ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ЭВОЛЮЦИИ ИНФОРМАЦИИ СЛОЖНОЙ СИСТЕМЫ ВБЛИЗИ ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

DOI: 10.36724/2072-8735-2023-17-1-20-25

Юденков Алексей Витальевич,
ВО "СГУС", г. Смоленск, Россия, ***aleks-ydenkov@mail.ru***

Володченков Александр Михайлович,
Смоленский филиал РЭУ им. Г.В.Плеханова, г.Смоленск, Россия;
ФГБОУ ВО Смоленская ГСХА, г.Смоленск, Россия,
alexmw2012@yandex.ru

Римская Лилия Павловна,
Смоленский филиал РЭУ им. Г.В.Плеханова, г. Смоленск, Россия,
lilirimska@yandex.ru

Manuscript received 20 November 2022;
Accepted 12 January 2023

Ключевые слова: *фазовый переход, гетерофазная флуктуация, марковский процесс, процесс гибели и размножения*

Теория Ландау фазовых переходов и теория гетерофазных флуктуаций Френкеля благодаря своей простоте и эффективности приобрели статус универсальных теорий, имеющих многочисленные приложения в различных отраслях науки и техники. Одним из важных научных направлений развития теории является исследование изменения информации в сложных системах. На сегодняшний день актуальной задачей является разработка многоуровневых математических моделей динамики перехода макроскопической системы в новое фазовое состояние, основанных на анализе изменения информации Шеннона. В работе предлагается дискретная модель фазового перехода на микроскопическом уровне. От моделей, используемых в теории Ландау и Френкеля, дискретная модель фазового перехода отличает меньшим масштабом, что приводит к большей зависимости от случайных факторов. Модель основана на теории марковских процессов и принципе максимума информации или информационной энтропии. Основным математическим аппаратом являются уравнения Колмогорова. Для наглядности используются графы Колмогорова. Результаты работы. Построена стохастическая модель фазового перехода на микроуровне. Модель остается адекватной, как вблизи точки фазового перехода, так и вдали от него. Дана оценка интенсивности эволюции энтропии системы. Получена динамика смены фаз при переходах первого и второго рода. Получены условия для фазового равновесия при фазовых переходах первого и второго рода. Дана стохастическая интерпретация явления гистерезиса на микроскопическом уровне. Полученные результаты находятся в соответствии с положениями теории Ландау и Френкеля. Результаты работы имеют перспективы применения в прогнозировании кризисов сложных систем по динамике изменения информации.

Информация об авторе:
Юденков Алексей Витальевич, *ФГБОУ ВО "СГУС", заведующий кафедрой менеджмента и естественно-научных дисциплин, доктор физико-математических наук, профессор, г. Смоленск, Россия*
Володченков Александр Михайлович, *Смоленский филиал РЭУ им. Г.В.Плеханова, заведующий кафедрой естественнонаучных и гуманитарных дисциплин, г. Смоленск, Россия; ФГБОУ ВО Смоленская ГСХА, доцент кафедры механизации, к.ф.-м.н., доцент, г. Смоленск, Россия*
Римская Лилия Павловна, *Смоленский филиал РЭУ им. Г.В.Плеханова, доцент кафедры менеджмента и таможенного дела, к.ф.-м.н., доцент, г. Смоленск, Россия*

Для цитирования:
Юденков А.В., Володченков А.М., Римская Л.П. Дискретная модель эволюции информации сложной системы вблизи точки фазового перехода // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2023. Том 17. №1. С. 20-25.

For citation:
Yudenkov A.V., Volodchenkov A.M., Rimskaya L.P. (2023) Discrete model of information evolution of a complex system near a phase transition point. *T-Comm*, vol. 17, no.1, pp. 20-25. (*in Russian*)

Введение

Теория Ландау фазовых переходов первого и второго родов, дополненная теорией гетерофазных флуктуаций Френкеля, является эффективным инструментом для исследования термодинамических систем при различных внутренних и внешних условиях ([2], [3], [11]). Благодаря связи между информационной энтропией и энтропией, как термодинамической функцией, появилась возможность использовать математические модели Ландау в теории сложных систем, то есть систем, зависящих от многих факторов. При этом принцип минимума термодинамического потенциала заменяется на принцип максимума информации. Это позволяет заменить достаточно специфическую для термодинамики функцию (термодинамический потенциал) на более общее понятие (энтропию) ([5], [7]).

