ПРЕВЫШЕНИЕ ПРОПУСКНОЙ СПОСОБНОСТИ КАНАЛА БЕЗ ПАМЯТИ В ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОМ ДЕТЕРМИНИРОВАННОМ КАНАЛЕ С ПАМЯТЬЮ И ЗАДАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

DOI: 10.36724/2072-8735-2020-14-5-15-26

Сухоруков Александр Сергеевич,
Московский Технический Университет Связи и Информатики, Москва, Россия,
suhas@yandex.ru

Ключевые слова: *теорема кодирования, пропускная способность, дискретный канал с памятью, межсимвольная интерференция, вероятность ошибки, помехоустойчивость, кодовая комбинация, разрешенная комбинация, защитный временной интервал, аддитивный шум, энтропия, взаимная информация, оптимальный индикатор*

Статья подводит итоги исследований автора, изложенных в работах [7-14]. Основной вывод состоит в том, что пропускная способность канала связи с памятью при определенных ограничениях может превышать пропускную способность канала без памяти. Уменьшение длительности информационных импульсов и периода их следования увеличивает скорость поступления информации на вход канала связи. Однако, канал связи (КС) без памяти превращается в КС с памятью и, возникающая межсимвольная интерференция (МСИ) уменьшает скорость передачи информации через КС. Соответствующие формулы показывают необходимость поиска оптимального соотношения между бодовой скоростью и вероятностью ошибки при заданном уровне аддитивного шума. Рассматривается дискретно-непрерывный детерминированный канал с памятью (ДНДКП), для которого передаваемые сигналы есть дискретные по времени и непрерывные по уровням комбинации. Параметры КС известны на передаче и на приеме. Представляя процессы на входе и выходе ДНДКП в виде L-мерных векторов, в работе доказана теорема кодирования при наложении на передаваемые комбинации ограничений на энергию и энергию разности комбинаций. Показана экспоненциальная зависимость средней вероятности ошибки при приеме 'в целом' L-мерного вектора от длительности комбинации. Ограничения, наложенные на разрешенные комбинации, не изменяют экспоненциальной зависимости вероятности ошибки от длительности комбинации. Доказана теорема кодирования, если для передачи используются только хорошие коды с заданной энергией и энергией разности комбинаций. Это позволяет указать конструктивные пути увеличения пропускной способности КС. Для КС с памятью длительность комбинации следует увеличивать пропорционально количеству символов в кодовой комбинации, но коэффициент пропорциональности меньше 1. Для разных отношений сигнал/шум определен диапазон значений этого коэффициента пропорциональности, которые позволяют получить скорость передачи больше пропускной способности канала без памяти, и при этом вероятность ошибки стремится к нулю при длине комбинации, стремящейся к бесконечности. Этот же результат может быть получен с помощью оптимального индикатора. Оптимальный индикатор устраняет межсимвольные помехи, что позволяет разделить информационные импульсы при интервале следования импульсов больше сколь угодно малой величины. Вероятность ошибки может быть сделана сколь угодно малой для определенной формы частотной характеристики КС. При этом возрастают требования к параметрам КС и существенно усложняется декодер.

Информация об авторе:
Сухоруков Александр Сергеевич, *к.т.н., доцент кафедры общей теории связи Московского Технического Университета Связи и Информатики, Москва, Россия*

Для цитирования:
Сухоруков А.С. Превышение пропускной способности канала без памяти в дискретно-непрерывном детерминированном канале с памятью и заданными ограничениями // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Том 14. №5. С. 15-26.

For citation:
Sukhorukov A.S. (2020) Exceeding the bandwidth of the channel without memory in the discrete-continuous deterministic channel with the memory and set restrictions. *T-Comm*, vol. 14, no.5, pp. 15-26. (*in Russian*)

Введение

Данная статья подводит итоги исследований автора, изложенных в [7-14]. В указанных работах исследованы способы увеличения скорости передачи и помехоустойчивости в канале связи (КС) с памятью. Итоговый результат изложен в данной статье: пропускная способность КС с памятью больше пропускной способности КС без памяти. Плата за это – ужесточение требований к КС и усложнение кодека. Данная статья обобщает и уточняет предыдущие работы, на которые даны соответствующие ссылки.

В монографии [1] доказаны теорема кодирования и обращение теоремы кодирования для дискретного, дискретного по времени и непрерывного КС без памяти. Дана оценка пропускной способности таких каналов. В [1] используется методика «ансамбля случайных кодов». Использование этой методики означает, что на КС и используемый случайный код накладываются определенные ограничения, известные и на передаче, и на приеме:

1. Ограничение на начало передачи комбинации (синхронизация кодера и декодера).
2. Ограничение на длительность кодовых символов (иначе невозможно реализовать оптимальный прием).
3. Ограничение на длину комбинаций N и основание кода m.

Эти ограничения позволяют для избранной модели получить экспоненциальную зависимость средней вероятности ошибки от длины N кодовой комбинации. Без этих ограничений оптимальный прием комбинаций декодером невозможен и вероятность ошибки, в среднем, будет равна $(m-1)/m$.

Если же априори такие ограничения не накладывать, то необходимо передавать декодеру информацию, соответствующую этим пунктам. Однако, этот вариант дискредитирует доказательство теоремы кодирования и ее обращения, так как эти доказательства предполагают отсутствие какого-либо дополнительного КС кроме того, по которому передается кодовая комбинация случайного кода.

Указывая на эти ограничения, предложим новые ограничения для достижения оптимальных способов обмена скорости на помехоустойчивость.

В отличие от работ автора в данной статье рассмотрим в качестве модели дискретно-непрерывный детерминированный канал с памятью (ДНДКП) с ограниченной полосой частот F:

– Источник информации является источником дискретных по времени и непрерывных по уровням кодовых комбинаций $v(t)\in V^N$ длиной N и длительностью T_k, поступающих на вход канала с ограниченной полосой частот F.

– На выходе канала с памятью каждая комбинация $v(t)$ преобразуется в однозначно соответствующую ей непрерывную по времени и уровням комбинацию $u(t)\in U^N$. Длительность комбинации $u(t)$ на выходе КС превышает T_k на величину памяти T_n канала. При достаточно большом $T_k >> T_n$ этим увеличением можно пренебречь.

– Канал детерминированный, т.е. его параметры известны и на передаче, и на приеме.

В [8] доказано неравенство, практический смысл которого состоит в следующем. Имеем комбинацию длительностью $T_k=NT_1$ из N символов длительностью T_1. Увеличиваем длину комбинаций до $N+n$ символов, уменьшая длительность символов до T_2. Длительность комбинации $T_k=(N+n)T_2= NT_1$ остается постоянной. Скорость передачи информации увеличивается в (N+n)/N раз. Однако, при этом КС с ограниченной полосой частот F из канала без памяти превращается в КС с памятью, что уменьшает количество принятой информации из-за появления помех в виде межсимвольной интерференции (МСИ).

Поясним это положение простым примером, дополнив рисунки из [13].

На рисунке 1а показана комбинация $v_1(t)$ длительностью T_k на входе канала из $N=3$ символов; рисунок 1б – это $u_1(t)$, т.е. та же комбинация на выходе канала без памяти при $N=3$. На рисунке 1г показана комбинация $v_2(t)$ той же длительности T_k из $(N+n)$=11 символов на входе канала. На рисунке 1д показана комбинация $u_2(t)$ из 11 символов на выходе канала с памятью, пораженная МСИ. Отсчеты сигнала $u_2(t)$ на рисунке 1д в тактовые моменты времени принимают значения, совпадающие со знаками переданных символов, за исключением отсчетов в тактовые моменты 7 и 11 (эти символы приняты неверно). Таким образом, за интервал времени T_k по каналу без памяти верно передано три символа, а по каналу с памятью верно передано 9 символов, т.е. скорость передачи выросла в три раза.

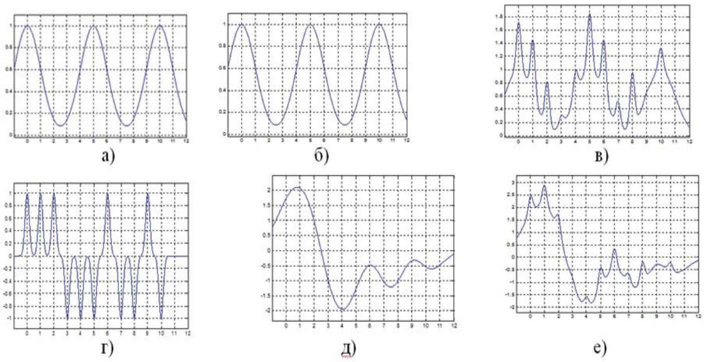

Рис. 1. Диаграммы комбинаций из 3-х и 11-ти импульсов на входе и выходе КС с шумом

Количество средней взаимной информации $I(U^{N+n};V^{N+n})$, заключенное в принятой комбинации $u_2(t)$ о переданной комбинации $v_2(t)$ из $(N+n)$ символов, заключено в пределах:

$$sup\ I(U^N ; V^N) \le I(U^{N+n} ; V^{N+n})\le sup\ I(U^{N+n} ; V^{N+n}). \qquad (1)$$

Для комбинации из $(N+n)$ импульсов с уменьшенной длительностью импульсов, первые N импульсов поражаются МСИ, и $I(V^N;U^N)$ для комбинации из N импульсов не совпадают с $I(V^N;U^N)$ для первых N импульсов комбинации из $(N+n)$ импульсов.

