

КАНОНИЧЕСКАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ МНОГОМЕРНОЙ ОЦЕНКИ ММО КАНАЛА НА ФОНЕ ШУМА

DOI: 10.36724/2072-8735-2025-19-7-11-18

Благодарный Александр Сергеевич,
 Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет, МФТИ), г. Долгопрудный, Россия, blagodarnyi.as@phystech.edu

Manuscript received 30 May 2025;
Accepted 24 June 2025

Шерстобитов Александр Иванович,
 Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет, МФТИ), г. Долгопрудный, Россия, sherstobitov.ai@ict-lab.ru

Ляшев Владимир Александрович,
 Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет, МФТИ), г. Долгопрудный, Россия, lyashev.va@mipt.ru

Тыртышников Евгений Евгеньевич,
 Московский государственный университет, Москва, Россия, eugene.tyrtysnikov@gmail.com

Ключевые слова: MIMO OFDM, оценка канала, тензорная обработка, тензорное разложение, 6G

В современных MIMO системах беспроводной связи с большим числом антенн (Massive MIMO) точность оценивания состояния радиоканала играет ключевую роль в обеспечении высокой пропускной способности (спектральной эффективности). Корректное определение параметров канала связи позволяет базовой станции сформировать пространственный фильтр направленной передачи сигнала, компенсируя такие негативные эффекты как многолучевое распространение, межсимвольная интерференция и аддитивный белый гауссовский шум. В таких системах связи, низкое отношение сигнал шум в восходящем тракте может существенно ограничивать пропускную способность системы в нисходящем канале. Традиционные методы оценивания канала связи, часто оказываются недостаточно эффективными в условиях сильных помех и многолучевого характера распространения сигнала. Существенные ограничения применяемых методов оценивания канала беспроводной связи связаны с независимостью обработки каждого отдельного канала MIMO системы, не использование пространственных свойств фильтруемого сигнала для подавления помех и интерференции. В данной работе предлагается подход, основанный на преобразовании многомерного сигнала оценки MIMO канала связи в многомерный тензор для совместной обработки во всех размерностях, что позволяет более эффективно использовать структуру данных. Как показано в исследовании, тензорные методы обработки многомерных сигналов потенциально могут обеспечить до 10% улучшение точности оценки MIMO канала связи в условиях низких отношений сигнал-шум (до -20 дБ).

Информация об авторах:

Благодарный Александр Сергеевич, аспирант МФТИ, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет, МФТИ), Московская область, г. Долгопрудный, Россия. ORCID: 0000-0002-8238-9464

Шерстобитов Александр Иванович, канд. техн. наук, старший научный сотрудник лаборатории мультимедийных систем и технологий, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет, МФТИ), Московская область, г. Долгопрудный, Россия. ORCID: 0000-0002-5489-0155

Ляшев Владимир Александрович, канд. техн. наук, доцент кафедры мультимедийных технологий и телекоммуникаций, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет, МФТИ), Московская область, г. Долгопрудный, Россия. ORCID: 0000-0002-6993-1589

Тыртышников Евгений Евгеньевич, д-р. физ.-мат. наук, академик РАН, профессор кафедры Вычислительных технологий моделирования, Московский государственный университет, Москва, Россия. ORCID: 0000-0002-4754-0528

Для цитирования:

Благодарный А.С., Шерстобитов А.И., Ляшев В.А., Тыртышников Е.Е. Каноническая факторизация многомерной оценки MIMO канала на фоне шума // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2025. Том 19. №7. С. 11-18.

For citation:

A. S. Blagodarnyi, A. I. Sherstobitov, V. A. Lyashev, E. E. Tyrtysnikov, "Canonical decomposition of multidimensional noisy MIMO channel estimation", T-Comm, 2025, vol. 19, no.7, pp. 11-18. (in Russian)

Введение

Обеспечение высоких показателей пропускной способности и энергоэффективности является приоритетной задачей развития современных систем беспроводной связи. Одной из ключевых технологий, способствующих достижению этих целей, является использование систем с множеством антенн, известных как Massive MIMO (Multiple-Input Multiple-Output) [1]. Применение многоантенной архитектуры позволяет существенно повысить спектральную эффективность и надёжность передачи данных посредством пространственной селекции пользователей [2]. Однако, несмотря на значительный потенциал таких систем, реализация заложенных возможностей сталкивается с проблемами, среди которых ключевую роль играет обеспечение точной и своевременной информацией о состоянии канала (Channel State Information, CSI) [3]. Эта информация необходима для эффективного формирования пространственного фильтра передающего устройства, распределения мощности между пользователями и корректного декодирования сигнала на приёмном устройстве [1, 2].

Задача получения достоверной оценки MIMO канала связи усугубляется из-за тенденции к увеличению числа антенных элементов на базовой станции, пользовательском оборудовании и увеличению числа используемых поднесущих. Эти факторы обуславливают значительное возрастание сложности процедуры оценки состояния MIMO канала [4]. Кроме того, традиционные методы оценки, такие как оконная фильтрация [5], адаптивная оконная фильтрация [6] демонстрируют недостаточную эффективность в условиях с низким отношением сигнал-шум (ОСШ) и многолучевого распространения, что мотивирует поиск альтернативных алгоритмов. Фильтр Винера [6], несмотря на свою теоретическую привлекательность, характеризуется высокими требованиями к вычислительным ресурсам и необходимостью стационарности сигнала, что ограничивает его практическое применение.

Перечисленные методы, как правило, оценивают канал независимо, в пространстве задержек или лучей, игнорируя взаимосвязь между этими пространствами, что снижает потенциальную точность оценки. Таким образом возникает потребность в разработке принципиально новых решений, обеспечивающих совместную обработку многомерной структуры сигнала одновременно во всех измерениях. Важное направление исследований связано с применением методов машинного обучения [7], которые способны учитывать сложные зависимости между различными составляющими многомерного канала связи путём отображения исходных данных в признаковое пространство с сохранением внутренней структуры [8]. Тем не менее подобные решения часто предъявляют высокие требования к качеству тренировочной выборки и наличию специализированных аппаратных ресурсов, таких как нейропроцессоры (Neural Processing Unit, NPU) или графические ускорители (Graphics Processing Unit, GPU) [9].

Другим перспективным решением проблемы оценки многомерного MIMO канала является использование тензорных методов обработки сигналов [10]. Этот подход основан на классических методах линейной алгебры и позволяет реализовать вычисления на стандартных процессорах, поддерживающих матричные операции. Тензорная обработка позволяет учесть взаимосвязь между всеми измерениями многомерного сигнала, предоставляя преимущество в подавлении

шума и устойчивости к низкому уровню ОСШ. Исследования показывают, что увеличение числа размерностей малорангового тензора, позволяет повысить качество восстановления этого тензора на фоне шума [11]. Данная работа посвящена исследованию этого эффекта в применении к задаче оценки MIMO канала связи, учитывая его особенности, для увеличения эффективности алгоритма и качества восстанавливаемого канала связи. Анализируются достоинства и недостатки предлагаемого решения.

