j)}$, $j = \overline{1, N/K}$ ($j = 1, 2, \dots, N/K$). Вместо $\mathbf{F}_N$ используем обозначение $\mathbf{T}_N^{(j)}$ так как эти матрицы теперь отличаются. После подстановки новых обозначений в (1)

получается рекурсивная формула:

$$\mathbf{T}_K^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{K/2}^{(2j-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{K/2}^{(2j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{K/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{K/2}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{K/2} & \mathbf{I}_{K/2} \\ \mathbf{I}_{K/2} & -\mathbf{I}_{K/2} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$$j = \overline{1, N/K},$$

где не используются матрицы перестановок так как они не влияют на пространственный базис. В общем виде, матрицы $\mathbf{D}_{K/2}^{(j)}$ могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{D}_{K/2}^{(j)} = \text{diag}(e^{-i\varphi(K,j,0)}, \dots, e^{-i\varphi(K,j,K/2-2)}, e^{-i\varphi(K,j,K/2-1)}),$$

где $\varphi(K, j, k)$, $j = \overline{1, N/K}$, $k = \overline{0, K/2-1}$ – произвольные фазы для всех $\log_2 N$ уровней рекурсии. В этом случае суммарное число обучаемых параметров выражается как $\log_2 N \cdot N/K \cdot K/2 = N \log_2 N / 2$.

Поскольку каждый элемент пространственного базиса определен с точностью до фазы, всегда можно сделать фазовый сдвиг в строках таким образом, чтобы $\varphi(K, j, 0) = 0$ и первый элемент каждой диагональной матрицы был равен 1. Следовательно, на нижнем уровне рекурсии получается выражение:

$$\mathbf{T}_2^{(j)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$j = \overline{1, N/2},$$

Умножения на $-1, i$ and $-i$ внутри $\mathbf{D}_{K/2}^{(j)}$ теперь могут быть умножениями на произвольные фазы. Суммирование по всем уровням рекурсии означает, что было использовано $N - 3$ дополнительных комплексных умножения.

Преобразование (2) более не является симметричным, поэтому нельзя инвертировать знаки экспонент, чтобы получить обратное преобразование. Однако уравнение (2) и приведённые ниже варианты по-прежнему сохраняют ортогональность строк и столбцов, т.е. $\mathbf{T}_N \mathbf{T}_N^H = \mathbf{I}_N$. Следовательно, обратное значение $\mathbf{T}_N^{-1} = \mathbf{T}_N^H / N$ может быть вычислено с использованием эрмитового сопряжения (2).

Вариант 2. В предыдущем алгоритме, заданном формулой (2), только нижняя часть умножалась на произвольную диагональную матрицу. Однако, поскольку каждый слой содержит блочную матрицу 2×2 , возможно заменить каждый блок в правой части (2) произвольной диагональной матрицей с произвольными фазами. Тогда для первого уровня рекурсии получим выражение:

$$\mathbf{T}_N = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{N/2}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{N/2}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2}^{(1)} & \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \\ \mathbf{W}_{N/2}^{(3)} & -(\mathbf{W}_{N/2}^{(1)})^H \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \mathbf{W}_{N/2}^{(3)} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

где

$$\mathbf{W}_{N/2}^{(j)} = \text{diag}(e^{-i\varphi'(j,0)}, \dots, e^{-i\varphi'(j,N/2-2)}, e^{-i\varphi'(j,N/2-1)}), \quad j = \overline{1, 3}.$$

Аналогично предыдущему подходу, первый элемент всех этих диагональных матриц может быть выбран равным 1.

Вид последнего блока $-(\mathbf{W}_{N/2}^{(1)})^H \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \mathbf{W}_{N/2}^{(3)}$ выбирается для сохранения ортогональности $\mathbf{T}_N \mathbf{T}_N^* = \mathbf{I}_N$ (тогда $\mathbf{T}_N / \sqrt{N}$ остаётся унитарным преобразованием по построению):

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2}^{(1)} & \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \\ \mathbf{W}_{N/2}^{(3)} & -(\mathbf{W}_{N/2}^{(1)})^H \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \mathbf{W}_{N/2}^{(3)} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2}^{(1)} & \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \\ \mathbf{W}_{N/2}^{(3)} & -(\mathbf{W}_{N/2}^{(1)})^H \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \mathbf{W}_{N/2}^{(3)} \end{bmatrix}^H \\ & = \begin{bmatrix} 2\mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 2\mathbf{I}_{N/2} \end{bmatrix} = 2\mathbf{I}_N \end{aligned}$$