Поэтому из комбинации с $(N+n)$ импульсами выделяем N импульсов разнесенных на интервал ортогональности на передаче. На приеме они также не поражаются МСИ и для них справедливо:

$$I(V^N;U^N)_{N+n}= I(V^N ; U^N)_N .$$

Далее из (1) получим:

$$I(U^{N+n} ; V^{N+n})= I(U^{N+n} ; V^N)+ I(U^{N+n} ; V^n| V^N)=$$
$$= I(V^N; U^{N+n})+ I(U^{N+n} ; V^n| V^N)= sup\ I(V^N ; U^N)+$$
$$+ I(V^N ; U^n|U^N))+ I(U^{N+n} ; V^n| V^N).$$

Левое неравенство следует из того, что второе и третье слагаемые неотрицательны, правое неравенство очевидно из условий определения $\sup I(U^{N+n};V^{N+n})$.

Учтем наличие аддитивной помехи. На вход декодера поступает непрерывный процесс $z(t)=u(t)+x(t)$, $z\in Z$, т.е. сумма $u(t)$ с аддитивной помехой $x(t)$.

Рисунок 1в – это процесс $z_1(t)$, т.е. комбинация $u_1(t)$, пораженная шумом на выходе канала без памяти при $N=3$. Рисунок 1е – это процесс $z_2(t)$, т.е. комбинация $u_2(t)$ из 11 символов на выходе канала с памятью, пораженная МСИ и шумом. Получим для ДНДКП:

$$\sup I(Z;U^N)\le I(Z;U^{N+n})\le \sup I(Z;U^{N+n});$$

где: $I(Z;U^N)$, $I(Z;U^{N+n})$ – среднее количество информации, заключенное в процессе $z(t)$ на выходе КС о переданной комбинации длиной N, либо $(N+n)$.

Для помехи типа аддитивного гауссова шума взаимная информация $I(Z;U^{N+n})$ может быть выражена через энтропию источника $H(U^{N+n})$ и потери информации в канале $H(U^{N+n}/Z)=H(X)$:

$$I(Z;U^{N+n})=H(U^{N+n})-H(U^{N+n}/Z).$$

Для ДНДКП среднее количество информации на одну комбинацию, поступающее на вход КС, т.е. энтропия источника при основании кода m: $H\le \log m^N$ и $H\le \log m^{N+n}$ для длины комбинации N и $N+n$, соответственно. Скорость подачи информации на вход КС с памятью выросла в $[(N+n)/N]$ раз. Потери информации в КС при средней вероятности ошибки $p_{ош}$ можно оценить по формуле [4]:

$$H(Z/U)=-p_{ош}\log\frac{p_{ош}}{m-1}-(1-p_{ош})\log(1-p_{ош});$$

Вывод: скорость передачи в КС с памятью может превышать скорость передачи в КС без памяти. Задача состоит в том, чтобы найти наилучшие способы обмена скорости на помехоустойчивость. В частности в [4] отмечен «любопытный факт»: пропускная способность для двоичного КС с памятью больше, чем для КС без памяти.

Теорема кодирования для ДНДКП с ограничением на полосу частот канала, среднюю энергию и энергию разности комбинаций

Источник информации формирует дискретные по времени и непрерывные по уровням кодовые комбинации $v_m(t)$ длительностью T_k из N символов длительностью T: $T_k=NT$.

На вход декодера поступает процесс $z(t)=u_m(t)+x(t)$, равный сумме одной из реализаций сигнала $u_m(t)$ и реализации помехи $x(t)$. Реализации сигнала $u_m(t)$ на выходе ДНДКП с ограниченной полосой частот F равны:

$$u_m(t)=\int_{-\infty}^{\infty}v_m(\tau)g(t-\tau)d\tau; \qquad (2)$$

где $g(t)$ – импульсная реакция ДНДКП, известная на передаче и на приеме, т.е. возможные варианты $u_m(t)$ также известны и на передаче , и на приеме.

Введем ограничения на среднюю энергию комбинаций и энергию разности комбинаций:

1. Из общего числа M комбинаций случайного кода некоторое количество M_p реализаций $v_m(t)\in V^{Mp}$ длительностью T_k из N символов имеют энергию на выходе канала, удовлетворяющую неравенству:

$$E-\alpha\le\overline{v_m^2}(t)\le E;\ 1\le m\le M_P;$$

2. Из общего числа M комбинаций случайного кода некоторое количество M_p реализаций $v_m(t)\in V^{Mp}$ длительностью T_k из N символов имеют энергию E_P разности реализаций $u_m(t)$ на выходе ДНДКП удовлетворяющую неравенствам:

$$E_p-\beta\le\int_{-\infty}^{\infty}[u_m(\tau)-u_n(\tau)]^2d\tau\le E_p;\ 1\le \mathrm{m}\le \mathrm{M}_p;\ \ 1\le n\le \mathrm{M}_p;$$

3. Передаваемые комбинации $v_m(t)$ разделены защитным временным интервалом $T_з$.

4. Длительность T_k реализаций сигнала $v_m(t)$, защитный временной интервал $T_з$ между передаваемыми реализациями сигнала и длительность T_n «памяти» канала удовлетворяют соотношению: $T_k>>T_з>>T_n$.

5. При увеличении N длительность комбинации $T_k=ANT$ при $A\le 1$. Таким образом, при увеличении N длительность импульсов T может уменьшаться и T_k растет медленнее, чем N. Это увеличивает скорость передачи, но приводит к усилению МСИ.

Средняя взаимная информация между процессами $z(t)$ и $u(t)$ обозначим $I(Z^M;U^M)$.

Пропускной способностью ДНДКП будем называть максимальную скорость передачи в единицу времени при сколь угодно малой вероятности ошибки:

$$C_1=\lim_{\substack{N\to\infty\\ M\to\infty\\ T_k=ANT\to\infty}}\sup\frac{1}{T_k+T_3}I(\mathrm{Z}^M;\mathrm{U}^M);$$

Верхняя грань ищется для всех распределений процессов на входе и выходе КС, для множества возможных способов передачи и приема сигнала. Из вышеприведенного примера видно, что увеличивать скорость передачи в ДНДКП можно не увеличивая пропорционально N длительность комбинации.

Теорема кодирования

Пусть множество V^N передаваемых кодером дискретных последовательностей $v_m(t)$ длительностью T_k из N символов, разделенных защитным временным интервалом $T_з$ на входе ДНДКП, и множество U^N непрерывных реализаций $u_m(t)$ на выходе ДНДКП (на входе декодера) состоят из однозначно соответствующих друг другу реализаций. Пусть из общего числа M комбинаций случайного кода некоторое количество M_p реализаций $v_m(t)\in V^{Mp}$ удовлетворяют ограничениям 1-4. Кодер выбирает реализации независимо с вероятностной мерой $Q(v_m)$. Пусть вероятность ошибки в решениях декодера описывается переходными вероятностями $p(v_k,u_k/v_m,u_m)$. Тогда средняя вероятность p ошибочного декодирования кодовой комбинации «в целом» по этому ансамблю реализаций при декодировании по максимуму правдоподобия, ограничена сверху:

$$p\le[\mu^{-1}\lambda^{-1}e^{(r\alpha+q\beta)}]^{(1+\rho)}\cdot\exp\{-N[E_0-\rho R]\}; \qquad (3)$$

$$E_0=-\frac{1}{N}\ln\sum_{n=1}^{M}\left[\sum_{m=1}^{M}Q[v_m(t)]p[z_n(t)/v_m(t),u_m(t)]^{(1+\rho)^{-1}}\exp\{r[\overline{v_m^2}(t)-E]+\right.$$

$$\left.+q[\overline{(u_m(t)-u_k(t))^2}-E_p]\}\right]^{(1+\rho)}.$$

Доказательство

Доказательство теоремы кодирования для ДНДКП аналогично соответствующему доказательству в [1]. Принципиальное отличие состоит в том, что в [1] для канала без памяти доказательство относится к средней вероятности ошибки в последовательности из L символов, а в ДНДКП к средней вероятности неверного приема комбинации «в целом», к вектору. Кроме этого, в отличие от [1] на принимаемые комбинации наложены дополнительные ограничения 2-4.

Пусть реализации случайных процессов $u_m(t)$, $v_m(t)$, $z(t)$ и $x(t)$ непрерывны в среднеквадратическом смысле. Каждый из них может быть представлен рядом (в среднеквадратическом смысле) [3], коэффициенты которого есть проекции соответствующей реализации на совокупность L ортонормированных функций $\varphi_\kappa(t)$. Например, для реализации $u_m(t)$ получим:

$$u_{mk}=\sqrt{\lambda_k}\int_0^{T_k}u_m(t)\varphi_k^*(t)dt;\quad u_m(t)=\lim_{L\to\infty}\sum_{k=1}^{L}\frac{u_{mk}\varphi_k(t)}{\sqrt{\lambda_k}};\tag{4}$$

$$u_m(t)\approx[u_{m1}...u_{mL}]=\mathbf{u_m};$$

$$\varphi_k(t)=\lambda_k\int_0^{T_k}B(t,\tau)\varphi_k^*(\tau)d\tau;\quad B(t,\tau)=\int_0^{T_k}u_m(t)u_m(t+\tau)dt;$$

Соотношения аналогичные (4) могут быть записаны для $v_m(t)$, $z(t)$ и $x(t)$:

$$v_m(t)\approx[v_{m1}...v_{mL}]=\mathbf{v_m};\ x_n(t)\approx[x_{n1}...x_{nL}]=\mathbf{x_n};\ z_k(t)\approx[z_{k1}...z_{kL}]=\mathbf{z_k}.$$

Задание реализаций процессов $v_m(t)$, $u_m(t)$, $z_k(t)$, $x_n(t)$ эквивалентно заданию совокупности коэффициентов или векторов $\boldsymbol{v_m}$, $\boldsymbol{u_m}$, $\boldsymbol{z_k}$, $\boldsymbol{x_n}$.