Особенностью сложных систем является то, что для их описания невозможно подобрать одну универсальную математическую модель [6]. В большинстве случаев используется ряд моделей, которые описывают систему на определенном уровне. Например, макроскопический уровень описывает систему в целом. Микроскопическая модель характеризует динамику составляющих ее частей. Также отдельно рассматривается процесс смены макроскопических состояний. Такие модели называются моделями мезодинамики.

Классическая теория Ландау относится к макроскопическим моделям. Поэтому в ней практически не учитывается случайный фактор.

Теория Френкеля сочетает как черты макроскопических моделей, так и микроскопических. С одной стороны системы в состоянии близком к фазовому переходу рассматривались на уровне отдельных молекул относительно «старой фазы». С другой стороны, в качестве молекул «новой фазы» выступают флуктуационные зародыши, размер которых можно оценить от 10^3 до 10^5 молекул. Такие объекты достаточно велики, чтобы использовать для оценки динамики эволюции флуктуационного зародыша средние значения, что приводит к детерминированной модели. Такой подход критиковался, в том числе и Л.Д. Ландау, который указывал, что система с такими «сверх» молекулами становится слишком неоднородной. Хорошее согласование теории гетерофазных флуктуаций с опытными данными оправдывает такой подход.

Цель данной работы – предложить стохастическую модель фазового перехода на микроуровне, которая эффективно описывала бы фазовые изменения сложной системы на основе изменения энтропии Шеннона. Для этого используется теория марковских процессов аналогичных процессу гибели-размножения.

Обзор результатов

Классическая теория Ландау фазовых переходов базируется на следующих положениях [4].

1. Устойчивое состояние термодинамической системы соответствует минимуму термодинамического потенциала $\Phi = U + PV - TS$.
2. Термодинамический потенциал является аналитической функцией, которую можно разложить в ряд Тейлора.
3. Термодинамический потенциал должен соответствовать симметричному лагранжиану.

В этом случае термодинамический потенциал вблизи точки фазового перехода T_c можно разложить в ряд по параметру p.

$$\Phi(P,T,p) = \Phi_0 + A(P,T)p^2 + B(P,T)p^4 \tag{1}$$

Здесь B(P,T)>0. Коэффициент A отвечает за фазовый переход из фазы A в фазу B/ Обычно полагают, что

$$A(P,T) = a(P)(T - T_c). \tag{2}$$

Таким образом, при $T>T_c$ коэффициент A больше нуля. При $T<T_c$ A меньше нуля.

Отсюда при A>0 существует одна точка глобального минимума в точке p=0. Стабильна фаза A.

При A<0 функция $\Phi(P,T,p)$ имеет три критические точки. В точке p=0 точка максимума. В точках $p_{12} = \pm\sqrt{-\frac{A}{2B}}$ –минимумы. Это означает, что происходит фазовый переход от состояния A к образцу в состоянии B. Переход осуществляется равномерно без задержки.

Для фазового перехода первого рода применима та же методика, что и для перехода второго рода. В данном случае модель имеет следующий вид:

$$\Phi(P,T,p) = \Phi_0 + A(P,T)p^2 + B(P,T)p^4 + C(P,T)p^6\,. \tag{3}$$

В этом случае при A>0 существует один глобальный минимум. Стабильна фаза A.

При A<0 и $-B + \sqrt{B^2 - AC} > 0$ система имеет один локальный минимум при p=0 и два симметричных глобальных минимума $p = \pm\sqrt{\frac{-B+\sqrt{B^2-AC}}{3C}}$. Локальный минимум соответствует метастабильному состоянию A. Глобальные минимумы соответствуют устойчивому состоянию новой фазы.

Таким образом, при фазовом переходе 1-го рода смена фаз происходит с некоторым запаздыванием, что порождает явление гистерезиса, являющегося характерным признаком перехода 1-го рода.

Теория Ландау относится к макроскопическим теориям. Она теряет свою эффективность непосредственно вблизи точки фазового перехода.

Теория гетерофазных флуктуаций Френкеля. Согласно этой теории в результате флуктуаций температуры в системе, находящейся в основной фазе A будут возникать зародыши другой фазы B.

Распределение зародышей по размерам (или по числу элементов в зародыше) будет определяться формулой:

$$M_n = M_{\exp}(-\frac{\Delta F_n}{T})\,.$$

Здесь M – полное число частиц всех возможных размеров в системе

$$M = \sum_{n=1}^{\infty} nM_n \approx M_1\,.$$

T – параметр, отвечающий за фазовый переход.