Следовательно:

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}_N \mathbf{T}_N^H \\ & = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{N/2}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{N/2}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2}^{(1)} & \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \\ \mathbf{W}_{N/2}^{(3)} & -(\mathbf{W}_{N/2}^{(1)})^H \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \mathbf{W}_{N/2}^{(3)} \end{bmatrix} \\ & \times \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2}^{(1)} & \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \\ \mathbf{W}_{N/2}^{(3)} & -(\mathbf{W}_{N/2}^{(1)})^H \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \mathbf{W}_{N/2}^{(3)} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{N/2}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{N/2}^{(2)} \end{bmatrix} \\ & = 2 \begin{bmatrix} N/2 \cdot \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & N/2 \cdot \mathbf{I}_{N/2} \end{bmatrix} = N\mathbf{I}_N \end{aligned}$$

Стоит отметить, что (3) изменяет только первый слой рекурсии, а все последующие слои остаются такими же, как в первом варианте (2). Причина в том, что модификация (3) на нижних слоях всегда может быть перенесена на слой выше. Пусть, например:

$$\mathbf{T}_{K/2}^{(2j-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{K/4}^{(4j-3)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{K/2}^{(4j-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{K/4}^{(6j-5)} & \mathbf{W}_{K/4}^{(6j-4)} \\ \mathbf{W}_{K/4}^{(6j-3)} & -(\mathbf{W}_{K/4}^{(6j-5)})^H \mathbf{W}_{K/4}^{(6j-4)} \mathbf{W}_{K/4}^{(6j-3)} \end{bmatrix}$$

Тогда обозначим $\mathbf{D}_{K/4}^{(2j-1)} = \mathbf{W}_{K/4}^{(6j-3)} (\mathbf{W}_{K/4}^{(6j-5)})^H$ и

$$\mathbf{W}_{K/2}^{(2j-1)'} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{K/4}^{(6j-5)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{K/4}^{(6j-4)} \end{bmatrix},$$

таким образом, что:

$$\mathbf{T}_{K/2}^{(2j-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{K/4}^{(4j-3)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{K/2}^{(4j-2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{K/4} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{K/4}^{(2j-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{K/4} & \mathbf{I}_{K/4} \\ \mathbf{I}_{K/4} & -\mathbf{I}_{K/4} \end{bmatrix} \mathbf{W}_{K/2}^{(2j-1)'} \quad (4)$$

Обозначим $\mathbf{T}_{K/2}^{(2j-1)} = \mathbf{T}_{K/2}^{(2j-1)'} \mathbf{W}_{K/2}^{(2j-1)'}$, тогда после переноса $\mathbf{W}_{K/2}^{(2j-1)'}$ на предыдущий слой рекурсии получим:

$$\begin{aligned} & \mathbf{T}_K^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{K/2}^{(2j-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{K/2}^{(2j)} \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{K/2}^{(3j-2)} & \mathbf{W}_{K/2}^{(3j-1)} \\ \mathbf{W}_{K/2}^{(3j)} & -(\mathbf{W}_{K/2}^{(3j-2)})^H \mathbf{W}_{K/2}^{(3j-1)} \mathbf{W}_{K/2}^{(3j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{K/2}^{(2j-1)'} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{K/2}^{(2j)'} \end{bmatrix} \times \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{K/2}^{(2j-1)'} \mathbf{W}_{K/2}^{(3j-2)} & \mathbf{W}_{K/2}^{(2j-1)'} \mathbf{W}_{K/2}^{(3j-1)} \\ \mathbf{W}_{K/2}^{(3j)} & -(\mathbf{W}_{K/2}^{(3j-2)})^H \mathbf{W}_{K/2}^{(3j-1)} \mathbf{W}_{K/2}^{(3j)} \end{bmatrix} \quad (5) \end{aligned}$$

В правой части (5) получается блочная диагональная структура (3), а (4) имеет вид после переноса $\mathbf{W}_{K/2}^{(2j-1)'}$. Таким образом можно привести все нижние слои к виду (18), а

первый слой будет иметь вид (3), который уже невозможно упростить.

Уравнение (3) требует $N - 1$ дополнительных комплексных умножений и существенно не влияет на общую сложность. При этом будет показано, что алгоритм (3) значительно повышает качество работы приёмника по сравнению с первой версией.