Для любого конечного L ограничения приобретают вид:

1*a*. $E_L-\alpha\le\overline{\mathbf{v}_\mathbf{m}^2}\le E_L;\ 1\le m\le M_P;$

2*a*. $E_{pL}-\beta\le\overline{(\mathbf{u_m}-\mathbf{u_n})^2}\le E_{pL};\ 1\le m\le M_P;\ \ 1\le n\le M_P;\ \ m\ne n;$

3*a*. Соотношение между T_k, $T_з$ и T_n сохраняется.

Таким образом, множества содержат M наборов L-мерных векторов. Для любого из векторов справедливо утверждение, что вектора тождественно равны $\boldsymbol{u_m}=\boldsymbol{u_n}$, если $u_m(t)=u_n(t)$. Реализации $v_m(t)$ отличаются одна от другой как минимум в одном символе и, следовательно, образуют счетное множество. Реализации $u_m(t)$ также образуют счетное множество, так как минимальная энергия разности E_p должна быть конечной величиной. Если она бесконечно мала, то и для любых реализаций величина E_p – бесконечно мала и передача информации через такой КС невозможна.

Если множества счетные множества, то выходное множество реализаций z(t) можно разбить на M непересекающихся подмножеств $Z_k\subset Z^M$, $1\le k\le M$, объединение которых образует все выходное пространство ДНДКП. Каждое из подмножеств Z_k соответствует одному из M L-мерных векторов множества U_L^M.

Процесс передачи можно описать как передачу случайно выбираемого из множества V_L^M вектора $\boldsymbol{v_m}$ из L символов, который на выходе ДНДКП преобразуется в однозначно соответствующий ему вектор $\boldsymbol{u_m}$ из L символов, принадлежащих множеству U_L^M. Декодер анализирует вектор $\boldsymbol{z_k}=\boldsymbol{u_m}+\boldsymbol{x_n}$. Если принимаемая реализация $\boldsymbol{z_k}\in Z_m$, то декодер принимает решение: «принят вектор $\boldsymbol{u_m}$, передан однозначно соответствующий ему вектор $\boldsymbol{v_m}$». Ограничения, наложенные на КС и кодовые комбинации, позволяют рассматривать ДНДКП, как дискретный по времени канал.

Среднюю взаимную информацию между векторами $\boldsymbol{z_k}$, $\boldsymbol{u_m}$ и процессами z(t) и u(t) обозначим так:

$$I(Z^M;U^M)=\lim_{L\to\infty}I(Z_L^M;U_L^M);$$

Пропускная способность ДНДКП может быть записана для векторов в виде:

$$C'=\limsup_{\substack{L\to\infty\\M\to\infty\\ANT\to\infty\\N\to\infty}}\frac{1}{T_k+T_з}I(Z_L^M;U_L^M);$$

Пусть $Q_p(\boldsymbol{v_m},\boldsymbol{u_m})$ – распределение вероятностей векторов из N символов на входе канала, удовлетворяющих ограничениям. Средняя вероятность ошибки при приеме вектора из множества векторов V_L^{Mp} разрешенных для передачи и множества U_L^{Mp} разрешенных на приеме имеет вид:

$$p_L=\sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k}/\mathbf{z_n});\tag{5}$$

где $p(\boldsymbol{v_k},\boldsymbol{u_k}/\boldsymbol{z_n})$ – вероятность ошибки, т.е. вероятность приема вектора $\boldsymbol{u_k}$, соответствующего переданному вектору $\boldsymbol{v_k}$, при передаче вектора $\boldsymbol{v_m}$, которой соответствует вектору $\mathbf{u_m}$ на входе приемника.

Запишем $Q_p(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})$ в виде:

$$Q_p(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})=\mu^{-1}\lambda^{-1}\psi(\mathbf{v_m})\gamma(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})Q(\mathbf{v_m}).$$

$Q(\boldsymbol{v_m})$ – вероятность передачи произвольного вектора $\boldsymbol{v_m}$; $Q_p(\boldsymbol{v_m},\boldsymbol{u_m})$ – вероятность передачи вектора $\mathbf{v_m}$, если $\mathbf{v_m}$ и, однозначно соответствующий ему вектор $\mathbf{u_m}$, удовлетворяют ограничениям; $\psi(\mathbf{v_m})=1$, если удовлетворяется ограничение 1; $\psi(\mathbf{v_m})=0$, если не удовлетворяется ограничение 1; $\gamma(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})=1$ – если удовлетворяется ограничение 2; $\gamma(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})=0$ – если не удовлетворяется ограничение 2;

$$\lambda=\sum_{m=1}^{M}\psi(\mathbf{v_m})Q(\mathbf{v_m})-$$

– вероятность того, что при независимом выборе входных комбинаций удовлетворяется ограничение 1.

$$\mu=\sum_{m=1}^{M}\gamma(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})Q(\mathbf{v_m})$$

– вероятность того, что при независимом выборе входных комбинаций удовлетворяется ограничение 2.

Для $r,q\ge 0$ функции $\psi(\boldsymbol{v_m})$ и $\gamma(\boldsymbol{v_m},\boldsymbol{u_m})$ ограничены сверху по аналогии с [1]:

$$\psi(\mathbf{v_m})\le\exp[r(\overline{\mathbf{v}_\mathbf{m}^2}-E_L+\alpha)];$$

$$\gamma(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})\le\exp\{q[\overline{(\mathbf{u_m}-\mathbf{u_n})^2}-E_{pL}+\beta]\};$$

Следовательно, $Q_p(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})$ запишем в виде:

$$Q_p(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})\le\mu^{-1}\lambda^{-1}\exp[r(\overline{\mathbf{v}_\mathbf{m}^2}-E_L+\alpha)]\times$$
$$\times\exp\{q[\overline{(\mathbf{u_m}-\mathbf{u_n})^2}-E_{pL}+\beta]\}Q(\mathbf{v_m});$$

$$p_L \le \sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}\mu^{-1}\lambda^{-1}\exp[r(\overline{\mathbf{v}_\mathbf{m}^2}-E_L+\alpha)]\times$$

$$\times\exp\{\overline{q[(\mathbf{u_m}-\mathbf{u_n})^2}-E_{pL}+\beta]\}Q(\mathbf{v_m})p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k}/\mathbf{z_n}).$$

Выразим $p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k}/\mathbf{z_n})$. Анализируя вектор $\mathbf{z_n}$, соответствующий процессу $z(t)=u_m(t)+x(t)$, поступающий из КС на его вход, декодер принимает решение, соответствующее max $p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k}/\mathbf{z_n})$. Ошибка E_k произойдет, если при передаче вектора $\mathbf{v_m}$ будет принят вектор $\mathbf{u_k}$, соответствующий переданному вектору $\mathbf{v_k}$, т.е.:

$$p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})\le p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_k},\mathbf{u_k});$$

Вероятность ошибки не больше объединения вероятностей E_k, которая увеличивается при возведении в степень $0<\rho\le1$ [1]:

$$p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k}/\mathbf{z_n})=p\left[\bigcup_{k\ne m}E_k\right]\le\left[\sum_{k\ne m}p(E_k)\right]^\rho;\quad 0<\rho<1;$$

$$p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})\le p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_k},\mathbf{u_k}).$$

Вероятность события E_k есть вероятность появления вектора $\mathbf{v_k}$ или решений $\mathbf{u_k}$ при условии:

$$p(E_k)=\sum_{k=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})\le\sum_{k=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})\left[\frac{p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})}{p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})}\right]^s\ \text{при } s>0;$$

$$p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k}/\mathbf{z_n})=p_{ош}(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m}).$$

Подставим $p(E_k)$ в:

$$p_{ош}(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})\le\left[\sum_{k\ne m}^{M}\sum_{k=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})\left[\frac{p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})}{p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})}\right]^s\right]^\rho:$$

После суммирования по k в правой сумме, под знаком второй суммы имеем (M-1) одинаковых слагаемых. Можно также сказать, что вторая сумма имеет один и тот же вид независимо от k (глухая переменная) [1]:

$$p_{ош}(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})\le\left[(M-1)\sum_{k=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})\left[\frac{p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})}{p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})}\right]^s\right]^\rho$$

Подставим это выражение в формулу для средней вероятности ошибки (5):

$$p_L=\sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})\times$$

$$\times\left[(M-1)\sum_{k=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})\left[\frac{p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})}{p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})}\right]^s\right]\rho.$$

После преобразований имеем с учетом, что $p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})$ не зависит от k:

$$p_L\le(M-1)^\rho\sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})^{(1-s\rho)}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})^s\right]^\rho. \tag{6}$$

Выбираем s=1/(1+ρ), минимизирующее p_L [1]:

$$p_L\le(M-1)^\rho\sum_{n=1}^{M}\sum_{m=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})^{(1+\rho)^{-1}}\times$$

$$\times\left[\sum_{k=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_k},\mathbf{u_k})^{(1+\rho)^{-1}}\right]^\rho.$$