Системная модель

Рассмотрим OFDM систему с одним приёмником и передатчиком. Пусть устройство пользователя оборудовано одной всенаправленной антенной, а базовая станция - прямоугольной антенной решёткой, состоящей из M элементов одной поляризации (рис. 1). В беспроводных сетях четвёртого и пятого поколений (4G и 5G) для оценки частотной избирательности канала связи в восходящем тракте с временным разделением каналов используются специальные (Sounding Reference Signals - SRS) пилот-символы, излучаемые пользовательским терминалом на каждой n -ой поднесущей. В совокупности, пусть N – общее число принятых пилотных символов на базовой станции с терминального устройства, которые измерены на каждой $n = \{0, \dots, N - 1\}$ поднесущих, разнесённых на равные интервалы Δf . Тогда комплексные коэффициенты затухания канала $h(m, n)$, измеренные на каждом антенном элементе $m = \{0, \dots, M - 1\}$ и поднесущей $n = \{0, \dots, N - 1\}$ могут быть представлены в виде матрицы $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{M \times N}$. Учитывая наличие аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ) на приёмной стороне с дисперсией σ^2 , наблюдаемая матрица сигнала $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ может быть записана как:

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} + \mathbf{N}, \tag{1}$$

где $\mathbf{N} \in \mathbb{C}^{M \times N}$, $\mathbf{N} \sim \mathcal{CN}(0, \sigma^2)$ – матрица комплексного гауссовского шума [2]. Целью настоящего исследования является разработка алгоритма восстановления $g: g(\tilde{\mathbf{H}}) = \hat{\mathbf{H}}$, минимизирующего среднеквадратичную ошибку ε между идеальным сигналом \mathbf{H} и восстановленным $\hat{\mathbf{H}} \in \mathbb{C}^{M \times N}$: $\varepsilon = \|\hat{\mathbf{H}} - \mathbf{H}\|_F^2$:

$$\varepsilon = \underset{g}{\text{minimize}} \|\hat{\mathbf{H}} - \mathbf{H}\|_F^2. \tag{2}$$

Общая схема MIMO OFDM системы приведена на рисунке 1.

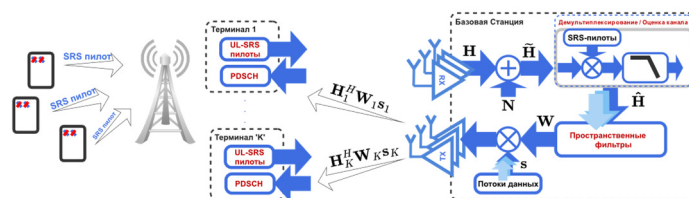


Рис. 1. Общая схема исследования

Методы оценки канала

Для реализации оценки канала $\hat{\mathbf{H}}$ на фоне шума \mathbf{N} в MIMO-системах связи часто исходят из предположения, что ее можно реализовать с помощью линейной операции, путем

отображения в пространство, где \mathbf{H} будет обладать свойством разреженности. Это означает, что большая часть энергии оцениваемого полезного сигнала $\hat{\mathbf{H}}$ сосредоточена в относительно малом числе отсчётов. Наиболее распространённым линейным преобразованием является дискретное преобразование Фурье (ДПФ), проецирующее частотное представление $\hat{\mathbf{H}}$ в область временных задержек (τ_n), что отражает его пространственно-временную структуру [12]. В матричной форме это может быть представлено как:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H}\mathbf{F}_N, \quad \mathbf{Z} \in \mathbb{C}^{M \times N}, \quad (3)$$

где $\mathbf{F}_N \in \mathbb{C}^{N \times N}$ – матрица обратного дискретного преобразования Фурье с элементами $[\mathbf{F}_N]_{nk} = e^{\frac{2\pi j}{N}nk}$, где $n, k \in \{0, 1, \dots, N-1\}$. Поскольку распределение временных задержек на антенных элементах, как правило, совпадает, то можно усреднить результат по размерности антенн с целью получения одномерного распределения мощности по временным задержкам:

$$\mathbf{p} = \sum_{m=0}^{M-1} |Z(m, n)|^2, \quad \mathbf{p} \in \mathbb{R}^N. \quad (4)$$

Обработку и анализ распределения значений вектора \mathbf{p} можно использовать для построения алгоритма оконной фильтрации, исключая компоненты с незначительным уровнем мощности. При наличии набора реализаций сигналов \mathbf{Z} , порождённых одной и той же вероятностной моделью канала беспроводной связи, возможна оценка порога отсечки n_c для алгоритма, который не зависит от конкретной реализации сигнала [5]:

$$Z(m, n) = \begin{cases} Z(m, n), & n \leq n_c \\ 0, & n > n_c \end{cases}, \quad \forall m \in \{0, \dots, M-1\}, \quad (5)$$

где n_c выбирается такое, что [12]:

$$\frac{\sum_{n=0}^{n_c} p(n)}{\sum_{n=0}^{N-1} p(n)} \approx 0,9. \quad (6)$$

Более точным способом оценивания является метод адаптивной оконной фильтрации, который использует знание о мощности шума $\hat{\sigma}_n^2$ на приёмнике и позволяет построить фильтр для каждой реализации сигнала [6]. Если предположить, что мощность шума на поднесущую известна априорно и равна σ_n^2 , то можно воспользоваться эвристическим правилом, что компоненты с мощностью $p(n) < 3\sigma_n^2$ можно считать обусловленными шумом и исключить из оценки. В этом случае выражение (5) запишется как:

$$Z(m, n) = \begin{cases} Z(m, n), & \forall n: p(n) \geq 3\sigma_n^2 \\ 0, & \forall n: p(n) < 3\sigma_n^2 \end{cases}, \quad \forall m \in \{0, \dots, M-1\}. \quad (7)$$

Кроме того, эффективным методом оценивания является – фильтр Винера, использующий априорную информацию о ковариационных характеристиках сигнала и шума [6]. Фильтр Винера $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ строится следующим образом:

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_{xx}(\mathbf{R}_{xx} + \mathbf{R}_{nn})^{-1}, \quad (8)$$

где $\mathbf{R}_{nn} \in \mathbb{C}^{N \times N}$ – ковариационная матрица шума, которая, при условии независимого и одинакового распределённого шума \mathbf{N} может быть представлена как $\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \mathbf{I}_n$, где \mathbf{I}_n –