Вариант 3. В данном варианте рассматривается наиболее общая форма, где матрицы в крайнем правом блокепо-прежнему диагональные, но не являются комплексными экспонентами. В общем случае, они могут быть записаны в виде:

$$\mathbf{T}_K^{(j)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{K/2}^{(2j-1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{K/2}^{(2j)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{K/2}^{(4j-3)} & \mathbf{W}_{K/2}^{(4j-2)} \\ \mathbf{W}_{K/2}^{(4j-1)} & \mathbf{W}_{K/2}^{(4j)} \end{bmatrix}, j = \overline{1, N/K}, \quad (6)$$

где элементы выбираются таким образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{K/2, kk}^{(4j-3)} &= \sqrt{2} e^{-i\varphi(K, 3j-2, k)} \cos\theta(K, j, k), \\ \mathbf{W}_{K/2, kk}^{(4j-2)} &= \sqrt{2} e^{-i\varphi(K, 3j-1, k)} \sin\theta(K, j, k), \\ \mathbf{W}_{K/2, kk}^{(4j-1)} &= \sqrt{2} e^{-i\varphi(K, 3j, k)} \sin\theta(K, j, k), \\ \mathbf{W}_{K/2, kk}^{(4j)} &= -\sqrt{2} e^{i\varphi(K, 3j-2, k)} e^{-i\varphi(K, 3j-1, k)} \\ &\quad \times e^{-i\varphi(K, 3j, k)} \cos\theta(K, j, k), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(K, j, k) &\in [0, 2\pi), & j &= \overline{1, 3N/K}, & k &= \overline{0, K/2-1}, \\ \theta(K, j, k) &\in [0, \pi/2], & j &= \overline{1, N/K}, & k &= \overline{0, K/2-1}, \end{aligned}$$

чтобы k -е диагональные элементы $\mathbf{W}_{K/2}^{(4j-3)}$, $\mathbf{W}_{K/2}^{(4j-2)}$, $\mathbf{W}_{K/2}^{(4j-1)}$ и $\mathbf{W}_{K/2}^{(4j)}$ образовали (без учёта индексов) следующие матрицы 2×2 :

$$\sqrt{2} \begin{bmatrix} e^{-i\varphi_1} \cos \theta & e^{-i\varphi_2} \sin \theta \\ e^{-i\varphi_3} \sin \theta & -e^{-i(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)} \cos \theta \end{bmatrix}$$

которые представляют собой произвольные унитарные матрицы размером 2×2 [21] (каждая масштабируется на $\sqrt{2}$, чтобы сохранить $\mathbf{T}_K \mathbf{T}_K^H = K\mathbf{I}_K$). Таким образом, вся блочная матрица в правой части (6) также является унитарной. Аналогично предыдущим вариантам, первые элементы $\mathbf{W}_K^{(j)}$ всегда могут быть выбраны действительными (фазовый сдвиг равен нулю).

Более того, для $K \neq N$ диагональные матрицы $\mathbf{W}_{K/2}^{(4j-3)}$ и $\mathbf{W}_{K/2}^{(4j-2)}$ являются действительными, так как ненулевой фазовый сдвиг может быть перенесён на предыдущий уровень рекурсии, как было показано для второго подхода.

Каждый слой структуры (6) содержит в четыре раза больше умножений, чем обычный БПФ (1).

При этом новые фазовые сдвиги появляются только на первом слое, так что дополнительно появляются только действительные умножения.

Раздел 3. Сравнение с другими параметризациями БПФ

Сравним разработанные алгоритмы с существующими модификациями БПФ. В работе [17] авторы предложили умножать принятый сигнал на матрицу

$$\mathbf{W} = \text{diag}(1, e^{-i\xi}, e^{-2i\xi}, \dots, e^{-(N-1)i\xi})$$

где ξ является произвольной фазой. Очевидно, что это частный случай формулы (3) с $\mathbf{T}_{N/2} = \mathbf{F}_{N/2}$, $\mathbf{W}_{N/2}^{(3)} = \mathbf{D}_{N/2}$ и

$$\begin{bmatrix} \mathbf{W}_{N/2}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W}_{N/2}^{(2)} \end{bmatrix} = \mathbf{W},$$

и его производительность не превосходит таковую для второго предложенного варианта.