Видим, что есть две одинаковые суммы – одна в первой степени, а вторая в степени ρ:

$$p_L\le(M-1)^\rho\sum_{n=1}^{M}\left[\sum_{m=1}^{M}Q_p(\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})^{(1+\rho)^{-1}}\right]^{1+\rho};$$

Так как $(M\text{-}1)<\lceil\exp(NR)\rceil\le M$ из [1], где $R=\ln M/N$ – скорость блочного кода, то запишем $(M\text{-}1)$ в виде экспоненты. Подставим выражение для разрешенных комбинаций $Q_p(\mathbf{v}_m,\mathbf{u}_m)$ и $e^{NR}>(M\text{-}1)$:

$$p_L\le(M-1)^\rho\sum_{n=1}^{M}\left[\sum_{m=1}^{M}\mu^{-1}\lambda^{-1}\exp[r(\overline{\mathbf{v}_\mathbf{m}^2}-E_L+\alpha)]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\{\overline{q[(\mathbf{u_m}-\mathbf{u_n})^2}-E_{pL}+\beta]\}Q(\mathbf{v_m})p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})^{(1+\rho)^{-1}}\right]^{1+\rho};$$

$$p_L\le e^{\rho NR}[\mu^{-1}\lambda^{-1}e^{(r\alpha+q\beta)}]^{1+\rho}\sum_{n=1}^{M}\left[\sum_{m=1}^{M}\exp[r(\overline{\mathbf{v}_\mathbf{m}^2}-E_L)]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\{\overline{q[(\mathbf{u_m}-\mathbf{u_n})^2}-E_{pL}]\}Q(\mathbf{v_m})p(\mathbf{z_n}/\mathbf{v_m},\mathbf{u_m})^{(1+\rho)^{-1}}\right]^{1+\rho}.$$

При $L\to\infty$ получим:

$$p=\lim_{L\to\infty}p_L\le[\mu^{-1}\lambda^{-1}e^{(r\alpha+q\beta)}]^{1+\rho}\cdot\exp\{-N[E_0-\rho R]\};$$

$$E_0=-\frac{1}{N}\ln\sum_{n=1}^{M}\left[\sum_{m=1}^{M}Q[v_m(t)]p[(z_n(t)/v_m(t),u_m(t)]^{(1+\rho)^{-1}}\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{m=1}^{M}Q[v_m(t)]p[\exp\{r[\overline{v_m^2(t)}-E]+\overline{q[(u_m(t)-u_n(t))^2}-E_p]\}\right]^{1+\rho};$$

$$E_0=-\frac{1}{N}\ln\sum_{n=1}^{M}\left[\left[\sum_{m=1}^{M}Q[v_m(t)]p[(z_n(t)/v_m(t),u_m(t)]^{(1+\rho)^{-1}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\exp\{r[\overline{v_m^2(t)}-E]+\overline{q[(u_m(t)-u_n(t))^2}-E_p]\}\right]^{1+\rho}.$$

Получили выражение (3). Анализ в [1] показывает, что $[E_0-\rho R]>0$ если скорость передачи меньше пропускной способности КС при посимвольном приеме комбинации [1]. Совершенно аналогичные выкладки показывают, что при передаче и приеме информации комбинациями «в целом» разность положительна, если скорость передачи меньше пропускной способности КС.

Оценим влияние μ и λ на вероятность ошибки. Постоянство энергии комбинаций на входе КС – основной параметр, определяющий вероятность ошибки. Для КС с памятью этот параметр имеет большее значение, чем для канала без памяти. Увеличение N для канала без памяти не меняет усредненный спектр сигнала, так как длительность кодовых символов не меняется. Для канала с памятью увеличение N может происходить при уменьшении длительности кодовых символа, что увеличивает ширину спектра передаваемых комбинаций. Мощность сигнала на выходе КС уменьшается не только за счет затухания в КС, но и за счет уменьшения мощности сигнала, проходящей через КС с фиксированной полосой пропускания. Поэтому фильтр с полосой пропускания равной полосе пропускания КС необходимо включить до входа выходного мощного каскада передатчика.

В этом случае средняя энергия для каждого кодового слова v_m длительностью T_k на выходе КС удовлетворяет неравенству 1. Энергия всех комбинаций на входе и выходе КС остается постоянной при данном N и $\mu=1$.

При увеличении N и укорочении посылок передаваемый процесс $v_m(t)$ становится все более широкополосным и на выходе узкополосного канала с памятью процесс $u_m(t)$ нормализуется. Дисперсия разности комбинаций равна $2E$. При увеличении N длительность комбинации растет пропорционально AN, где $A\leq1$(см. ниже). То есть энергия комбинации растет как AN и вероятность выполнения неравенства 2 пропорциональна $\alpha/N^{0.5}$. Величина λ^{-1} растет как степень N и не меняет экспоненциальной зависимости вероятности ошибки от N.

Вывод: теорема кодирования справедлива для ДНДКП с памятью при условии приема кодовых комбинаций «в целом» и ограничениях на полосу частот КС, энергию и энергию разности комбинаций.

Теорема кодирования для ДНДКП при полностью известных сигналах с ограничением на среднюю мощность и энергию разности комбинаций

В предыдущем разделе используется методика «ансамбля случайных кодов». Эта методика определяет границу вероятности ошибки, но не указывает конструктивные способы ее достижения.

Для получения в ДНДКП выигрыша по скорости передачи или помехоустойчивости по сравнению с каналом без памяти наложим дополнительное ограничение на ансамбль передаваемых дискретных последовательностей:

1*а*. Для передачи используем ***только те*** $\boldsymbol{M_p}$ реализаций $v_m(t)\in V^{Mp}$, энергия которых на выходе канала задана и удовлетворяет неравенству:

$$E-\alpha\leq\overline{v_m^2}(t)\leq E;\ \ 1\leq m\leq M_P;$$

2*а*. Для передачи используем ***только те*** $\boldsymbol{M_p}$ реализаций $v_m(t)$, для которых энергия E_p разности реализаций $u_m(t)$ на выходе ДНДКП удовлетворяет неравенству:

$$E_p-\beta\leq\int_{-\infty}^{\infty}[u_m(\tau)-u_n(\tau)]^2d\tau\leq E_p;$$

$$1\leq \mathrm{m}\leq \mathrm{M}_p;\ \ 1\leq n\leq \mathrm{M}_p;\quad \mathrm{m}\neq \mathrm{n}.$$

3*а*. Множества из M_p разрешенных для передачи кодовых комбинаций $v_m(t)$ и однозначно соответствующих им непрерывных реализаций сигнала $u_m(t)$ вида (2) на выходе ДНДКП точно известны и на передаче, и на приеме. Таким образом, наложенные ограничения позволяют перейти от случайного выбора кода к алгоритму оптимального приема счетного множества V^{Mp} полностью известных вариантов передаваемых сигналов в КС с АБГШ. Наложенные ограничения позволяют рассматривать передаваемые и принимаемые комбинации как буквы алфавита дискретного по времени и непрерывного по уровням источника.

Теорема кодирования

Пусть множество V^{Mp} передаваемых кодером дискретных последовательностей v_m длительностью T_k из N символов, разделенных защитным временным интервалом $T_з$ на входе ДНДКП, и множество U^{Mp} непрерывных реализаций $u_m(t)$ на выходе ДНДКП (на входе декодера) состоят из M_p однозначно соответствующих друг другу реализаций. Множество разрешенных реализаций V^{Mp} точно известно и на передаче, и на приеме. Рассмотрим ансамбль кодов, каждый из которых содержит M_p слов $v_m(t)$ длительностью T_k, которые являются разрешенными, т.е. удовлетворяют ограничениям 1а-3а и 3-4. Кодер передает только разрешенные реализации. Пусть вероятность ошибки в решениях декодера описывается переходными вероятностями $p(v_k,u_k/v_m,u_m)$. Тогда средняя вероятность p ошибочного декодирования кодовой комбинации «в целом» по этому ансамблю реализаций при декодировании по максимуму правдоподобия, ограничена сверху:

$$p\leq\exp\{T_k[H'_{\max}(V^{M_p})-C']\}.$$

Доказательство

Анализируя процесс $z(t)=u_m(t)+x(t)$, поступающий из КС на его вход, декодер принимает решение, соответствующее max $p(v_m,u_m/z_k)$. Поскольку $x(t)$ аддитивный белый гауссов шум (АБГШ) со спектральной плотностью энергии G_0, то декодирование по максимуму правдоподобия эквивалентно нахождению $u_m(t)$, для которого среднеквадратическое отклонение от принятого $z(t)$ – минимально.