При приближении к точке фазового перехода размер зародышей будет возрастать. Пусть N – общее число элементов системы, N_A – число элементов системы в фазе A, N_B – число элементов в фазе B. Введем в рассмотрение величину

$$L = \frac{N_A}{N - N_A}.$$

Если величина $L \geq 1$, то считается, что произошёл фазовый переход второго рода.

В случае перехода первого рода между фазами существует граница, обладающая некоторой энергией.

Положим, что характерный размер зародыша r, тогда изменение энергии системы в результате его образования можно оценить следующим образом:

$$\Delta E = \sigma r^2 - \rho r^3(\varphi_B - \varphi_A).$$

Здесь σ, ρ – положительные коэффициенты; φ_B и φ_A – соответствующие удельные потенциалы.

Минимум энергии будет в точке

$$r_c = \frac{2\sigma}{\rho(\varphi_B - \varphi_A)}.$$

Таким образом, наличие границы между фазами сдвигает фазовый переход сторону увеличения размера зародыша новой фазы. Смена фаз наступит в том случае, когда большинство зародышей будет больше критического размера $\sim r_c^3$.

Принцип максимума информации. Для сложной системы, зависящей от целого ряда факторов некоторые из которых могут быть трудно формализуемые, использовать без изменения понятия термодинамики затруднительно. Поэтому в качестве основной функции сложной системы предлагается использовать информационную энтропию [5]

$$S = -k \sum_i p_i \, lnp_i. \qquad (4)$$

Информационная энтропия непосредственно связана с информацией Шеннона через коэффициент Больцмана k.

Согласно принципу максимума информации устойчивому положению сложной системы соответствует максимум информации [4]. Этот принцип (второе начало синергетики) сочетается с термодинамическим принципом минимума потенциала Ф.

Одним из основных положений теории сложных систем это то, что переход в новое состояние осуществляется под воздействием одного параметра порядка (ξ).

Микроскопическая модель кризиса сложной системы основана на процессе броуновского движения. Переход к макроскопической модели происходит с помощью уравнения Ланжевена:

$$\dot{q} = K(q) + F(t). \qquad (5)$$

Здесь q – выступает в роли некоторой скорости. $F(t)$ – флуктуирующая сила, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\langle F(t) \rangle = 0.$$
$$\langle F(t)F(t') \rangle = Q\delta(t - t').$$

$K(q)$ – систематические силы.

Для броуновского движения $K(q) = -\gamma q$.

Для того чтобы использовать статические решения уравнения (5) используется принцип детального равновесия. Согласно этому принципу система находится в равновесии, если скорости перехода системы из состояния S_1 в состояние S_2 и из состояния S_2 в состояние S_1 равны.

Следуя теории Ландау, для параметра порядка вблизи фазового состояния фазового перехода можно записать следующее уравнение:

$$\dot{\xi} = 2A\xi + 4B\xi^3 + F(t).$$

Такой вид правой части соответствует фазовый переход второго рода.

Для фазового перехода первого рода уравнение Ланжевена имеет вид:

$$\dot{\xi} = 2A\xi + 4B\xi^3 + 6C\xi^5 + F(t).$$

В работе [5] показано, что теория Ландау неравновесных фазовых переходов следует, как частный случай, из принципа максимума информации теории сложных систем.

Аналог теории гетерофазных флуктуаций в теории сложных систем, насколько известно авторам работы, пока не представлен в научной литературе.

Модель фазового перехода на микроуровне

Предложим математическую модель фазового перехода сложной системы на микроуровне, основанную на принципе максимума информации.

Простейшая модель образования новой фазы для системы, состоящей из однородных элементов, может быть представлена следующим образом.

В начальный момент q элементов объединяются в один центр:

$$qM_1 \leftrightarrow M_q.$$

После этого идут два процесса. Один заключается в том, что к зародышу присоединяются новые элементы. При этом происходит рост зародыша. Второй процесс заключается в том, что элементы покидают зародыш. Схематично эволюцию центра новой фазы можно представить следующим образом:

$$M_q + M_1 \leftrightarrow M_{q+1},$$
$$\ldots$$
$$M_n + M_1 \leftrightarrow M_{n+1}.$$
$$\ldots.$$

Для формализации изложенного процесса используем модель фазового пространства аналогичной модели дискретной фазового пространства, представленной в работах [9] и [10]. Основным отличием данной модели является то, что модель дискретного фазового пространства относится к одной частице, которая могла быть в одной из доступных фазовых ячеек. В данном случае различные частицы объединяются в один объект, увеличивая число степеней свободы, то есть фазовый объем. Для того чтобы модель была аддитивной следует перейти от фазового объема к логарифму фазового объема, энтропии.