единичная матрица. Ковариационная матрица полезного сигнала $\mathbf{R}_{xx} \in \mathbb{C}^{N \times N}$, может быть аппроксимирована по предварительной оценке канала, например, после алгоритма адаптивной оконной фильтрации: $\mathbf{R}_{xx} = \hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}}$. Тогда результирующая оценка канала связи рассчитывается как:

$$\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}\mathbf{W}. \quad (9)$$

Предлагаемое решение

Для любой матрицы \mathbf{H} , размерности $M \times N$, где M и N не простые числа, можно определить операцию реструктуризации, при которой каждая размерность M и N может быть разбита на K мод (субразмерностей) $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_K$ таких, что $M = M_1 M_2 \dots M_K$ и L мод $N_1 \times N_2 \times \dots \times N_L$ таких, что $N = N_1 N_2 \dots N_L$. В результате «тензоризации», размерности матрицы $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{M \times N}$ реструктурируются в тензор $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{M_1 \times \dots \times M_K \times N_1 \times \dots \times N_L}$ (см. рис. 2). Индексам (m, n) из матрицы \mathbf{H} будут соответствовать индексы $(m_1, \dots, m_K, n_1, \dots, n_L)$ из тензора \mathcal{H} , которые связаны выражениями:

$$\begin{aligned} m &= \sum_{k=1}^K \left(m_k \cdot \prod_{p=k+1}^K M_p \right), \\ n &= \sum_{l=1}^L \left(n_l \cdot \prod_{q=l+1}^L N_q \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где $m_k \in \{0, 1, \dots, M_k - 1\}$, $n_l \in \{0, 1, \dots, N_l - 1\}$.

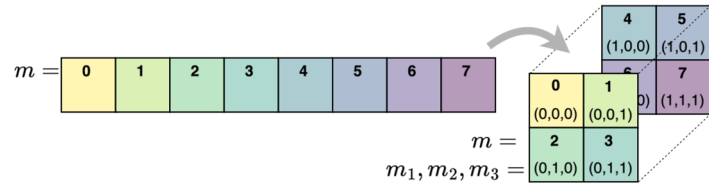


Рис. 2. Пример реструктуризации вектора длины $M = 8$ в тензор с размерностями $M_1, M_2, M_3 = 2$. Верхние индексы элементов соответствуют индексу m из вектора, нижние – индексам (m_1, m_2, m_3) из тензора. Соответствие между индексами определяется формулой (10)

Преобразование (10) не изменяет данные, а только отображает их в многомерную структуру – то есть является биективным отображением между различными формами представления одних и тех же чисел. Применение реструктуризации матрицы в многомерный тензор позволяет использовать тензорные алгоритмы факторизации [13, 14] для поиска многомерной структуры данных, такие как каноническое разложение [15], разложение Таккера [16], ТТ-разложение [17] и другие. Для простоты, рассмотрим каноническое разложение [18] (Canonical Polyadic decomposition), которое существует для любого тензора $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{M_1 \times \dots \times M_K \times N_1 \times \dots \times N_L}$ и описывается выражением:

$$\mathcal{H} \approx \sum_{r=1}^R \mathcal{H}_r = \sum_{r=1}^R \mathbf{h}_r^{(M_1)} \dots \circ \mathbf{h}_r^{(M_K)} \circ \mathbf{h}_r^{(N_1)} \dots \circ \mathbf{h}_r^{(N_L)}, \quad (11)$$

где вектора $\mathbf{h}_r^{(i)} \in \mathbb{C}^i$, $\forall i \in \{M_1, \dots, M_K, N_1, \dots, N_L\}$, образуют одноранговый тензор $\mathcal{H}_r \in \mathbb{C}^{M_1 \times \dots \times M_K \times N_1 \times \dots \times N_L}$, а $r \in$

$\{1, \dots, R\}$ – определяет ранг канонического разложения. Операция \circ обозначает тензорное произведение для векторов (в литературе иногда используется термин «outer product»), при котором каждый элемент множителя справа умножается на весь множитель слева с формированием новой размерности [13]. Смысл выражения (11) заключается в том, что исходный тензор \mathcal{H} может быть представлен в виде суммы одноранговых тензоров, каждый из которых зависит только от $K + L$ векторов (рис. 3).

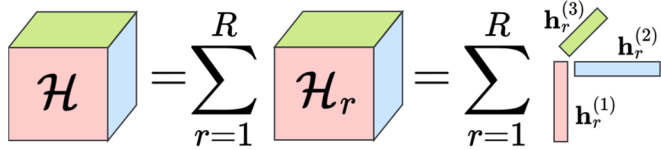


Рис. 3. Общая схема канонического разложения тензора. Для простоты число мод у изображенного тензора равняется трём

Для поиска канонического разложения может применяться метод чередующихся наименьших квадратов (ЧМК) известный также как Alternating Least Squares (ALS) [19, 20]. Метод чередующихся наименьших квадратов – итеративный алгоритм, который на каждой итерации ищет оптимальные, с точки зрения минимальной среднеквадратичной ошибки, наборы векторов $\mathbf{h}_r^{(i)}$, для каждой i -ой моды тензора. Алгоритм требует задания начальных приближений значений $\mathbf{h}_r^{(i)}$ на первой итерации. В качестве начальных значений обычно используют реализацию случайного распределения или сингулярное разложение [20].

Согласно полученным результатам, алгоритм со случайным начальным значением может сходиться медленно или, в некоторых ситуациях, расходиться. С другой стороны, способ, включающий сингулярное разложение, имеет кубическую сложность, что не позволяет использовать его для решения поставленной задачи факторизации. С целью ускорения сходимости тензорного разложения и уменьшения ошибки восстановления, предложен алгоритм для вычисления начального приближения, который использует знание о разреженности сигнала в пространстве временных задержек (τ) и лучей (α) с целью извлечения наиболее мощных компонент сигнала.

Первым шагом инициализации тензорного разложения является поиск индексов $\alpha \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$, $\tau \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ соответствующие лучам и временным задержкам с наибольшей мощностью отклика в оценке ММО канала связи:

$$\{\alpha, \tau\} = \operatorname{argmax} \left(|\mathbf{F}_M^H \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{F}_N|^2 \right), \quad (12)$$

где $(\cdot)^H$ – операция эрмитова сопряжения. Полученные индексы соответствуют векторам из матрицы обратного дискретного преобразования Фурье:

$$\mathbf{f}_\alpha^{(M)} = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{\frac{2\pi j}{M} m \alpha}, \quad \mathbf{f}_\tau^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{\frac{2\pi j}{N} n \tau}, \quad (13)$$

где $\mathbf{f}_\alpha^{(M)} \in \mathbb{C}^M$, $\mathbf{f}_\tau^{(N)} \in \mathbb{C}^N$. Однако, для инициализации канонического разложения необходимо сформировать набор векторов $\{\mathbf{f}_\alpha^{(M_1)}, \dots, \mathbf{f}_\alpha^{(M_K)}, \mathbf{f}_\tau^{(N_1)}, \dots, \mathbf{f}_\tau^{(N_L)}\}$.