Для рассматриваемой детерминированной системы сигналов, удовлетворяющих ограничениям, и помехи в виде аддитивного белого гауссова шума, оптимальный приемник имеет стандартную схему. В этом случае вероятность ошибки $p_{ош}(v_k,u_k/v_m,u_m)$ при передаче $v_m(t)$, определяется известным выражением [2], которое при равновероятных $v_m(t)$, не зависит от m и k и совпадает со средней вероятностью ошибки. При M_p=2 имеем с точностью до коэффициента [2]:

$$p_{ош}(v_k,u_k/v_m,u_m)=Q\left(\sqrt{\frac{E_p}{G_0}}\right);\quad Q(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty}e^{-0.5t^2}dt.$$

Средняя вероятность ошибки p для M_p -ичной системы с заданной E можно ограничить выражением [2]:

$$p_{ош}(v_k,u_k/v_m,u_m)=M_p\cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_p}{G_0}}\right)<M_pe^{-\frac{E_p}{G_0}}. \qquad (7)$$

Установим связь пропускной способности КС с заданной полосой пропускания F с отношением Ep/G_0. Если $K(jf)$ – АЧХ канала связи, то его полоса пропускания F определяется так:

$$\frac{\int_0^F|K(jf)|^2\,df}{\int_0^{\infty}|K(jf)|^2\,df}\leq\varepsilon;$$

Пропускная способность КС связана с отношением мощности сигнала P_c к мощности белого шума σ^2 в полосе частот F: $h^2=P_c/\sigma^2$; $\sigma^2=G_0F$; $h^2=E_p/T_кG_0F$.

Из физических соображений очевидно, что для разумно построенной системы связи пропускная способность C' на единицу времени есть неубывающая функция отношения энергии сигнала к энергии шума E_p/G_0, т.е. $C'=\psi(E_p/G_0)$. Например, в соответствии с формулой Шеннона для КС с АЧХ эквивалентной идеальному ФНЧ:

$C'=F*\ln(1+E_p/TFG_0)$; $E_p/G_0=FT[\exp(C'/F)-1]$.

В [1] доказано, что верхняя грань C' в натах при увеличении числа степеней свободы равна:

$$\sup C' = \frac{P_c}{G_0}; \quad T_k C' = \frac{T_k P_c}{G_0} = \frac{E_p}{G_0}.$$

Подставляя верхнюю грань в формулу для p, получим:

$$p_{ош}(v_k, u_k / v_m, u_m) < M_p e^{-\frac{E_p}{G_0}} = M_p e^{-T_k C'}. \tag{8}$$

Пусть максимальная производительность источника, производящего M_p разрешенных реализаций $v_m(t)$ длительностью T_k равна:

$$H'_{\max}(V^{M_p}) = \max \frac{-\sum_{m=1}^{M_p} p(v_m)\ln p(v_m)}{T_k} = \max \frac{H(V^{M_p})}{T_k} = \frac{\ln M_p}{T_k};$$

Для любых конечных N, T_k, M_p максимальное среднее количество информации на реализацию:

$$T_k H'_{\max}(V^{M_p}) = \ln M_p. \tag{9}$$

$$M_p = e^{\ln M_p} = \exp[T_k H'_{\max}(V^{M_p})].$$

Из (8) и (9) следует, что вероятность ошибки не более:

$$p_{ош}(v_k, u_k / v_m, u_m) \le \exp[T_k H'_{\max}(V^{M_p}) - T_k C'];$$

Эта вероятность ошибки не зависит от m и k, т.е. средняя вероятность ошибки равна:

$$p \le \exp\{T_k [H'_{\max}(V^{M_p}) - C']\}; \tag{10}$$

Из (10) следует, что при производительности источника меньше пропускной способности канала вероятность ошибки может быть получена сколь угодно малой.

Из теоремы кодирования вытекает, как очевидное следствие, *обращение теоремы кодирования:*

«При выполнении условий, сформулированных в теореме кодирования, следует, что если производительность источника больше, чем пропускная способность канала, то нельзя достичь сколь угодно малой вероятности ошибки».

Вывод: теорема кодирования справедлива для ДНДКП с ограниченной полосой частот и памятью при использовании полностью известных кодовых слов с заранее известной энергией и энергией разности комбинаций; вероятность ошибки экспоненциально уменьшается с ростом длительности комбинации T_k.

Пропускная способность ДНДКП с известной корреляционной матрицей

Если описать процессы длительностью T_k совокупностью отсчетов в равноотстоящие моменты времени kT, $1<k<(N-1)$ то пропускная способность КС определяется корреляционными матрицами сигнала и шума на входе приемника [3]. Для КС без памяти в [7,9,10] приведены соответствующие формулы. Для ДНДКП длительность комбинация $T_k = ANT$ где коэффициент $A<1$ указывает на уменьшение длительности импульсов в передаваемой комбинации. Поэтому N отсчетов соответствуют моментам времени kAT. Выражение для C’ принимает вид:

$$C' = \frac{1}{2(ANT+T_з)} \log \frac{D_z}{D_x} = \frac{1}{2(ANT+T_з)} \log \frac{\sigma_z^{2N} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & R_{z(N-1)} \\ \vdots & 1 & \vdots \\ R_{z(N-1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}}{\sigma_x^{2N} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & R_{x(N-1)} \\ \vdots & 1 & \vdots \\ R_{x(N-1)} & \cdots & 1 \end{pmatrix}}; \tag{11}$$

где: D_x , D_z – определители корреляционных матриц шума $x(t)$ и суммы сигнала и шума $z(t)$.

$B_{xk} = \overline{x(nAT)x(mAT)} = \sigma_x^2 R_{xk}$ – *функция корреляции отсчетов шума*;

$B_{uk} = \overline{u(nAT)u(mAT)} = \sigma_u^2 R_{uk}$ – *функция корреляции отсчетов сигнала*;

$R_{zk} = \dfrac{\sigma_u^2 R_{uk} + \sigma_x^2 R_{xk}}{\sigma_u^2 + \sigma_x^2}$ – *коэффициент корреляции отсчетов* $z(t)$.

$B_{zk} = \overline{z(nAT)z(mAT)} = \sigma_z^2 R_{zk}$ – *функция корреляции отсчетов* $z(t)$.

Результирующее поведение C' зависит от вида корреляционных матриц для сигнала и шума. Пренебрегая малой $T_з$ при NAT→∞ получим из (11) [5,9]:

$$C' = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2ANT} \ln \frac{D_z}{D_x} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2AT} \ln \left(\frac{D_z}{D_x}\right)^{\frac{1}{N}} =$$

$$= \frac{1}{2AT} \ln \left\{ \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{G_z(\omega)}{G_x(\omega)} d\omega \right] \right\};$$

$$C' = \frac{1}{4\pi AT} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \frac{G_z(\omega)}{G_x(\omega)} d\omega = \frac{1}{4\pi AT} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{G_u(\omega)}{G_x(\omega)} \right] d\omega;$$

где $G_u(\omega)$, $G_x(\omega)$, $G_z(\omega)$ преобразования Винера-Хинчина от корреляционных функций сигнала, шума и их суммы, соответственно.

Для КС без памяти T=*const* (A=1) и пропускная способность постоянна. В частности, для КС с идеальной АЧХ из (11) следует стандартная формула Шеннона. Для КС с памятью длительность импульсов T и длительность комбинации T_k уменьшаются (A<1), что увеличивает C', но уменьшает помехоустойчивость.

Рассмотрим возможности канала с памятью для обмена скорости на помехоустойчивость.

1. Пусть кодер формирует двоичные комбинации длиной N, общее количество комбинаций $M=2^N$. Известно [2], что для КС без памяти при увеличении N и M можно увеличивать длительность комбинации T_k пропорционально $\log M$: $T_k = T\log M$. Вероятность ошибки p для M-ичной системы ортогональных сигналов имеет вид [2], если $E_1=P_cT_k$ – энергия одиночного импульса:

$$p \approx (M-1)\cdot Q\left(\sqrt{\frac{E_p}{G_0}\log M}\right). \tag{12}$$

В соответствии с (12) $p\to 0$ при $N\to\infty$, $M\to\infty$, если отношение энергии одночного импульса E_1 к G_0 больше порога Шеннона $E_1/G_0>\ln 2$=0,6932 [2]. Однако, скорость передачи информации I' остается постоянной:

$I' = \log M_p / T_k = \log M_p / T \log M_p = 1/T$.

2. Для ДНДКП при увеличении N и M_p увеличиваем длительность комбинации T_k пропорционально $\log M_p$, но длительность импульсов комбинации уменьшаем как AT,

при $A<1$. Тогда длительность комбинации T_k равна: $T_k=AT\log M_p$, и растет медленнее, чем в п.1. Скорость передачи информации I' равна:

$$I'=\log M_p / T_k = \log M_p / TA \log M_p = 1/TA.$$

Выбором А можно получить сколь угодно большую скорость передачи информации. Но вероятность ошибки p из (12) принимает вид:

$$p=(M_p-1)\cdot Q\left(\sqrt{A\frac{E_p}{G_0}\log M_P}\right);$$

и стремиться к 0 при $N \to\infty$, $M_p\to\infty$, если отношение с/ш больше порога Шеннона:

$$A\frac{E_1}{G_0}>\ln 2;$$

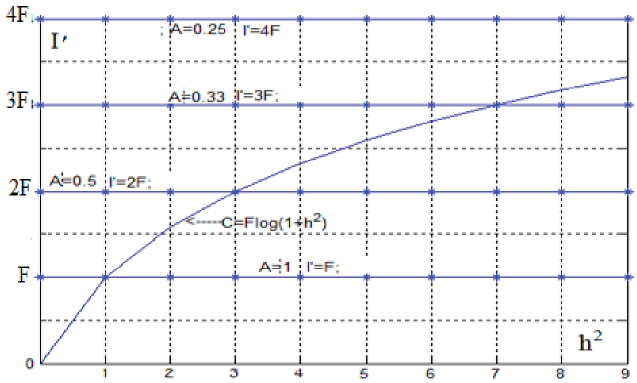

Рис. 2. Зависимость пропускной способности КС без памяти от h^2 и скорости передачи I' при сколь угодно малой вероятности ошибки

Свяжем скорость передачи с пропускной способностью непрерывного КС без памяти:

$$C=F\ln(1+h^2). \qquad (13)$$

где $h^2=P_c/G_0F$ – отношение мощности сигнала к мощности помехи в полосе F.