В работе [18] авторы предложили использовать тензорное произведение преобразований Фурье $\mathbf{T}_N = \mathbf{F}_{N_1} \otimes \dots \otimes \mathbf{F}_{N_k}$, $N_1 \cdot \dots \cdot N_k = N$, где размеры Фурье соответствуют физическим размерам структуры антенной решетки. Покажем, что произвольное тензорное произведение преобразований Фурье является частным случаем варианта 1. Поскольку выбранные элементы пространственного базиса не зависят от числа перестановок, достаточно построить следующую структуру:

$$\mathbf{T}_N' = (\mathbf{P}_{N_1}')^{-1} \mathbf{F}_{N_1} \otimes \dots \otimes (\mathbf{P}_{N_k}')^{-1} \mathbf{F}_{N_k},$$

где

$$\mathbf{P}_K' = \mathbf{P}_K \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{K/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_{K/2} \end{bmatrix}.$$

В этом выражении $\mathbf{P}_K$ переставляет в начало нечётные элементы, а в конец - чётные. Далее запишем $\mathbf{T}_N' = \mathbf{P}_{N_1}'^{-1} \mathbf{F}_{N_1} \otimes \mathbf{T}_{N/N_1}'$ и методом индукции докажем, что оно имеет рекурсивную форму (2). Основа индукции – множитель тензорного произведения $\mathbf{P}_{N_k}'^{-1} \mathbf{F}_{N_k}$ действительно имеет такой вид. Теперь предположим, что $\mathbf{T}_{N/N_1}'$ имеет вид (2) и докажем, что то же самое верно для $\mathbf{T}_N'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_N' &= \mathbf{P}_{N_1}'^{-1} \mathbf{F}_{N_1} \otimes \mathbf{T}_{N/N_1}' = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N_1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{N_1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{N_1/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N_1/2} & \mathbf{I}_{N_1/2} \\ \mathbf{I}_{N_1/2} & -\mathbf{I}_{N_1/2} \end{bmatrix} \otimes \mathbf{T}_{N/N_1}' \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{N_1/2} \otimes \mathbf{T}_{N/N_1}' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{F}_{N_1/2} \otimes \mathbf{T}_{N/N_1}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_{N_1/2} \otimes \mathbf{I}_{N/N_1}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{N/2} & \mathbf{I}_{N/2} \\ \mathbf{I}_{N/2} & -\mathbf{I}_{N/2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Если определить $\mathbf{D}_{N/2}^{(1)} = \mathbf{I}_{N/2}$ и $\mathbf{D}_{N/2}^{(2)} = \mathbf{D}_{N_1/2} \otimes \mathbf{I}_{N/N_1}'$, то получим $\mathbf{T}_N'$ в виде выражения (2), предполагая, что $\mathbf{T}_{N/N_1}' = \mathbf{F}_{N_1/2} \otimes \mathbf{T}_{N/N_1}'$ имеет ту же форму. После $\log_2 N_1$ уровней рекурсии получим формулу $\mathbf{F}_1 \otimes \mathbf{T}_{N/N_1}' = \mathbf{T}_{N/N_1}'$, которая имеет вид (2) согласно гипотезе индукции.

Таким образом, выбор пространственного базиса в соответствии с любым тензорным произведением преобразований Фурье является частным случаем первой версии обучаемого БПФ и не может превышать его точности преобразования.

Можно сделать заключение, что предложенные в данной работе алгоритмы являются более общей параметризацией БПФ и превосходят существующие альтернативы повышения точности БПФ для выбора пространственного базиса.

Раздел 4. Результаты моделирования и сложность

Моделирование работы многоантенного приёмника выполнялось с помощью реалистичного канала распространения сигнала, полученного в программном обеспечении QuaDRiGa 2.0 [22]. Параметры моделирования указаны в таблице 1.

Сценарий с 8 абонентами и 16 пространственными векторами при канале не прямой видимости (NLOS) является тяжёлым с точки зрения пространственной обработки [11], так как пространственных векторов недостаточно для полного описания сигналов абонентов.

Этот сценарий был выбран для того, чтобы продемонстрировать заметное снижение точности при использовании обычного БПФ.