Это вполне согласуется как со вторым началом термодинамики. Так и с принципом максимума энтропии.

Введем следующие обозначения. S_1 – энтропия системы, состоящей из одной частицы, S_2 – энтропия системы двух частиц… S_n – энтропия системы, состоящей из n частиц. Будем полагать, что рост новой фазы происходит согласно простейшему потоку событий. Тогда эволюция зародыша новой фазы представляет собой марковский процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем. Интенсивность перехода между состояниями можно оценить на примере идеального газа следующим образом [8]:

$$\lambda = \frac{1}{\tau} \sim \frac{kT}{h} \sim 10^{13} c^{-1}. \qquad (6)$$

Здесь h – постоянная Планка, k – постоянная Больцмана.

В общем случае интенсивность переходов будет зависеть не только от температуры, но и от внутреннего строения элементов фазы. То есть

$$\lambda_i \sim \frac{A_i kT}{h}. \qquad (7)$$

Здесь A_i – определенный коэффициент.

Пусть, условно, фаза 1 соответствует «холодному» состоянию системы, фаза 2 – «нагретому».

Результаты. Рассмотрим фазовый переход второго рода. Напомним, что в этом случае между фазами нет четкой границы. Фазовое равновесие между фазами 1 и 2 представлено графом Колмогорова (см. рис. 1).

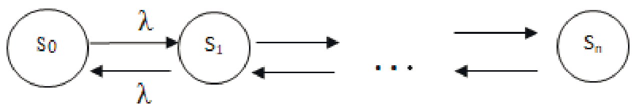

Рис. 1. Граф фазового равновесия при фазовом переходе второго рода

Исходя из формул (6) и (7) при фазовом равновесии $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_c$. При этом

$$\lambda_c \sim \frac{AkT_c}{h}.$$

Здесь T_c – температура фазового равновесия.

В стационарном состоянии математическое ожидание числа элементов фазы 1 равно $E_1(N)=E_2(N)= n/2$.

Пусть в начальный момент основной является фаза 2 и имеет температуру $T_2>T_c$.

В этом случае фазовый переход будет проходить следующим образом. Интенсивность перехода из фазы 1 в фазу 2 будет проходить с интенсивностью $\lambda_{12} \sim T_c$. Интенсивность перехода из фазы 2 в фазу 1 (λ_{21}) пропорциональна температуре T_2. То есть выполняется условие: $\lambda_{12} < \lambda_{21}$ Соответствующий граф Колмогорова представлен на рисунке 2.

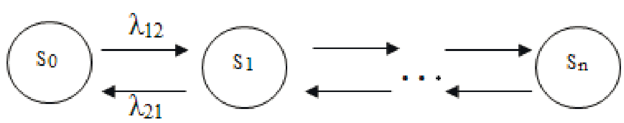

Рис. 2. Граф изменения энтропии системы при температуре выше температуры фазового равновесия

Граф на рисунке 2 формально совпадает с известным графом одноканальной СМО с ограниченной очередью. Это еще раз подчёркивает достаточно общий характер предлагаемой модели.

Такая задача достаточно известна в теории случайных процессов (смотри [1] с.252).

Соответствующие характеристики системы в стационарном режиме имеют вид:

$$E(N) = n\frac{\lambda_{12}}{\lambda_{12}+\lambda_{21}} < 0.5n. \qquad (8)$$

$$D(N) = n\frac{\lambda_{12}\lambda_{21}}{(\lambda_{12}+\lambda_{21})^2}. \qquad (9)$$

Относительная доля фазы 1 равна

$$L = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} < 1. \qquad (10)$$

Сама динамика изменения энтропии будет определяться системой линейных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{dp_0}{dt} = \lambda_{21}p_1 - \lambda_{12}p_0, \\ &\dots, \\ &\frac{dp_n}{dt} = \lambda_{21}p_n - \lambda_{12}p_{n-1}. \end{aligned} \qquad (11)$$

С дополнительным условием нормировки:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

В случае, если $T_2<T_c$, то формулы (8) – (11) остаются в силе. Однако $E(N) > 0.5n$, $L > 1$.

Дискретная модель фазового перехода второго рода является симметричной.