Если скорость передачи $I' = 1/TA$ больше C из (13), то:

$$I'=\frac{1}{AT}>F\ln(1+h^2); \qquad A<\frac{1}{FT\ln(1+h^2)};$$

Таким образом скорость передачи в КС с памятью больше пропускной способности КС без памяти и вероятность ошибки стремится к 0 при $M_p\to\infty$, если A лежит в диапазоне:

$$\frac{G_0\ln 2}{E_1}<A<\frac{1}{FT\ln(1+h^2)}; \quad F\ln(1+h^2)<I'<\frac{P_c}{G_0\ln 2}.- \qquad (14)$$

Пример расчета показан на рис.2 для FT=1:

$h^2 = P_cT/G_0 = P_c/FG_0$, $I'= 1/TA = F/A$.

Сплошная линия – это зависимость пропускной способности C от h^2 из (13); горизонтальные линии со звездочками соответствуют скорости передачи информации $I'=F/A$ из (14) для разных значений коэффициента A.

Коэффициент A для достижения сколь угодно малой вероятности ошибки и скорости передачи больше C должен лежать в диапазоне из (14):

$$\frac{\ln 2}{h^2}<A<\frac{1}{\ln(1+h^2)};$$

Например, если $h^2=3$, *то* $C=2F$ и, следовательно, 0,231<A<0,5. Для этих значений А из рис. 2 видно, что скорость передачи больше С=2F.

На рисунке 3 показаны зависимости вероятности ошибки от $M_p\to\infty$ при $h^2=3$ для скорости передачи равной пропускной способности канала: $I'=C=2F$ (А=0,5; нижняя кривая); для скорости передачи больше пропускной способности канала: $I'=1.25C=2.5F$ (А=0,4; средняя кривая); для скорости передачи больше пропускной способности канала: $I'=1.5C=3F$ (А=0,33; верхняя кривая). Для всех случаев вероятность ошибки падает с ростом M_p. Из рисунка 3 видно, что для этих значений A вероятность ошибки уменьшается при $M_p\to\infty$.

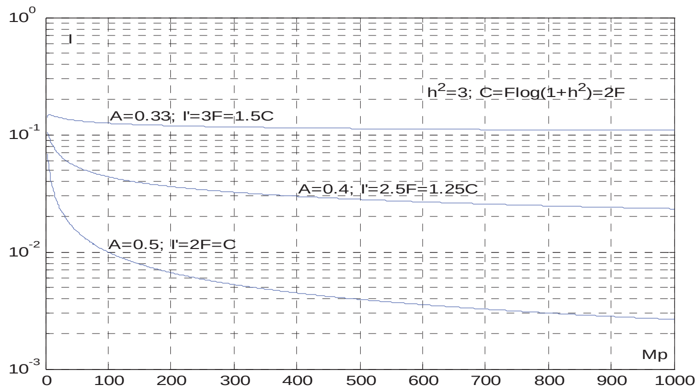

Рис. 3. Зависимость вероятности ошибки от числа разрешенных комбинаций для разных скоростей передачи I' при $h^2 = 3$

На рисунке 4 показаны аналогичные зависимости для $h^2=7$, $C=3F$ и при 0,0947<A<0,33.

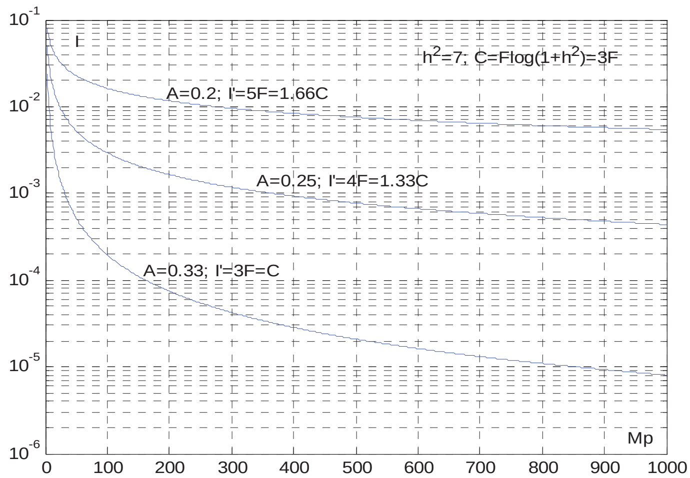

Рис. 4. Зависимость вероятности ошибки от числа разрешенных комбинаций для разных скоростей передачи I' при $h^2 = 7$

Вывод: по ДНДКП с заданной полосой пропускания F, в котором действует сигнал с мощностью P_c и аддитивный белый гауссов шум со спектральной плотностью энергии G_0 можно передавать информацию со скоростью сколь угодно близкой к скорости передачи

$$C' = \frac{P_c}{G_0 \ln 2}$$

и при этом возможно получить сколь угодно малую вероятность ошибки при $M_p \to \infty$.

Очевидно, что проблема состоит в нахождении таких кодов, которые содержат достаточно мощное подмножество с требуемой величиной энергии разности комбинаций E_p. В [14] рассмотрен простой способ формирования подмножества комбинаций с заданным значением E_p на основе кодов Баркера. Для небольших N ортогональность комбинаций на выходе КС с памятью нарушается, потому передаваемые комбинации корректируются.

Реализация пропускной способности ДНДКП путем использования оптимального индикатора

Процессы на выходе ДНДКП – непрерывные. Это позволяет использовать на приеме более сложные алгоритмы обработки аналоговых сигналов по сравнению с достаточно простыми алгоритмами обработки дискретных сигналов. Рассмотрим возможности оптимального индикатора [12, 13] для реализацию пропускной способности ДНДКП.

В соответствии со стандартным определением (википедия): если $Y \subseteq X$ – выбранное подмножество произвольного множества X, то функция, определенная следующим образом:

$$I_Y(x) = \begin{cases} 1, & x \in Y; \\ 0, & x \notin Y; \end{cases}$$

называется индикатором множества A, индикаторным функционалом множества A.

Введем индикаторный функционал множества сигналов S или оптимальный индикатор (ОИ) в общем виде [12]:

$$I_s(s) = \int_\mu \sum_{k=0}^{N} f_k(s) f_k(s) d\mu; \quad I_s(x) = \int_\mu \sum_{k=0}^{N} f_k(s) f_k(x) d\mu; \qquad (15)$$

где $f_k(*)$ – некоторые функции, операторы от s или x; $s \in S$ – заданная индикаторная функция (сигнал).

Индикаторный функционал множества S удовлетворяет условию:

$$I_s(x) = \begin{cases} A \neq 0, & x \in S; \\ 0, & x \notin S; \end{cases}$$

Ограничимся рассмотрением функционального нормированного пространства L_2. Для каждого элемента x,s,z *из* X, S, Z, для каждого оператора $f_m(*)$, для каждого функционала $I_s(*)$ определены: норма $||x||$; расстояние $r(x,y) = ||x - y||$; сходимость по норме: $x_m \to x$, $||x_m - x|| \to 0$; непрерывность нормы $||x_m|| \to ||x||$ *при* $x_m \to x$; фундаментальная последовательность $\{x_m\}$: $||x_m - x_p|| \to 0$ *при* $m,p \to \infty$.

Пусть функции f_k (s) образуют множество ортонормированных функций:

$$\int_\mu f_k(s) f_n(s) d\mu; \quad \begin{cases} 1, & k = n; \\ 0, & k \neq n; \end{cases} \qquad (16)$$

Лемма [12, 13]. Пусть заданы не пустые, не пересекающиеся подмножества сигналов $S \subset L2$, и случайных помех $X \subset L2$, $X \cap S = 0$. Тогда для любой реализации случайной помехи $x \in X$ и совокупности ортонормированных операторов $f_k(*)$ соответствующий линейный ограниченный оптимальный индикатор сигнала $I_s(s)=A \neq 0$ реализует отношение:

$$\frac{|I_s(x)|}{|I_s(s)|} < \varepsilon; \qquad (17)$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малая величина.

Докажем это неравенство в отличие от [12], используя необходимые и достаточные условия сходимости рядов.

Из (16) получим:

$$I_s(s) = \int_\mu \sum_{k=0}^{N} f_k(s) f_k(s) d\mu = N;$$

Функция $f_k(x)$ может быть разложена в ряд по ортонормированным функциям $f_k(s)$:

$$f_k(x) = C_{k0} f_0(s) + C_{k1} f_1(s) + \ldots + C_{kN} f_N(s) + \ldots;$$

где

$$C_{kk} = \int_\mu f_k(x) f_k(s) d\mu;$$

Тогда индикатор $I_s(x)$ принимает вид:

$$I_s(x) = \sum_{k=0}^{N} C_{kk}; \qquad (18)$$

Необходимое условие сходимости ряда (18): $C_{NN} \to 0$ при $N \to \infty$. Так как все функции $f_k(x)$ принадлежат к $L2$, то ряды для $f_0(x)$, $f_1(x)$,…. $f_N(x)$ сходятся и, в соответствии с уравнением замкнутости, имеем:

$$\int_\mu f_k(x)^2 d\mu = \sum_{k=0}^{N} C_{kn}^{\;2} < \infty;$$

Следовательно, все коэффициенты C_{kN} и C_{NN} стремятся к 0 при $N \to \infty$.