Лемма

Пусть есть вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^M$ вида:

$$\mathbf{a} : a(m) = \frac{1}{\sqrt{M}} \exp \left(\frac{2\pi j}{M} m \alpha \right), \quad m \in \{0, 1, \dots, M - 1\}, \quad 0 \leq \alpha < M - 1, \quad (14)$$

причём $\|\mathbf{a}\|_2 = 1$. Также пусть M – не простое число и имеет K простых делителей, то есть $M = M_1 M_2 \dots M_K$, тогда вектор \mathbf{a} может быть представлен в виде произведения Кронекера K векторов $\mathbf{a}^{(k)} \in \mathbb{C}^{M_k}$, каждый из которых имеет единичную норму ($\|\mathbf{a}^{(k)}\|_2 = 1$) и зависит от параметра α и размеров делителей M_1, M_2, \dots, M_K следующим образом:

$$\mathbf{a} = \bigotimes_{k=1}^K \mathbf{a}^{(k)}, \quad \mathbf{a}^{(k)}(m_k) = \frac{1}{\sqrt{M_k}} \exp \left(\frac{2\pi j}{\prod_{p=1}^k M_p} \alpha m_k \right), \quad k \in \{0, 1, \dots, M_k - 1\}. \quad (15)$$

Доказательство:

Проведём операцию реструктуризации вектора $\mathbf{a} \in \mathbb{C}^M$ в тензор $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{M_1 \times M_2 \times \dots \times M_K}$, тогда по определению (10) существует однозначное соответствие между индексами $m \in \{0, 1, \dots, M - 1\}$ вектора \mathbf{a} и индексами (m_1, m_2, \dots, m_K) тензора \mathcal{A} (рис. 2) а именно:

$$m = \sum_{k=1}^K \left(m_k \cdot \prod_{p=k+1}^K M_p \right). \quad (16)$$

Тогда элемент тензора \mathcal{A} может быть выражен следующим выражением:

$$\mathcal{A}(m_1, m_2, \dots, m_K) = \frac{1}{\sqrt{M}} \exp \left(\frac{2\pi j}{M} \alpha \sum_{k=1}^K \left(m_k \cdot \prod_{p=k+1}^K M_p \right) \right). \quad (17)$$

Учитывая, что суммирование под экспонентой можно заменить на произведение экспонент ($e^{x+y} = e^x e^y$), получаем:

$$\mathcal{A}(m_1, \dots, m_k, \dots, m_K) = \frac{1}{\sqrt{M}} \prod_{k=1}^K \exp \left(\frac{2\pi j}{M} \alpha m_k \cdot \prod_{p=k+1}^K M_p \right). \quad (18)$$

Заметим, что каждый множитель – это элемент m_k вектора $\mathbf{a}^{(k)} \in \mathbb{C}^{M_k}$:

$$\mathbf{a}^{(k)}(m_k) = \exp \left(\frac{2\pi j}{M} \alpha m_k \cdot \prod_{p=k+1}^K M_p \right). \quad (19)$$

Учитывая, что нормирующий множитель $\sqrt{M} = \sqrt{M_1 M_2 \dots M_K}$ можно внести под знак произведения, а в аргументе экспоненты $M = M_1 M_2 \dots M_K$, выражение (19) может быть упрощено:

$$\mathbf{a}^{(k)}(m_k) = \frac{1}{\sqrt{M_k}} \exp \left(\frac{2\pi j}{\prod_{p=1}^k M_p} \alpha m_k \right).$$

Тогда:

$$\mathcal{A}(m_1, \dots, m_k, \dots, m_K) = \prod_{k=1}^K \mathbf{a}^{(k)}(m_k). \quad (20)$$

Однако, этому же элементу $\mathcal{A}(m_1, \dots, m_k, \dots, m_K)$ тензора соответствует элемент из вектора $\mathbf{a}(m)$:

$$\mathbf{a}(m) = \prod_{k=1}^K \mathbf{a}^{(k)}(m_k), \quad (21)$$

где m задаётся выражением (16), что является определением произведения Кронекера между векторами $\mathbf{a}^{(k)}$, то есть:

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}^{(1)} \otimes \mathbf{a}^{(2)} \otimes \dots \otimes \mathbf{a}^{(K)} = \bigotimes_{k=1}^K \mathbf{a}^{(k)}. \quad (22)$$

Таким образом, набор векторов $\{\mathbf{f}_\alpha^{(M_1)}, \dots, \mathbf{f}_\alpha^{(M_K)}\}$ может быть получен после оценивания индекса, который соответствует лучу α с максимальной мощностью, а набор векторов $\{\mathbf{f}_\tau^{(N_1)}, \dots, \mathbf{f}_\tau^{(N_L)}\}$ после оценивания индекса временных задержек τ . Такой алгоритм начального приближения позволяет повысить скорость сходимости метода чередующихся наименьших квадратов и является более простым по сравнению с инициализацией с помощью вычисления сингулярного разложения. Алгоритм вычисления начального условия описан ниже (Алгоритм 1).

Алгоритм 1 Алгоритм начального приближения для РЧМНК

Вход Наблюдаемая матрица $\tilde{\mathbf{H}} \in C^{M \times N}$;
 Субразмерности $\Omega_M \leftarrow \{M_1, \dots, M_K\}$, $\Omega_N \leftarrow \{N_1, \dots, N_L\}$;
Выход Набор фазовых векторов $\{\mathbf{f}_\alpha^{(M_k)}\}_{k=1}^K, \{\mathbf{f}_\tau^{(N_l)}\}_{l=1}^L$

- 1: $\mathbf{P} \leftarrow |\mathbf{F}_M^H \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{F}_N|^2$ ▷ Амплитудный спектр в пространстве лучей и задержек
- 2: $(\alpha, \tau) \leftarrow \text{argmax}(\mathbf{P})$ ▷ Индексы луча α и задержки τ наибольшей мощности
- 3: $C_k \leftarrow \prod_{p=1}^k M_p, \forall k \in \{1, \dots, K\}$ ▷ Коэффициенты для K векторов
- 4: ▷ Вычисление K фазовых векторов тензора: ◁
- 5: $\mathbf{f}_\alpha^{(M_k)} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{M_k}} \exp\left(\frac{2\pi j}{C_k} \alpha \mathbf{m}_k\right), \mathbf{m}_k = [0, \dots, M_k - 1], \forall k \in \{1, \dots, K\}$
- 6: $C_l \leftarrow \prod_{p=1}^l N_p, \forall l \in \{1, \dots, L\}$ ▷ Коэффициенты для L векторов
- 7: ▷ Вычисление L фазовых векторов тензора: ◁
- 8: $\mathbf{f}_\tau^{(N_l)} \leftarrow \frac{1}{\sqrt{N_l}} \exp\left(\frac{2\pi j}{C_l} \tau \mathbf{n}_l\right), \mathbf{n}_l = [0, \dots, N_l - 1], \forall l \in \{1, \dots, L\}$
- 9: **возврат** $\{\mathbf{f}_\alpha^{(M_k)}\}_{k=1}^K, \{\mathbf{f}_\tau^{(N_l)}\}_{l=1}^L$