Рассмотрим фазовый переход первого рода. Фазовый переход первого рода характеризуется тем, что фазы разделены границей. В этом случае элемент прежде, чем перейти из внутренней части системы на границу, потом из граничного слоя перейти в другую фазу. Использую графы Колмогорова, можно формализовать процесс перехода следующим образом (см. рис. 3). Здесь состояние S соответствует нахождению элемента в пограничном слое.

Здесь выполняется условие:

$$\lambda_{12} + \lambda_s = \lambda_1.$$

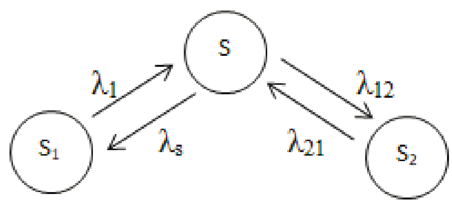

Рис. 3. Переход отдельного элемента системы в другую фазу при наличии границы

Наличие границы нарушает симметрию фазового перехода. При температуре T_c, исходя из формул (10), получим, что доля новой фазы определяется по формуле.

$$L = \frac{\lambda_{21}-\lambda_1}{\lambda_{21}} < 1.$$

Поэтому температура фазового перехода T_0 будет определяться по формуле:

$$T_0 = \frac{\lambda_{21}-\lambda_1}{\lambda_{21}} T_c.$$

Отсюда температурный гистерезис равен:

$$\Delta T = \frac{\lambda_1}{\lambda_{21}} T_c.$$

В случае обратного фазового перехода рост фазы 2 граничный слой будет уменьшать интенсивность λ_{21}. Поэтому будет наблюдаться обратный температурный гистерезис.

Фазовый переход первого рода из-за наличия границы не является симметричным в отличие от перехода второго рода.

Заключение

Дискретная модель эволюции информации (энтропии) позволяет использовать для исследования фазовых переходов хорошо развитую теорию марковских процессов с дискретными состояниями и непрерывным временем.

Представленная модель является микроскопической миделью. Она работает вплоть до квазиклассического уровня. На таком уровне можно рассмотреть переход в новую фазу отдельного элемента, динамику роста зародыша новой фазы. Определить границы «перегрева» системы при переходе первого рода.

Это позволяет предположить, что предложенная дискретная микроскопическая модель будет полезна при исследовании не только фазовых переходов в термодинамике, но и при исследовании кризисов сложных систем.

Литература

1. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. 5-е издание, стереотипное. М.: Юстиция, 2018. 448 с. ISBN 978-5-4365-1903-6. EDN ZEYDUN.
2. *Головинский П. А.* Флуктуации предплавления // Химия, физика и механика материалов. 2020, № 2(25). С. 129-146. EDN CKNMBE.
3. *Зломанов В.П., Казин П.Е., Яценко А.В.* Вещество и его превращения: основные понятия // Конденсированные среды и межфазные границы. 2022. Т. 24. № 2. С. 211-219. DOI 10.17308/kcmf.2022.24/9261. EDN AHVKZZ.
4. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая механика т.5. Статистическая механика. М.: Наука, 1989. 626 с.
5. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах: От диссипативных структур к упорядоченности через флуктуации. М.: Мир, 1979. 512 с.
6. *Пугачев В.С., Синицын И.Н.* Теория стохастических систем: учеб. пособие. М.: Логос, 2004. 999 с. ISBN 5-94010-199-2. EDN QJMUOD.
7. *Хакен Г.* Информация и самоорганизация. Макроскопический подход к сложным явлениям. М.: Мир, 1991. 240 с.
8. *Чернавский, Д.С.* Информация, самоорганизация, мышление // Сложные системы. 2019. № 2(31). С. 23-56. EDN WNYYWM.
9. *Юденков А.В., Володченков А.М., Римская Л.П.* Дискретная модель эволюции фазового пространства дробно размерных микросистем // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2022. Т. 16. № 4. С. 14-20. DOI 10.36724/2072-8735-2022-16-4-14-20. EDN YTUJDH.
10. *Yudenkov A.V., Volodchenkov A.M., Rimskaya L.P.* (2021) Transition and evolution of information at the microscopic level // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2021. Vol. 15. № 5. P. 62-66. DOI 10.36724/2072-8735-2021-15-5-62-66. EDN HCHHOX.
11. *Yurov V.M., Guchenko S.A., Laurinas V.Ch., Zavatskaya O.N.* Structural phase transition in surface layer of metals // Bulletin of the Karaganda University. Physics Series. 2019. № 1(93). P. 50-60. DOI 10.31489/2019Ph1/50-60. EDN DQVKKG.