Таблица 1

Параметры моделирования работы системы связи с многоантенным приёмником

Параметр	Значение	Параметр	Значение
Несущая частота	3.5 ГГц	Модуляция	QAM16
Расстояние между поднесущими	30 кГц	Число реализаций канала	140
Высота БС	25 м	Число реализаций шума	16
Высота абонента	1.5 м	Декодер	LDPC (144,288)
Вертикальный разнос антенн	0.9 λ	Модель канала	3GPP-3D, Berlin, Dresden
Горизонтальный разнос антенн	0.5 λ	Тип канала	Непрямой видимости
Число антенн БС	64	Скорость абонента	5 км/ч
Число антенн абонента	1	Расстояние до абонента	50-250 м

Для поиска оптимальных значений параметризованного БПФ использовался генетический алгоритм. Целевой функцией оптимизации была выбрана мощность проекции сигнала цифровых антенн $\mathbf{Y}$ в частотной области на N_{beam} векторов:

$$\|\mathbf{Y} \times \tilde{\mathbf{T}}_{N,N_{beam}}(\{\varphi, \theta\})\|_F^2 \rightarrow \max_{\varphi, \theta},$$

где $\{\varphi, \theta\}$ – набор всех обучаемых параметров, $\tilde{\mathbf{T}}_{N,N_{beam}} \in \mathbb{C}^{N_{RX} \times N_{beam}}$ – часть матрицы $\mathbf{T}_N$, соответствующая N_{beam} направлениям с наибольшей мощностью сигнала. Оптимизация проводилась на процессоре Intel i9-13900K.

Для 50 эпох генетического алгоритма потребовалось около 1,5 минут, чтобы найти оптимальные параметры для первого подхода. Очевидно, что используемый метод обучения неосуществим для систем реального времени, но в данный момент принципиальным является доказательство того, что БПФ может быть эффективно адаптирован для выбора пространственного базиса, в то время как поиск быстрого способа его обучения представляет собой дальнейшее направление исследований.

Результаты моделирования для разработанных методов: обучаемого БПФ версий 1-3, стандартного БПФ, СР и пространства антенн представлены на рисунке 2.

Пространство антенн [23] соответствует обработке цифрового сигнала без преобразования в пространственный базис и, как и ожидалось, демонстрирует наилучшую точность. При этом обработка сигналов в пространстве антенн требует значительного количества вычислительных ресурсов из-за больших размеров антенной решётки в современных приёмниках.

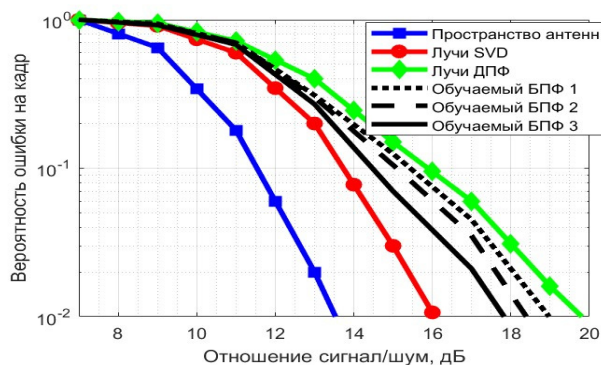


Рис. 2. Точность приёмника в пространственном базисе обученного Фурье преобразования

Обработка в пространственном базисе на основе СР является второй по точности, однако стоимость преобразования пилот-сигналов и символов данных из области антенн в такой пространственный базис составляет $\mathcal{O}(N_{RX}N_{beam})$ для каждой поднесущей, что требует намного больше вычислительных ресурсов. Наконец, обучаемое БПФ версий 1-3 превосходят стандартный БПФ, имея при этом одинаковую асимптотическую сложность преобразования антенных сигналов в пространственный базис, а именно $\mathcal{O}(N_{RX}\log_2 N_{RX})$. Точное количество сложений и умножений приведено в таблице 2.

Таблица 2

Количество операций для различных вариантов обучаемого Фурье преобразования

Операция	Классический БПФ	Режим 1	Режим 2	Режим 3
Комплексные умножения	$N \log_2 N/2 - 2N + 4$	$N \log_2 N/2 - N + 1$	$N \log_2 N/2$	$N \log_2 N/2$
Комплексные сложения	$N \log_2 N$	$N \log_2 N$	$N \log_2 N$	$N \log_2 N$
Реальные умножения	0	0	0	$2N \log_2 N$

Третий вариант работает лучше всех версий на основе БПФ, но требует самого длительного обучения. Режим 1 может быть быстрее адаптирован к каналу распространения, но он менее точен.

Требования к сложности обучения не такие высокие, как к сложности самого преобразования, поскольку период повторения SRS сигнала [11], в течение которого необходимо обновлять коэффициенты БПФ (без полного обучения), в сотни раз превышает длительность символа.