Алгоритм ЧМНК канонического разложения требует априорного определения канонического ранга R , оценка которого является NP-трудной задачей [13], что также ограничивает область применения такого алгоритма. Исходя из свойств разреженности обрабатываемого сигнала, являющийся оценкой ММО канала беспроводной связи, канонический ранг тензора R намного меньше числа элементов этого тензора. Предложено воспользоваться итеративной версией алгоритма, где на каждой итерации $t = \{1, \dots, T\}$ производится оценка однорангового тензора \mathcal{H}_t , которые вычитаются из остаточного тензора $\tilde{\mathcal{H}}$ и аккумулируются в оцениваемом тензоре $\hat{\mathcal{H}}$ (рис. 4).

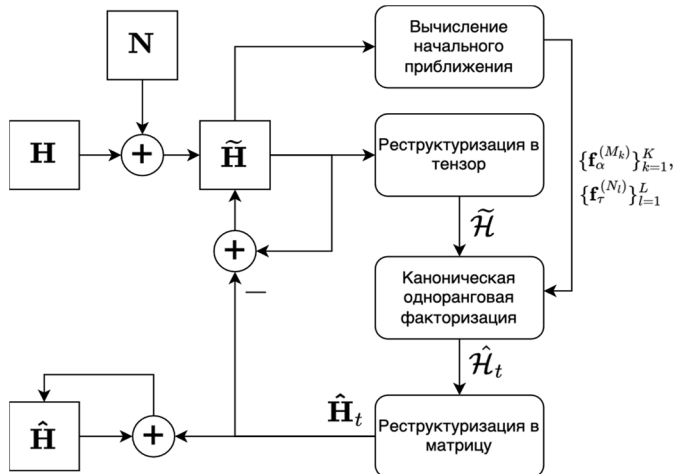


Рис. 4. Схема предложенного алгоритма

Такой подход позволяет принимать решение о числе итераций T непосредственно во время работы алгоритма, анализируя нормы оцененного однорангового тензора и остаточного тензора. Структурная схема предлагаемого алгоритма факторизации оценки ММО канала связи с помощью метода ЧМНК представлена на рисунке 3. Также ниже представлен алгоритм получения оценки ММО канала на основе ЧМНК канонической факторизации (Алгоритм 2).

Алгоритм 2 Предложенный алгоритм оценки ММО канала

Вход Наблюдаемая матрица $\tilde{\mathbf{H}} \in C^{M \times N}$;
 Субразмерности $\Omega_M \leftarrow \{M_1, \dots, M_K\}$, $\Omega_N \leftarrow \{N_1, \dots, N_L\}$;
 Число итераций T .
Выход Оценка канала $\hat{\mathbf{H}} \in C^{M \times N}$

- 1: $\tilde{\mathbf{H}} \leftarrow \tilde{\mathbf{H}}$ ▷ Инициализация остаточной матрицы
- 2: $\hat{\mathbf{H}} \leftarrow \mathbf{0}$ ▷ Инициализация оценки канала
- 3: $t = 0$ ▷ Текущая итерация алгоритма
- 4: **пока** $t < T$ **выполнить**
- 5: $\{\mathbf{f}_\alpha^{(M_k)}\}_{k=1}^K, \{\mathbf{f}_\tau^{(N_l)}\}_{l=1}^L \leftarrow f(\tilde{\mathbf{H}}, \Omega_M, \Omega_N)$ ▷ Нач. прил. f – Алгоритм 1
- 6: $\mathcal{H} \leftarrow g(\tilde{\mathbf{H}}, \Omega_M, \Omega_N)$ ▷ Реструктуризация в тензор. Выражение (10)
- 7: $\mathcal{H}_t \leftarrow q(\mathcal{H})$ ▷ 1-ранговая оценка ЧМНК
- 8: $\hat{\mathbf{H}}_t \leftarrow g^{-1}(\mathcal{H}_t, M, N)$ ▷ Реструктуризация к исходной размерности
- 9: $\tilde{\mathbf{H}} \leftarrow \tilde{\mathbf{H}} - \hat{\mathbf{H}}_t$ ▷ Обновление остаточной матрицы
- 10: $\hat{\mathbf{H}} \leftarrow \hat{\mathbf{H}} + \hat{\mathbf{H}}_t$ ▷ Обновление оценки
- 11: **возврат** $\hat{\mathbf{H}}$

Результаты имитационного моделирования

С целью проведения численного моделирования и верификации предложенного алгоритма оценивания ММО канала связи на фоне шума (Алгоритм 2), сгенерированы квазидетерминированные реализации модели стохастического ММО канала с помощью программного комплекса QuaDRiGa [21] с параметрами, указанными в таблице 1. Каждая реализация канала \mathbf{H} приведена к единичной норме ($\|\mathbf{H}\|_F^2 = 1$), а мощность шума задана относительно выбранного уровня отношения сигнал-шум восходящего тракта системы связи. Каждая реализация зашумленного сигнала $\tilde{\mathbf{H}}$ подвергалась оцениванию $\hat{\mathbf{H}}$ с помощью алгоритма оконной фильтрации (ОФ) (5), адаптивной оконной фильтрации (АОФ) (7), фильтра Винера (ФВ) (9), который синтезировался на основе ковариационной матрицы полезного сигнала $\hat{\mathbf{R}}_{xx} = \hat{\mathbf{H}}^H \hat{\mathbf{H}}$ (использовалась оценка $\hat{\mathbf{H}}$ после алгоритма адаптивной оконной фильтрации). Также, использована версия синтеза фильтра Винера при условии идеальной оценки матрицы ковариаций полезного сигнала $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{H}^H \mathbf{H}$, именуемая идеальным фильтром Винера (ИФВ).

Таблица 1

Описание конфигурации эксперимента

Параметр	Значение
Центральная частота	2.6 ГГц
Расстояние между поднесущими	15 кГц
Размер преобразования Фурье	1024
Число активных поднесущих	512
Эффективная полоса пропускания	7.68 МГц
Число реализаций	5000
ОСШ восходящего тракта	От -20 дБ до 0 дБ
Модель генератора канала	3GPP-Uma-NLOS-38.901 3GPP-Uma-LOS-38.901
Параметры реструктуризации	$M = 32, N = 512$ $\{M_k\}_{k=1}^5 = 2, \{N_l\}_{l=1}^9 = 2$

Для предложенного Алгоритма 2 выбраны две конфигурации. Первая – классический метод чередующихся наименьших квадратов с использованием исходной матрицы $\hat{\mathbf{H}}$ в качестве входа (ЧМНК), вторая – предложенная версия с реструктуризацией матрицы $\hat{\mathbf{H}}$ в многомерный тензор \mathcal{H} , который был использован алгоритмом чередующихся наименьших квадратов для факторизации (РЧМНК). В качестве критерия для остановки тензорного разложения использован минимум приращения нормы ошибки разложения (2), что является верхней достижимой границей для предложенного алгоритма.

Зависимости ошибки оценивания от отношения сигнал-шум для ММО канала в не прямой (А) и прямой (Б) видимости представлены на рисунке 4. Согласно полученным результатам, в условиях не прямой видимости, предложенный алгоритм превосходит по точности оценивания ММО канала другие алгоритмы, кроме идеального фильтра Винера.

В то же время, в условиях прямой видимости, предложенный алгоритм превосходит все алгоритмы в условиях отношения сигнал-шум меньше -13 дБ. Для более детального анализа рассмотрим функции распределения ошибки для отношений сигнал-шум 0 дБ и -20 дБ на рисунке 5.

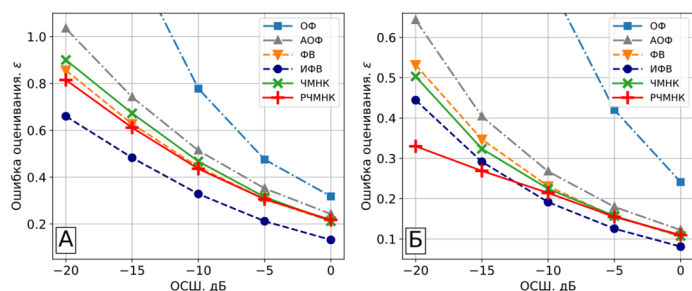


Рис. 5. Ошибка оценивания в зависимости от уровня ОСШ. А – канал в прямой видимости; Б – канал в не прямой видимости

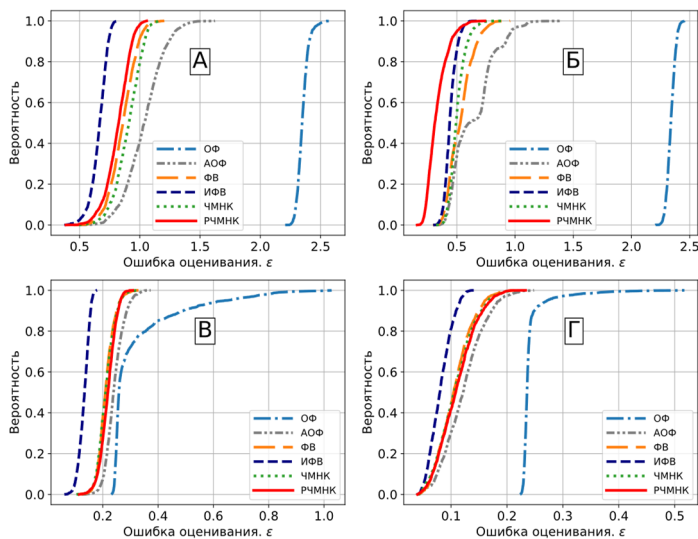


Рис. 6. Функция распределения ошибки оценивания: А – канал в не прямой видимости, ОСШ = -20дБ; Б – канал в прямой видимости, ОСШ = -20 дБ; В – канал в не прямой видимости, ОСШ = 0 дБ; Г – канал в прямой видимости, ОСШ = 0 дБ

Анализ представленных результатов показывает, что предложенный алгоритм имеет преимущество в подавлении при условии низких отношений сигнал-шум в восходящем канале (1). Анализ спектров временных задержек и лучей восстановленных каналов $\hat{\mathbf{H}}$ показал, что для высоких ОСШ, предложенный алгоритм сходится медленнее, чем при высоком ОСШ и, в целом, хуже описывает компоненты ММО канала, что связано с явлением растекания спектра. В то же время для низких ОСШ требуется от 1 до 3 итераций РЧМНК, а каждая компонента ММО канала оценивается точнее, чем фильтром Винера.

Вычислительная сложность

Сложность алгоритмов оконной и адаптивной оконной фильтрации обусловлена в первую очередь вычислением дискретного преобразования Фурье при переходе из области поднесущих в область временных задержек и составляет $\mathcal{O}(N \log(N))$ для всех M строк матрицы $\hat{\mathbf{H}}$. Применение фильтрации во временной области составляет $\mathcal{O}(MN)$ операций. Для расчета фильтра Винера необходимо применить предварительную оценку матрицы канала, которая используется для расчета матрицы ковариаций \mathbf{R}_{xx} со сложностью $\mathcal{O}(MN^2)$. Кроме того, присутствуют операции инверсии матрицы $(\mathbf{R}_{xx} + \mathbf{R}_{nn})^{-1}$ и умножение результата на \mathbf{R}_{xx} , сложность которых составляет $\mathcal{O}(N^3)$.

Финальная оценка сигнала рассчитывается согласно выражению (9), что имеет сложность $\mathcal{O}(MN^2)$. Относительно предложенного Алгоритма 2, предполагается, что ранг тензора на каждой итерации равен единице, поэтому сложность обновления каждого канонического фактора составляет $\mathcal{O}(MN)$, что требуется повторить для каждой моды тензора $K + L$ и для каждого из T одноранговых тензора. Обобщенные сравнительные оценки сложности алгоритмов фильтрации представлены в таблице 2.

Предложенный алгоритм оценивания ММО канала связи требует большей вычислительной сложности при высоком ОСШ для достижения высокой точности разложения. Однако в случае низких ОСШ, число итераций может быть существенно сокращено ($T \rightarrow 1$). Также сложность оценивания зависит от числа субразмерностей ($K + L$) и ограничена сверху $\mathcal{O}(\log_2(M + N))$, в случае когда длина каждой субразмерности равняется 2. В результате получается, что для низких значений отношения сигнал-шум предложенный алгоритм имеет меньшую или сопоставимую сложность по сравнению с фильтром Винера, а именно $\mathcal{O}(MN \cdot \log_2(M + N))$.

Таблица 2

Вычислительная сложность алгоритмов в нотации \mathcal{O}

Алгоритм	Сложность в нотации \mathcal{O}
Оконный фильтр	$\mathcal{O}(MN \log(N))$
Адаптивный оконный фильтр	$\mathcal{O}(MN \log(N))$
Фильтр Винера	$\mathcal{O}(N^3 + MN^2)$
Метод чередующихся наименьших квадратов с реструктуризацией в тензор	$\mathcal{O}(MN(K + L)T)$

Вывод

Предложенный алгоритм оценивания ММО канала связи на фоне аддитивного шума при идеальном знании оптимального числа итераций T , превосходит существующие алгоритмы фильтрации по уровню ошибки оценивания (выигрыш достигает до 10% по сравнению с фильтром Винера, синтезированным по идеальной ковариационной матрице сигнала) для низких отношений сигнал-шум (-20 дБ), а также обладает меньшей вычислительной сложностью по сравнению с фильтром Винера при условии, что T мало. Однако, дальнейшего исследования требуют отдельного внимания к разработке способа оценки необходимого числа итераций канонического разложения, а также способа увеличения скорости сходимости алгоритма и качества оценки для высоких отношений сигнал-шум.

Литература

1. Бакулин М.Г., Варукина Л.А., Крейнделлин В.Б. Технология ММО: принципы и алгоритмы: монография. М.: Горячая линия – Телеком, 2014. 244 с.
2. Ермолаев В.Т. Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи: монография. 2011.
3. Asplund H., Astely D., Butovitsch P.v. et al. Concepts and solutions for high-band millimeter wave // *Advanced Antenna Systems for 5G Network Deployments*. Elsevier, 2020. С. 273-300.
4. Björnson E., Demir Ö.T. Introduction to multiple antenna communications and reconfigurable surfaces. Hanover, MD : now, 01.2024.
5. Edfors O., Sandell M., Beek J.-J. van de, Wilson S., Ola Borjesson P. OFDM channel estimation by singular value decomposition // *Proceedings of Vehicular Technology Conference – VTC*. Vol. 2. 1996, pp. 923-927.
6. Beek J.-J. van de, Edfors O., Sandell M., Wilson S., Borjesson P. On channel estimation in OFDM systems // *1995 IEEE 45th Vehicular Technology Conference*. Countdown to the Wireless Twenty-First Century. Vol. 2. 1995, pp. 815-819.
7. Yarotsky D., Ivanov A., Bychkov R., Osinsky A., Savinov A., Trefilov M., Lyashev V. Machine Learning-Assisted Channel Estimation in Massive MIMO Receiver // *2021 IEEE 93rd Vehicular Technology Conference* 25-28 April 2021, Helsinki, Finland, pp. 1-5, doi: 10.1109/VTC2021-Spring51267.2021.9448862.
8. Artemasov D., Blagodarnyi A., Sherstobitov A., Lyashev V. On autoregressive and neural methods for massive-MIMO channel de-noising // *ITU Journal on Future and Evolving Technologies (Geneva)*. 2024. Март. Vol. 5, no 1, pp. 62-72.
9. Wiesmayr R., Cammerer S., Aoudia F.A. at al. Design of a Standard-Compliant Real-Time Neural Receiver for 5G NR. 2024. arXiv: 2409.02912 [cs.IT]. URL: <https://arxiv.org/abs/2409.02912>.
10. Zhang R., Cheng L., Zhang W. at al. Channel Estimation for Movable-Antenna MIMO Systems via Tensor Decomposition // *IEEE Wireless Communications Letters*. 2024. Vol. 13, no. 11, pp. 3089-3093.
11. Petrov S., Zamarashkin N. Sufficient recovery conditions for noise-buried low rank tensors. 2024. arXiv: 2312.02088 [math.NA]. — URL: <https://arxiv.org/abs/2312.02088>.
12. Zhao Y., Huang A. A novel channel estimation method for OFDM mobile communication systems based on pilot signals and transform-domain processing // *1997 IEEE 47th Vehicular Technology Conference. Technology in Motion*. Vol. 3. 1997, pp. 2089-2093.
13. Kolda T.G., Bader B.W. Tensor Decompositions and Applications // *SIAM Review*. 2009. Vol. 51, ni. 3, pp. 455-500. eprint: <https://doi.org/10.1137/07070111X>. URL: <https://doi.org/10.1137/07070111X>.
14. Тыртышников Е.Е., Матвеев С.А. Алгебраические вычисления, тензоры и оптимизация: учебно-методическое пособие для студентов магистратуры филиала МГУ в г. Сарове. М.: Издательство Московского университета, 2023. 63, [1]. (Библиотека факультета ВМК МГУ). Электронное издание сетевого распространения.
15. Harshman R.A. Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis // 1970. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:6816804>.
16. Tucker L.R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // *Psychometrika*. 1966. Сент. Т. 31, № 3. С. 279-311. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02289464>.
17. Oseledets I.V. Tensor-Train Decomposition // *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2011. Т. 33, № 5. С. 2295-2317. eprint: <https://doi.org/10.1137/090752286>. URL: <https://doi.org/10.1137/090752286>.
18. Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и основы алгебры, учебное издание для вузов. Московский центр непрерывного математического образования (МЦНМО), 2025. С. 493.
19. Carroll J.D., Chang J.-J. Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition // *Psychometrika*. 1970. Сент. Т. 35, № 3. С. 283-319. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02310791>.
20. Lu J. Numerical Matrix Decomposition. 2024. arXiv: 2107.02579 [math.HO]. URL: <https://arxiv.org/abs/2107.02579>.
21. Jaeckel S., Raschkowski L., Burkhardt F., Thiele L. Efficient Sum-of-Sinusoids-Based Spatial Consistency for the 3GPP New-Radio Channel Model // *2018 IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps)*. 2018, pp. 1-7.

CANONICAL DECOMPOSITION OF MULTIDIMENSIONAL NOISY MIMO CHANNEL ESTIMATION

Alexander S. Blagodarnyi, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, MIPT), Dolgoprudny, Russia,

blagodarnyi.as@phystech.edu

Alexander I. Sherstobitov, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, MIPT), Dolgoprudny, Russia,

sherstobitov.ai@ict-lab.ru

Vladimir A. Lyashev, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, MIPT), Dolgoprudny, Russia,

lyashev.va@mipt.ru

Eugene E. Tyrtysnikov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia, eugene.tyrtysnikov@gmail.com

Abstract

In modern MIMO wireless communication systems with a large number of antennas (Massive MIMO), the accuracy of channel state estimation plays a key role in ensuring high data throughput (spectral efficiency). Accurate estimation of channel parameters allows the base station to form a spatially directed transmission filter, compensating negative effects such as multipath propagation, inter-symbol interference, and additive white Gaussian noise. In such systems, low signal-to-noise ratio in the uplink can significantly limit the throughput in the downlink channel. Traditional channel estimation methods often prove insufficiently effective under strong noise and multipath propagation conditions. A major limitation of conventional estimation techniques consists in the independent processing of each MIMO channel, which fails to exploit the spatial properties of the filtered signal for interference

and noise suppression. This paper proposes an approach based on transforming the multidimensional MIMO channel estimation signal into a multimodal tensor for joint processing across all dimensions, allowing more effective utilization of the data structure. As demonstrated in the study, tensor-based processing methods for multidimensional signals can potentially provide up to a 10% improvement in MIMO channel estimation accuracy under low SNR conditions (up to -20 dB).

Keywords: MIMO OFDM, Channel estimation, Tensor processing, Tensor decompositions, 6G

References

- [1] M.G. Bakulin, L.A. Varukina, V.B. Kreindelin, "MIMO Technology: Principles and Algorithms", Monograph. Moscow: Hotline-Telecom, 2014. 244 p.
- [2] V.T. Ermolaev, "Theoretical Foundations of Signal Processing in Wireless Communication Systems", Monograph. 2011.
- [3] H. Asplund, D. Astely, P. V. Butovitsch et al., "Concepts and solutions for high-band millimeter wave", *Advanced Antenna Systems for 5G Network Deployments*. Elsevier, 2020, pp. 273-300.
- [4] E. Bjornson, O. T. Demir, "Introduction to multiple antenna communications and reconfigurable surfaces," Hanover, MD: now, 01.2024.
- [5] O. Edfors, M. Sandell, J.-J. van de Beek, S. Wilson, P. Ola Borjesson, "OFDM channel estimation by singular value decomposition," *Proceedings of Vehicular Technology Conference – VTC*. Vol. 2. 1996, pp. 923-927.
- [6] J.-J. van de Beek, O. Edfors, M. Sandell, S. Wilson, P. Borjesson, "On channel estimation in OFDM systems", *1995 IEEE 45th Vehicular Technology Conference. Countdown to the Wireless Twenty-First Century*. Vol. 2. 1995, pp. 815-819.
- [7] D. Yarotsky, A. Ivanov, R. Bychkov, A. Osinsky, A. Savinov, M. Trefilov, V. Lyashev, "Machine Learning-Assisted Channel Estimation in Massive MIMO Receiver", *2021 IEEE 93rd Vehicular Technology Conference*, 25-28 April 2021, Helsinki, Finland, pp. 1-5, doi: 10.1109/VTC2021-Spring51267.2021.9448862.
- [8] D. Artemasov, A. Blagodarnyi, A. Sherstobitov, V. Lyashev, "On autoregressive and neural methods for massive-MIMO channel de-noising", *ITU Journal on Future and Evolving Technologies (Geneva)*. 2024. Vol. 5, no. 1, pp. 62-72.
- [9] R. Wiesmayr, S. Cammerer, F.A. Aoudia et al., "Design of a Standard-Compliant Real-Time Neural Receiver for 5G NR," 2024. arXiv: 2409. 02912 [cs.IT]. URL: <https://arxiv.org/abs/2409.02912>.
- [10] R. Zhang, L. Cheng, W. Zhang et al., "Channel Estimation for Movable-Antenna MIMO Systems via Tensor Decomposition", *IEEE Wireless Communications Letters*. 2024. Vol. 13, no. 11, pp. 3089-3093.
- [11] S. Petrov, N. Zamarashkin, "Sufficient recovery conditions for noise-buried low rank tensors", 2024. arXiv: 2312. 02088 [math.NA]. URL: <https://arxiv.org/abs/2312.02088>.
- [12] Y. Zhao, A. Huang, "A novel channel estimation method for OFDM mobile communication systems based on pilot signals and transform-domain processing," *1997 IEEE 47th Vehicular Technology Conference. Technology in Motion*. Vol. 3. 1997, pp. 2089-2093.
- [13] T.G. Kolda, B.W. Bader, "Tensor Decompositions and Applications," *SIAM Review*. 2009. Vol. 51, no. 3, pp. 455-500. eprint: <https://doi.org/10.1137/07070111X>. URL: <https://doi.org/10.1137/07070111X>.
- [14] E.E. Tyrtshnikov, S.A. Matveev, "Algebraic Computations, Tensors, and Optimization: Study Guide for Master's Students at the MSU Branch in Sarov", Moscow: Moscow University Press, 2023. - 63, [1] p. (Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, MSU Library). Online edition, distributed electronically.
- [15] R.A. Harshman, "Foundations of the PARAFAC procedure: Models and conditions for an "explanatory" multi-model factor analysis", 1970. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:6816804>.
- [16] L.R. Tucker, "Some mathematical notes on three-mode factor analysis", *Psychometrika*. 1966. Vol. 31, no. 3. P. 279-311. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02289464>.
- [17] I.V. Oseledets, "Tensor-Train Decomposition", *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2011. Vol. 33, no. 5, pp. 2295-2317. eprint: <https://doi.org/10.1137/090752286>. URL: <https://doi.org/10.1137/090752286>.
- [18] E.E. Tyrtshnikov, "Matrix Analysis and Fundamentals of Algebra: Textbook for Higher Education", Moscow Center for Continuous Mathematical Education, 2025. P. 493.
- [19] J.D. Carroll, J.-J. Chang, "Analysis of individual differences in multidimensional scaling via an n-way generalization of "Eckart-Young" decomposition", *Psychometrika*. 1970. Vol. 35, no. 3, pp. 283-319. URL: <https://doi.org/10.1007/BF02310791>.
- [20] J. Lu, "Numerical Matrix Decomposition", 2024. arXiv: 2107.02579 [math.HO]. URL: <https://arxiv.org/abs/2107.02579>.
- [21] S. Jaeckel, L. Raschkowski, F. Burkhardt, L. Thiele, "Efficient Sum-of-Sinusoids-Based Spatial Consistency for the 3GPP New-Radio Channel Model", *2018 IEEE Globecom Workshops (GC Wkshps)*. 2018, pp. 1-7.

Information about authors:

Alexander S. Blagodarnyi, PhD student, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, MIPT), Dolgoprudny, Russia. ORCID: 0000-0002-8238-9464

Alexander I. Sherstobitov, Candidate of Technical Sciences, Senior Research Scientist, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, MIPT), Dolgoprudny, Russia. ORCID: 0000-0002-5489-0155

Vladimir A. Lyashev, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Multimedia Technologies and Telecommunications, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, MIPT), Dolgoprudny, Russia. ORCID: 0000-0002-6993-1589

Eugene E. Tyrtshnikov, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician of the Russian Academy of Sciences (RAS), Professor of the Department of Computational Technologies and Modeling, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia. ORCID: 0000-0002-4754-0528