DISCRETE MODEL OF INFORMATION EVOLUTION OF A COMPLEX SYSTEM NEAR A PHASE TRANSITION POINT

Aleksey V. Yudenkov, *FSSFEE HE "SSUS", Smolensk, Russia,* **aleks-ydenkov@mail.ru**
Aleksandr M. Volodchenkov, *Smolensk Branch of Plekhanov Russian University of Economics, Smolensk, Russia;*
FSBEI HE Smolensk SAA, Smolensk, Russia, **alexmw2012@yandex.ru**
Liliya P. Rimskaya, *Smolensk Branch of Plekhanov Russian University of Economics, Smolensk, Russia,* **lilirimska@yandex.ru**

Abstract

Landau's theory of phase transitions and Frenkel's theory of heterophase fluctuations, due to their simplicity and efficiency, have acquired the status of universal theories that have numerous applications in various branches of science and technology. One of the important scientific directions in the development of the theory is the study of changes in information in complex systems. To date, an urgent task is the development of multilevel mathematical models of the dynamics of the transition of a macroscopic system to a new phase state, based on the analysis of changes in Shannon information. The paper proposes a discrete model of the phase transition at the microscopic level. The discrete phase transition model differs from the models used in the Landau and Frenkel theory by a smaller scale, which leads to a greater dependence on random factors. The model is based on the theory of Markov processes and the principle of maximum information or information entropy. The main mathematical apparatus is the Kolmogorov equations. For clarity, Kolmogorov graphs are used. Work results. A stochastic model of the phase transition at the microlevel is constructed. The model remains adequate both near the phase transition point and far from it. An estimate of the intensity of the evolution of the entropy of the system is given. The dynamics of phase change during transitions of the first and second order is obtained. Conditions for phase equilibrium are obtained for phase transitions of the first and second kind. A stochastic interpretation of the phenomenon of hysteresis at the microscopic level is given. The results obtained are in accordance with the principles of Landau and Frenkel's theory. The results of the work have prospects for application in forecasting crises of complex systems based on the dynamics of information changes.

Keywords: *phase transition, heterophase fluctuation, Markov process, death and reproduction process.*

References

1. E. S. Venttsel, L. A. Ovcharov (2018) Theory of random processes and its engineering applications. 5th edition, stereotypical. Moscow: Justice. 448 p. ISBN 978-5-4365-1903-6.
2. P. A. Golovinsky (2020) Premelting fluctuations. *Chemistry, Physics and Mechanics of Materials*. No. 2(25). P. 129-146.
3. V. P. Zlomanov, P. E. Kazin, A. V. Yatsenko (2022) Substance and its transformations: basic concepts. *Condensed media and interphase boundaries*. Vol. 24. No. 2. P. 211-219. DOI 10.17308/kcmf.2022.24/9261.
4. L.D. Landau, E.M. Lifshitz (1989) Theoretical mechanics v.5. Statistical mechanics. Moscow: Nauka. 626 p.
5. G. Nicolis, I. Prigogine (1979) Self-organization in non-equilibrium systems: From dissipative structures to orderliness through fluctuations. Moscow: Mir. 512 p.
6. V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyn; V. S. Pugachev, I. N. Sinitsyn (2004) Theory of stochastic systems: textbook. allowance. Moscow: Logos, 999 p. ISBN 5-94010-199-2.
7. G. Haken (1991) Information and self-organization. Macroscopic approach to complex phenomena. Moscow: Mir. 240 p.
8. D. S. Chernavsky (2019) Information, self-organization, thinking. *Complex systems*. No. 2 (31). P. 23-56.
9. A. V. Yudenkov, A. M. Volodchenkov, L. P. Rimskaya (2022) Discrete model of phase space evolution of fractional microsystems. *T-Comm*. Vol. 16. No. 4. P. 14-20. DOI 10.36724/2072-8735-2022-16-4-14-20.
10. A. V. Yudenkov, A. M. Volodchenkov, L. P. Rimskaya (2021) Transition and evolution of information at the microscopic level. *T-Comm*. Vol. 15. No. 5. P. 62-66. DOI 10.36724/2072-8735-2021-15-5-62-66.
11. V. M. Yurov, S. A. Guchenko, V. Ch. Laurinas, O. N. Zavatskaya (2019) Structural phase transition in surface layer of metals. *Bulletin of the Karaganda University. Physics Series*. No 1(93). P. 50-60. DOI 10.31489/2019Ph1/50-60.