Заключение

Благодаря выравниванию пространственных векторов БПФ по направлениям прихода сигнала, предложенное обучаемое БПФ превосходит по точности выбора пространственного базиса фиксированное БПФ. Моделирование с использованием канала 5G NLOS, полученного с помощью программного обеспечения QuaDRiGa 2.0, демонстрирует выигрыш до 2 дБ для сценария с восемью абонентами.

Литература

1. Rusek F. et al. Scaling up MIMO: Opportunities and challenges with very large arrays // IEEE signal processing magazine. 2012. Т. 30. № 1. С. 40-60.
2. Marzetta T.L. Noncooperative cellular wireless with unlimited numbers of base station antennas // IEEE transactions on wireless communications. 2010. Т. 9. № 11. С. 3590-3600.
3. Shafi M. et al. 5G: A tutorial overview of standards, trials, challenges, deployment, and practice // IEEE journal on selected areas in communications. 2017. Т. 35. № 6. С. 1201-1221.
4. Osinsky A., Ivanov A., Yarotsky D. Bayesian approach to channel interpolation in massive MIMO receiver // IEEE Communications Letters. 2020. Т. 24. № 12. С. 2751-2755.
5. Ivanov A. et al. High performance interference suppression in multi-user massive MIMO detector // 2020 IEEE 91st Vehicular Technology Conference (VTC2020-Spring). IEEE, 2020. С. 1-5.
6. Kolesnikov I., Kirichenko M., Lyashev V. Nonlinear MIMO receiver with low complexity // 2021 International Conference Engineering and Telecommunication (En&T). IEEE, 2021. С. 1-5.
7. Kalfas G. et al. Converged analog fiber-wireless point-to-multipoint architecture for eCPRI 5G fronthaul networks // 2019 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM). IEEE, 2019. С. 1-6.
8. Adhikary A. et al. Joint spatial division and multiplexing – The large-scale array regime // IEEE transactions on information theory. 2013. Т. 59. № 10. С. 6441-6463.
9. Osinsky A. et al. Lower performance bound for beamspace channel estimation in massive mimo // IEEE Wireless Communications Letters. – 2020. Т. 10. № 2. С. 311-314.
10. Hegde A., Srinivas K.V. Matching theoretic beam selection in millimeter-wave multi-user MIMO systems // IEEE Access. 2019. Т. 7. С. 25163-25170.
11. Molodtsov V., Bychkov R., Osinsky A., Yarotsky D., Ivanov A. Beamspace selection in multi-user massive MIMO // IEEE Access. 2023. Т. 11. С. 18761-18771.
12. Liu G. et al. 3-D-MIMO with massive antennas paves the way to 5G enhanced mobile broadband: From system design to field trials // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2017. Т. 35. № 6. С. 1222-1233.
13. Mahdavi M. et al. A low complexity massive MIMO detection scheme using angular-domain processing // 2018 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP). IEEE, 2018. С. 181-185.
14. Jiang Z., Zhou S., Niu Z. Antenna-beam spatial transformation in C-RAN with large antenna arrays // 2017 IEEE International Conference on Communications Workshops (ICC Workshops). IEEE, 2017. С. 1215-1220.
15. Wen C.K. et al. Channel estimation for massive MIMO using Gaussian-mixture Bayesian learning // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2014. Т. 14. № 3. С. 1356-1368.
16. Takahashi T. et al. Low-complexity large MIMO detection via layered belief propagation in beam domain // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2021. Т. 21. № 1. С. 234-249.
17. Shikida J., Muraoka K., Ishii N. Sparse channel estimation using multiple DFT matrices for massive MIMO systems // 2018 IEEE 88th Vehicular Technology Conference (VTC-Fall). IEEE, 2018. С. 1-5.
18. Xie H. et al. A unified transmission strategy for TDD/FDD massive MIMO systems with spatial basis expansion model // IEEE Transactions on Vehicular Technology. 2016. Т. 66. № 4. С. 3170-3184.
19. Wu P., Cheng J. Deep unfolding basis pursuit: Improving sparse channel reconstruction via data-driven measurement matrices // IEEE Transactions on Wireless Communications. 2022. Т. 21. № 10. С. 8090-8105.
20. Notarnicola F. Matrix recursive expressions of the DFT of even and odd complex sequences // Numerical Linear Algebra with Applications. 2005. Т. 12. № 8. С. 793-808.
21. Dita P. Factorization of unitary matrices // Journal of Physics A: Mathematical and General. 2003. Т. 36. № 11. С. 2781.
22. Jaeckel S. et al. QuaDRiGa: A 3-D multi-cell channel model with time evolution for enabling virtual field trials // IEEE transactions on antennas and propagation. 2014. Т. 62. № 6. С. 3242-3256.
23. Osinsky A., Ivanov A., Yarotsky D. Spatial denoising for sparse channel estimation in coherent massive mimo // 2021 IEEE 94th Vehicular Technology Conference (VTC2021-Fall). IEEE, 2021. С. 1-5.

PARAMETERIZED FFT APPLICATION FOR SIGNAL PROCESSING SPACE ESTIMATION IN MASSIVE MIMO SYSTEM

Roman A. Bychkov, Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia, r.bychkov@skoltech.ru

The research was carried out at Skoltech and supported by the Russian Science Foundation (project no. 24-29-00189)

Abstract

This paper is dedicated to the parameterized fast Fourier transform (FFT) applied for beamspace selection in multi-user (MU) mode of a multiple-input multiple-output (MIMO) receiver. The discrete Fourier transform (DFT) is widely used for beamspace selection due to its low implementation complexity via FFT. However, such a transformation causes performance loss in MU mode since the fixed DFT directions are not aligned with the signal's directions of arrival (DOA). This problem is being solved here via parametrization and optimization of the FFT. Three versions of trainable FFT are proposed, which are different in computational complexity and resulting beamspace selection accuracy. It is analytically proven, that other parametrizations of FFT used for beamspace selection are just special cases of proposed algorithms. Each version of parametrized FFT is optimized for the specific problem of beamspace selection, and the computational complexity is analyzed. Simulation results for the MIMO receiver with the non-line-of-sight channel generated by the QuaDRiGa 2.0 tool show up to 2 dB performance gain compared to conventional FFT beamspace.

Keywords: MIMO, beamspace, FFT, multi-user mode, optimization.

References

1. F. Rusek et al., "Scaling Up MIMO: Opportunities and Challenges with Very Large Arrays," *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 30, no. 1, pp. 40-60, Jan. 2013, doi: 10.1109/MSP.2011.2178495.
2. T.L. Marzetta, "Noncooperative Cellular Wireless with Unlimited Numbers of Base Station Antennas," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 9, no. 11, pp. 3590-3600, November 2010, doi: 10.1109/TWC.2010.092810.091092.
3. M. Shafi et al., "5G: A Tutorial Overview of Standards, Trials, Challenges, Deployment, and Practice," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 35, no. 6, pp. 1201-1221, June 2017, doi: 10.1109/JSAC.2017.2692307.
4. A. Osinsky, A. Ivanov and D. Yarotsky, "Bayesian Approach to Channel Interpolation in Massive MIMO Receiver," *IEEE Communications Letters*, vol. 24, no. 12, pp. 2751-2755, Dec. 2020, doi: 10.1109/LCOMM.2020.3018541.
5. A. Ivanov, A. Osinsky, D. Lakontsev and D. Yarotsky, "High Performance Interference Suppression in Multi-User Massive MIMO Detector," *2020 IEEE 91st Vehicular Technology Conference (VTC2020-Spring)*, Antwerp, Belgium, 2020, pp. 1-5, doi: 10.1109/VTC2020-Spring48590.2020.9128653.
6. I. Kolesnikov, M. Kirichenko and V. Lyashev, "Nonlinear MIMO receiver with low complexity," *2021 International Conference Engineering and Telecommunication (En&T)*, Dolgoprudny, Russian Federation, 2021, pp. 1-5, doi: 10.1109/EnT50460.2021.9681751.
7. G. Kalfas et al., "Converged Analog Fiber-Wireless Point-to-Multipoint Architecture for eCPRI 5G Fronthaul Networks," *2019 IEEE Global Communications Conference (GLOBECOM)*, Waikoloa, HI, USA, 2019, pp. 1-6, doi: 10.1109/GLOBECOM38437.2019.9013123.
8. A. Adhikary, J. Nam, J. -Y. Ahn and G. Caire, "Joint Spatial Division and Multiplexing-The Large-Scale Array Regime," *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 59, no. 10, pp. 6441-6463, Oct. 2013, doi: 10.1109/TIT.2013.2269476.
9. A. Osinsky, A. Ivanov, D. Lakontsev and D. Yarotsky, "Lower Performance Bound for Beamspace Channel Estimation in Massive MIMO," *IEEE Wireless Communications Letters*, vol. 10, no. 2, pp. 311-314, Feb. 2021, doi: 10.1109/LWC.2020.3029678.
10. A. Hegde and K. V. Srinivas, "Matching Theoretic Beam Selection in Millimeter-Wave Multi-User MIMO Systems," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 25163-25170, 2019, doi: 10.1109/ACCESS.2019.2897894.
11. V. Molodtsov, R. Bychkov, A. Osinsky, D. Yarotsky and A. Ivanov, "Beamspace Selection in Multi-User Massive MIMO," *IEEE Access*, vol. 11, pp. 18761-18771, 2023, doi: 10.1109/ACCESS.2023.3247342.
12. G. Liu et al., "3-D-MIMO With Massive Antennas Paves the Way to 5G Enhanced Mobile Broadband: From System Design to Field Trials," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 35, no. 6, pp. 1222-1233, June 2017, doi: 10.1109/JSAC.2017.2687998.
13. M. Mahdavi, O. Edfors, V. ?wall and L. Liu, "A Low Complexity Massive MIMO Detection Scheme Using Angular-Domain Processing," *2018 IEEE Global Conference on Signal and Information Processing (GlobalSIP)*, Anaheim, CA, USA, 2018, pp. 181-185, doi: 10.1109/GlobalSIP.2018.8646483.
14. Z. Jiang, S. Zhou and Z. Niu, "Antenna-beam spatial transformation in c-RAN with large antenna arrays," *2017 IEEE International Conference on Communications Workshops (ICC Workshops)*, Paris, France, 2017, pp. 1215-1220, doi: 10.1109/ICCW.2017.7962824.

15. C. -K. Wen, S. Jin, K. -K. Wong, J. -C. Chen and P. Ting, "Channel Estimation for Massive MIMO Using Gaussian-Mixture Bayesian Learning," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 14, no. 3, pp. 1356-1368, March 2015, doi: 10.1109/TWC.2014.2365813.
16. T. Takahashi, A. T?lli, S. Ibi and S. Sampei, "Low-Complexity Large MIMO Detection via Layered Belief Propagation in Beam Domain," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 21, no. 1, pp. 234-249, Jan. 2022, doi: 10.1109/TWC.2021.3094970.
17. J. Shikida, K. Muraoka and N. Ishii, "Sparse Channel Estimation Using Multiple DFT Matrices for Massive MIMO Systems," *2018 IEEE 88th Vehicular Technology Conference (VTC-Fall)*, Chicago, IL, USA, 2018, pp. 1-5, doi: 10.1109/VTCFall.2018.8690696.
18. H. Xie, F. Gao, S. Zhang and S. Jin, "A Unified Transmission Strategy for TDD/FDD Massive MIMO Systems With Spatial Basis Expansion Model," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 66, no. 4, pp. 3170-3184, April 2017, doi: 10.1109/TVT.2016.2594706.
19. P. Wu and J. Cheng, "Deep Unfolding Basis Pursuit: Improving Sparse Channel Reconstruction via Data-Driven Measurement Matrices," *IEEE Transactions on Wireless Communications*, vol. 21, no. 10, pp. 8090-8105, Oct. 2022, doi: 10.1109/TWC.2022.3164091.
20. F. Notarnicola, "Matrix recursive expressions of the DFT of even and odd complex sequences," *Numerical Linear Algebra with Applications*, vol. 12, no. 8, pp. 793-808, 2005.
21. P. Dita, "Factorization of unitary matrices," *Journal of Physics A: Mathematical and General*, vol. 36, no. 11, p. 2781, 2003.
22. S. Jaeckel, L. Raschkowski, K. B?rner and L. Thiele, "QuaDRiGa: A 3-D Multi-Cell Channel Model With Time Evolution for Enabling Virtual Field Trials," *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, vol. 62, no. 6, pp. 3242-3256, June 2014, doi: 10.1109/TAP.2014.2310220.
23. A. Osinsky, A. Ivanov and D. Yarotsky, "Spatial Denoising for Sparse Channel Estimation in Coherent Massive MIMO," *2021 IEEE 94th Vehicular Technology Conference (VTC2021-Fall)*, Norman, OK, USA, 2021, pp. 1-5, doi: 10.1109/VTC2021-Fall52928.2021.9625153.

Information about author:

Roman A. Bychkov, Research scientist, Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia. ORCID: 0000-0001-7648-5399