Если для какого-то N это условие не выполняется, то соответствующий ряд – расходится.

Достаточное условие сходимости (18):

$$\frac{C_{kk}}{C_{k-1,k-1}} < 1;$$

Если: $C_{11} < C_{22} \ldots < C_{kk}$, то ряды для больших N не могут сходиться, что противоречит сходимости (18), т.е. должно выполняться условие $C_{kk} < C_{k-1,k-1}$.

Более общий вариант доказательства приведен в [12].

Следовательно, ряд $I_s(x)$ сходится и ограничен:

$$|I_s(x)| = |C_{00} + C_{11} + \ldots + C_{NN}| = A < \infty;$$

В результате всегда можно указать N, при котором выполняется неравенство (17):

Из этого выражения следует очевидное:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{I_s(x)}{I_s(s)} = \lim_{N\to\infty} \frac{A}{N} = 0;$$

Следовательно, напряжение помехи на выходе ОИ есть бесконечно малая величина по сравнению с сигналом.

Дополненная по сравнению с [12] структурная схема оптимального индикатора сигнала показана на рис. 5:

Г[$s(t)$] – генератор сигнала;

– прм – перемножитель;
– d dt – дифференцирующее устройство;
– Г[w(t)] – генератор весовой функции;
– инт – интегратор.

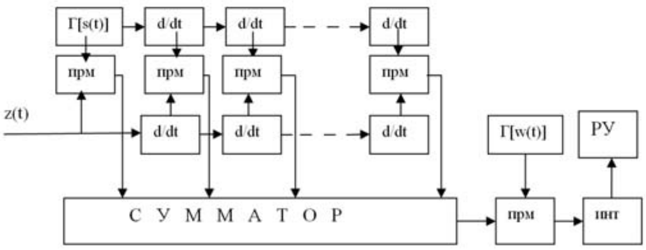

Рис. 5. Структурная схема оптимальная индикатора

Докажем, что ОИ позволяет компенсировать помехи от МСИ и передавать информацию, при количестве дифференцирующих устройств N→∞ со сколь угодно большой бодовой скоростью. Так как операторы $f_k(s)$ должны представлять совокупность ортонормирован-ных функций, то они могут быть сформированы на базе ортогональных с весом полиномов, например полиномов Эрмита. Пусть принимаемый сигнал имеет вид [12]:

$$s(t)=U_m e^{-0.5t^2}; \tag{19}$$

Эта функция является производящей функцией для ортогональных полиномов Эрмита $H_k(t)$. Так как ОИ посимвольно обрабатывает принимаемую комбинацию, то для n-ой посылки условие ортогональности операторов $f_k(t-nT)$ от сигнального импульса (19) записывается в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi k!n!}}\int_{-\infty}^{\infty}(-1)^{k+n}e^{0.5(t-nT)^2}\frac{d^n}{dt^n}e^{-0.5(t-nT)^2}\frac{d^k}{dt^k}e^{-0.5(t-kT)^2}dt=\begin{cases}1, k=n;\\ 0, k\neq n;\end{cases}$$

Таким образом, функция $exp(-0.5t^2)$ и ее производные удовлетворяют условию ортогональности с весом $w(t)=exp(0.5t^2)$ и взаимной связи. Они ортонормированны и $f_{k+1}(s)$ образуется из $f_k(s)$ в результате линейной операции. АЧХ канала должна быть также гауссовой, чтобы сигнал на входе приемника имел вид (19). Тогда напряжение на выходе ОИ может быть записано в виде (без учета весовой функции):

$$I_s(x)=U_m\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{1}{k!\sqrt{2\pi}}\frac{d^k x(t)}{dt^k}\frac{d^k}{dt^k}e^{-0.5t^2}\right]dt$$

Пусть $x(t)$ – помехи от МСИ со случайным временем запаздывания τ_n и амплитудой x_n:

$$x(t)=\sum_n x_n e^{-0.5(t-\tau_n)^2};$$

Сигнальный импульс, пораженный МСИ, запишем так:

$$z(t)=s(t)+x(t)=U_m e^{-0.5t^2}+\sum_n x_n e^{-0.5(t-\tau_n)^2};$$

Напряжение u_s на выходе ОИ, соответствующее выделяемой посылке сигнала, равно:

$$u_s=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N}\left[\frac{1}{k!\sqrt{2\pi}}\frac{d^k}{dt^k}e^{-0.5t^2}\left\{U_m\frac{d^k}{dt^k}e^{-0.5t^2}+\frac{d^k}{dt^k}\sum_n x_n e^{-0.5(t-\tau_n)^2}\right\}\right]dt$$

Спектр импульса (19) с произвольным запаздыванием имеет вид:

$$g_n(\omega)=U_m\sqrt{2\pi}e^{-0.5\omega^2}e^{-j\omega\tau_n};$$

Выражая сигнал и МСИ через их спектры $g_s(\omega)$ и $g_n(\omega)$, дифференцируя спектры, получим:

$$u_s=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!4\pi^2\sqrt{2\pi}}\left[\frac{d^k}{dt^k}\int_{-\infty}^{\infty}g_s(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]\left[\frac{d^k}{dt^k}\int_{-\infty}^{\infty}g_s(v)e^{jvt}dv\right]+$$
$$+\left[\frac{d^k}{dt^k}\int_{-\infty}^{\infty}g_s(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]\left\{\frac{d^k}{dt^k}\sum_n\left[\int_{-\infty}^{\infty}g_{xn}(v)e^{jvt}dv\right]\right\}$$

$$u_s=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{k!4\pi^2\sqrt{2\pi}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}(j\omega)^k g_s(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]\left[U_s\int_{-\infty}^{\infty}(jv)^k g_s(v)e^{jvt}dv\right]+$$
$$+\left[\int_{-\infty}^{\infty}(j\omega)^k g_s(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right]\left\{\sum_n\left[\int_{-\infty}^{\infty}(jv)^k g_{xn}(v)e^{jvt}dv\right]\right\}$$

Интегрируя по t, получим $\delta(v-\omega)$, свертка с которой дает разложение в ряд функции $\exp(\omega^2)$. Результирующее выражение можно записать в виде с точностью до постоянных:

$$u_s=U_s\delta(t)+\sum_n x_n\delta(t-\tau_n).$$

Таким образом, в момент времени t=0 получим напряжение, соответствующее сигналу. Оптимальный индикатор разделяет сигнальные импульсы при сколь угодно малом интервале их следования.

Рассмотрим помехоустойчивость предложенного способа обработки по отношению к аддитивной нормальной помехе. Процесс $z(t)$ на входе приемника есть сумма сигнала u_s из (19), помех $x(t)$ от МСИ и гауссова шума $n(t)$. Для такой помехи оптимальный индикатор:

$$I_s(z)=I_s(u_s)+I_s\left[\sum_n x_n\delta(t-\tau_n)+n(t)\right];$$

есть нормальная случайная величина со средним значением $I_s(u_s)$ и дисперсией σ^2:

$$\sigma^2=\overline{I_s\left[\sum_n x_n\delta(t-\tau_n)+n(t)\right]^2}$$

Для случая передачи противоположных двоичных сигналов u_s и $-u_s$ индикатор принимает значения $I_s(u_s)$ и $-I_s(u_s)$. Вероятность ошибки есть вероятность выполнения неравенства:

$$+I_s(u_s)+I_s\left[\sum_n x_n\delta(t-\tau_n)+n(t)\right]<0.$$

Средняя вероятность ошибки, с точностью до коэффициентов, может быть выражена через интеграл вероятности [2]:

$$p_{ош}=Q\left(\frac{I_s(u_s)}{\sigma}\right);$$

Так как при $N\to\infty$ отношение величина σ к $I_s(u_s)$ стремится к 0 из (17), то оптимальный индикатор в пределе обеспечивает сколь угодно малую вероятность ошибки при фиксированной мощности информационного сигнала.

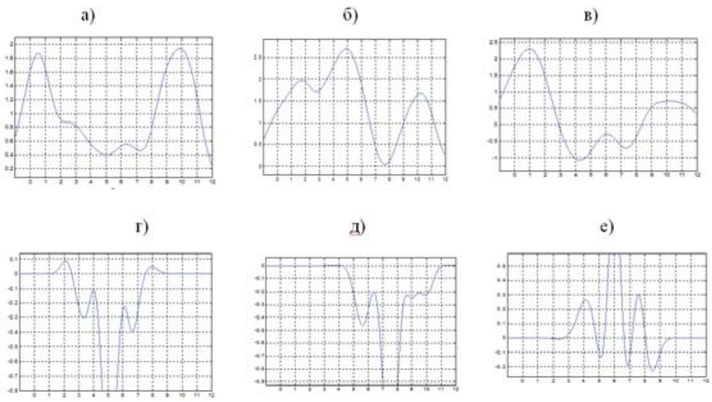

Рис. 6. Временные диаграммы комбинаций на входе и выходе ОИ

Для визуальной иллюстрации процесса выделения информационного сигнала приведены рис. 6:

– на вход КС поступает комбинация $v_1(t)$='+ - +'; на выходе КС получим соответствующую ей комбинацию $u_1(t)$ на рис. 6а (знак импульса "-" искажен); рис. 1г – это U_s для N = 1 (импульс "-" восстановлен).

– увеличиваем скорость в 5/3 раз; на вход КС поступает комбинация $v_2(t)$='+ + + - +' такой же длительности как и $v_1(t)$; на выходе КС получим соответствующую ей комбинацию $u_2(t)$ на рис. 6б (знак импульса "-" искажен); рис. 1д – это U_s для N = 2 (импульс "-" восстановлен).

– увеличиваем скорость в 11/3 раз; на вход КС поступает комбинация $v_3(t)$='+ + + - - - + - - + -' такой же длительности, как и $v_1(t)$; на выходе КС получим соответствующую ей комбинацию $u_3(t)$ на рис. 6в (знак 7-го импульса "+" искажен); рис. 1д – это U_s для N = 3 (импульс "+" восстановлен).

Выводы:

– оптимальный индикатор позволяет при числе дифференциаторов $N\to\infty$ выделить информационный импульс и устраняет мешающее влияние МСИ и помех от аддитивного шума на помехоустойчивость;

– оптимальный индикатор при числе дифференциаторов $N\to\infty$ обеспечивает сколь угодно большую скорость передачи импульсов определенной формы по каналу связи с заданной формой АЧХ.

Для КС с гауссовой АЧХ возможны реализации шума с шириной спектра больше, чем у сигнала. В этом случае эффективность ОИ падает [12, 13].

Заключение

1. Для избранной модели дискретно-непрерывного детерминированного канала с памятью доказана теорема кодирования для приема кодовых комбинаций «в целом» при фиксированной полосе частот канала и ограничениях на энергию и энергию разности комбинаций. Подтверждена экспоненциальная зависимость средней вероятности ошибки при приеме кодовой комбинации «в целом» от длины комбинации.

2. По ДНДКП с фиксированной полосой частот и наложенными ограничениями на энергию и энергию разности комбинаций можно передавать информацию со скоростью сколь угодно близкой к величине $C' = \frac{P_c}{G_0} ln2$, превышающей пропускную способность канала без памяти с той же полосой частот. При этом, средняя вероятность ошибки при приеме комбинации «в целом» может быть сделана сколь угодно малой при неограниченном увеличении длительности комбинации.

3. При наложении ограничений на АЧХ канала связи и форму информационных импульсов оптимальный индикатор разделяет информационные импульсы при сколь угодно малом интервале их следования и устраняет влияние аддитивных помех на помехоустойчивость приема при неограниченном увеличении числа ортогональных операторов.

Литература

1. *Галлагер Р.* Теория информации и надёжная связь. М.: Сов. радио, 1974. 720 с.
2. *Прокис Дж.* Цифровая связь / Пер. с анг. под ред. Кловского Д.Д. М.: Радио и связь, 2000. 800 с.
3. *Левин Б.Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Радио и связь, 1989. 656 с.
4. *Зюко А.Г., Кловский Д.Д., Коржик В.И., Назаров М.В.* Теория электрической связи: Учебник для вузов; Под ред. Д.Д. Кловского. М.: Радио и связь, 1999. 432 с.
5. *Гренандер У., Сеге Г.* Теплицевы формы и их приложения. М.: ИЛ, 1961. 185 с.
6. *Вулих Б.З.* Краткий курс теории функций вещественной переменной. Введение в теорию интеграла. М.: Наука, 1973. 352 с.
7. *Сухоруков А.С.* Использование относительных способов для увеличения скорости передачи информации // Радиотехника. 1984. №3. С. 45-48.
8. *Сухоруков А.С.* Разделение лучей в многолучевом канале при использовании узкополосных сигналов с дифференцированием на приеме // Радиотехника. 1986. №2. С. 55-57.
9. *Сухоруков А.С.* Максимальная скорость передачи в непрерывном канале с известной корреляционной матрицей // Радиотехника. 1988. №2. С. 10-15.
10. *Сухоруков А.С.* Теоретические и практические аспекты реализации пропускной способности детерминированного канала с памятью // Труды МТУСИ. 2004. С. 34-44.
11. *Сухоруков А.С.* Введение в теорию многомерной связи. М.: Медиа Паблишер, 2011. 274 с.
12. *Сухоруков А.С.* Оптимальный индикатор двоичных сигналов, пораженных помехами от многолучевости и межсимвольной интерференции // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2016. Том 10. №2. С. 40-47.
13. *Сухоруков А.С.* Оптимальный индикатор двоичных сигналов для систем дистанционного обучения и медицинского обслуживания // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2016. Том 10. №11. С. 8-15.
14. *Сухоруков А.С.* Пропускная способность дискретного многомерного канала связи с памятью // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2018. Том 12. №3. С. 13-19.

EXCEEDING THE BANDWIDTH OF THE CHANNEL WITHOUT MEMORY IN THE DISCRETE-CONTINUOUS DETERMINISTIC CHANNEL WITH THE MEMORY AND SET RESTRICTIONS

Alexander S. Sukhorukov, *Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia,*
suhas@yandex.ru

Abstract

The article summarizes the results of the author's research, presented in the works [7-14]. The main conclusion is that the bandwidth of the communication channel with memory under certain restrictions can exceed the bandwidth of the channel without memory. Reducing the duration of information pulses and their period increases the speed of receipt of information at the input of the communication channel. However, a communication channel (CC) without memory turns into a CC with memory, and the resulting intersymbol interference (ISI) reduces the speed of information transmission through the CC. The corresponding formulas show the need to find the optimal ratio between the baud rate and the probability of error for a given level of additive noise. The article considers a discrete-continuous deterministic channel with memory (DCDCM), for which the transmitted signals are discrete in time and continuous in levels combinations. CC parameters are known at the transmission and reception sides. Representing the processes at the input and output of the DCDCM in the form of L-dimensional vectors, the coding theorem is proved in this article when restrictions on the energy and the energy of the difference of combinations are imposed on the transmitted combinations. The exponential dependence of the average error probability on the duration of the combination is shown in case of reception as a whole of the L-dimensional vector. The restrictions imposed on the allowable combinations do not change the exponential dependence of the error probability on the duration of the combination. The coding theorem is proved if only good codes are used for transmission with a given energy and the difference energy of combinations. This enables to specify constructive ways to increase the bandwidth of the CC. For CC with memory, the duration of the combination should be increased in proportion to the number of symbols in the code combination, but the factor should be less than 1. For different signal-to-noise ratios, a range of values of this factor is defined, which allow to obtain a transmission rate greater than the capacity of the channel without memory, and the error probability tends to zero with the length of the combination tending to infinity. The same result can be obtained by using the optimal indicator. The optimal indicator eliminates intersymbol interference, enabling a separation of the information pulses at a pulse repetition interval greater than an arbitrarily small value. The error probability can be made arbitrarily small for a particular form of CC frequency response. At the same time, the requirements for CC parameters increase and the decoder becomes significantly more complicated.

Keywords: *coding theorem, bandwidth, discrete memory channel, intersymbol interference, probability of error, immunity, code combination, permitted combination, protective time interval, additive noise, entropy, mutual information, optimal indicator.*

References

1. Gallager R.G. (1974). *Information Theory and Reliable Communication*. Moscow: Sov. Radio. 720 p.
2. Proakis J.G. (2000). *Digital Communications*. Moscow: Radio i svyaz'. 800 p. (*in Russian*)
3. Levin B.R. (1989). *Theoretical bases of statistical radio engineering*. Moscow: Radio i svyaz'. 656 p. (*in Russian*)
4. *Theory of telecommunications: Tutorial for universities* (1998). Ed. Klovskiy D.D. Moscow: Radio i svyaz'. 433 p.
5. Grenander U., Szege G. (1958). *Toeplitz forms and their applications*. Moscow: IL. 185 p.
6. Wulich B. (1973). *A short course of theory of functions of a real variable. Introduction to the theory of integral*. Moscow: Nauka. 352 p. (*in Russian*)
7. Sukhorukov A.S. (1984). Using relative ways to increase the speed of information transmission. *Radiotekhnika*. No3. pp. 45-48. (*in Russian*)
8. Sukhorukov A.S.)1986). Division of rays in the multipath channel using narrowband signals with differentiation at the reception. *Radiotekhnika*. No. 2, pp 55-57. (*in Russian*)
9. Sukhorukov A.S. (1988). Maximum transmission speed in a continuous channel with a well-known correlation matrix. *Radiotekhnika*. No. 2, pp. 10-15.
10. Sukhorukov A.S. (2004). Theoretical and practical aspects of implementing the bandwidth of a deterministic channel with memory. *Trudy MTUCI,* pp. 34-44.
11. Sukhorukov A.S. (2011). *Introduction to the theory of multi-dimensional communication.* Moscow: Media Pablisher. 274 p. (*in Russian*)
12. Sukhorukov A.S. (2016). The optimal indicator of binary signals distorted by multipath and intersymbol interference noise. *T-Comm*. Vol. 10. No.2, pp. 40-47. (*in Russian*)
13. Sukhorukov A.S. (2016). Optimum indicator of binary signals for distance learning systems and medical service. *T-Comm*. Vol. 10. No.11, pp. 9-16. (*in Russian*)
14. Sukhorukov A.S. (2018). Bandwidth multidimensional discrete communication channel with memory. *T-Comm*. Vol. 12. No.3, pp. 13-21. (*in Russian*)

Information about author:
Alexander S. Sukhorukov, *Cand.tech.Sci., Associate Professor of Faculty of the general theory of the Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia*