

СИНТЕЗ ЯВНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ СИГНАЛОВ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ЧАСТНО-ВРЕМЕННОГО ПОДХОДА

DOI: 10.36724/2072-8735-2022-16-11-21-29

Manuscript received 21 August 2022;

Accepted 27 September 2022

Исследование выполнено за счет гранта
Российского научного фонда № 22-21-00497,
<https://rscf.ru/project/22-21-00497>

Шевгунов Тимофей Яковлевич,
Московский авиационный институт (национальный
исследовательский университет), Москва, Россия,
shevgunov@gmail.com

Ключевые слова: циклоstationарность, частно-
временной анализ, частно-временная плотность,
переменная индикаторная функция, распределение
время-значение

В работе представлено развитие теоретических основ частно-временного (fraction-of-time) подхода, позволяющего выполнить построения вероятностных моделей случайного процесса по его единственной реализации при отсутствии априорной информации о проявлении им свойств эргодичности. На основе анализа неявного выражения частно-временной плотности, содержащей сложную сингулярную функцию, выполнен синтез её аналитического представления в форме явной функции двух переменных, текущего времени и порога. Показано, что такая функция будет представлена суммой, состоящей из не более чем счётного числа слагаемых, содержащих одномерные дельта-функции Дирака. Использование явного функционального представления позволяет существенно упростить отыскание стационарных компоненты частно-временного описания статистических свойств анализируемого сигнала. В дополнение к этому в статье показано, что промежуточный результат проведённых преобразований, а именно: распределение время-значение, играет принципиальную роль в формировании нестационарных вероятностных моделей сигналов в рамках частно-временного подхода. На примере гармонического сигнала синтезировано представление распределения время-значение в форме ряда Фурье, коэффициенты которого являются функциями пороговой переменной, для которых было получено общее аналитическое выражение в явном виде. Также получено представление переменной индикаторной функции гармонического сигнала в форме ряда Фурье и определены явные выражения для его коэффициентов. Было показано, что свойства стационарных компонент, соответствующих нулевой циклической частоте, распределения время-значение и переменной индикаторной функции аналогичны свойствам плотности вероятности и закона распределения одномерной случайной величины, в то время как компоненты, соответствующие ненулевым частотам, проявляют другие свойства. Полученные в рамках предложенного исследования модели направлены на разработку новых методов оценивания вероятностных характеристик анализируемых сигналов, позволяющих создать на их основе новые алгоритмы цифровой обработки.

Информация об авторе:

Шевгунов Тимофей Яковлевич, к.т.н., доцент кафедры "Теоретическая радиотехника", Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) "МАИ", Москва, Россия

Для цитирования:

Шевгунов Т.Я. Синтез явных аналитических формул вероятностных моделей сигналов при использовании частно-временного подхода // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2022. Том 16. №11. С. 21-29.

For citation:

Shevgunov T.Ya. (2022) The synthesis of explicit analytical formulae for the probabilistic models of signals using fraction-of-time approach. T-Comm, vol. 16, no.11, pp. 21-29. (in Russian)

Введение

В течение последних десятилетий отмечается постепенно возрастающий интерес учёных и исследователей, работающих в области теории и методов цифровой обработки сигналов, к анализу сигналов, являющихся реализациями нестационарных процессов. При инструментальном наблюдении и количественном описании большинства явлений, протекающих в физическом мире, используются системы датчиков, или сенсоров, которые с высокой точностью отображают изменения исследуемых физических величин во времени в сигналы, представляющие собой электрические токи и напряжения. Это дополняет выраженный исследовательский интерес учёных и инженеров, работающих в области обработки электрических сигналов, включая сигналы, создаваемые и обрабатываемые с использованием радиотехнических, телекоммуникационных и радиолокационных систем.

Ещё одним стимулом к развитию методов анализа нестационарных процессов и алгоритмов обработки сигналов на их основе является стремительное развитие средств цифровой электронно-вычислительной техники, которое выражается как в росте производительности процессоров универсального и прикладного применения, так и в объёме памяти, доступной к использованию. Это позволяет в настоящее время проводить цифровую обработку сигналов с помощью алгоритмов, практическая реализация которых в прошлом была существенно ограничена объёмом оперативной памяти или низким быстродействием вычислителя.

За последние 30 лет существенное развитие получили теоретические подходы методы анализа циклостационарных случайных процессов (ЦССП). Так, основные результаты, полученные в этой научной области, систематически изложены в монографии [1]. Однако, при анализе ЦССП в большинстве случаев исследователи ограничиваются характеристиками первого и второго порядка, а именно: переменными математическим ожиданием и корреляционной функцией, закон изменения которых во времени может быть описан как периодический или почти-периодический сигнал. Несмотря на то, что были выполнены исследования в области переменных статистик высокого порядка [2], вопрос повышения качества полного вероятностного описания наблюдаемых реализаций процессов остаётся открытым и мало исследованным в рамках прикладных наук.

Особого внимания заслуживает анализ сигналов на основе частно-временного подхода (fraction-of-time, FOT), основные положения которого были предложены в [3]. Так в рамках частно-временного подхода по наблюдаемой реализации сигнала определяется функция

$$F_x(\xi) \triangleq \lim_{B \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{B} \int_{-B/2}^{+B/2} I(x(t) \leq \xi) dt \right\}, \quad (1)$$

где $I(\bullet)$ обозначает индикаторную функцию [4] – функцию логического аргумента, принимающую скалярное значение 1, если её аргумент – истина, и 0, если её аргумент – ложь. Аргумент ξ может рассматриваться как пороговое значение, используемое для сравнения значений, принимаемых сигналом $x(t)$. Было показано [5], что такая функция $F_x(\xi)$ будет эквивалентна в некотором смысле частному одномерному закону распределения стационарного случайного процесса и

будет обладать почти всеми свойствами закона распределения одномерной случайной величины.

Одной из основных идей, полученной в ходе развитии частно-временного подхода, является отказ от требования выполнения эргодичности при построении модели исследуемого процесса [6], что методологически приводит к рассмотрению единственной доступной для наблюдения реализации процесса как единственного источника данных о нём.

Целью исследования, представленного в настоящей статье, является развитие теоретических моделей, используемых в рамках частно-временного анализа сигналов. Основным направлением проведенных исследований являлось получение аналитических выражений для ключевой характеристики частно-временного описания сигнала, а именно: подынтегрального выражения в (1).

Представление такой характеристики в форме явной функции своих аргументов: пороговой переменной ξ и текущего времени t откроет возможность для проведения формального анализа и выполнения манипуляций с формальными выражениями по общим правилам алгебры, интегрального исчисления или функционального анализа. Проведённые исследования показали, что получение указанного представления позволяет не только определить функцию $F_x(\xi)$, соответствующую стационарной компоненте, но и определить составляющие, соответствующие нестационарному поведению характеристики процесса при условии строгой периодичности его изменения во времени.

1. Частно-временное представление сигналов

Рассмотрим вещественный сигнал $x(t)$, заданный как функция текущего времени t и наблюдаемый на интервале времени $[0, T)$ конечной длительности T . Будем считать, что поведение сигнала за пределами исследуемого интервала не составляет предмета интереса на текущем этапе анализа.

Частно-временное распределение (ЧВР) сигнала на интервале $[0, T)$ формально задаётся следующим образом:

$$F_{x|[0, T)}(\xi) \triangleq \frac{1}{T} \int_0^T I(x(t) \leq \xi) dt = \frac{1}{T} \int_0^T u(\xi - x(t)) dt, \quad (2)$$

где $I(\bullet)$ – индикаторная функция, введённая в (1); $u(t)$ обозначает функцию Хэвисайда, или единичную ступенчатую функцию.

Частно-временная плотность (ЧВП) определяется формально как производная, в классическом или обобщённом смысле, частно-временного распределения (2) по его аргументу – переменной ξ . Формальная запись ЧВП имеет вид:

$$f_{x|[0, T)}(\xi) = \frac{dF_{x|[0, T)}(\xi)}{d\xi}. \quad (3)$$

Поскольку две переменные t и ξ рассматриваются как независимые, операция дифференцирования по ξ может быть внесена под знак операции интегрирования по t в выражении (2). Применение дифференцирования к функции Хэвисайда приводит к дельта-функции Дирака:

$$\frac{du(\xi - x(t))}{d\xi} = \delta(\xi - x(t)), \quad (4)$$

что позволяет составить формальную запись ЧВП в следующей форме:

$$f_{x[0,T]}(\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T \delta(\xi - x(t)) dt, \quad (5)$$

в которой необходимо отметить, что подынтегральным выражением является одномерная дельта-функция Дирака, зависящая от двух переменных: t и ξ .

Выражение (5) может быть рассмотрено как краткая формальная запись специального оператора, преобразующего сигнал $x(t)$, заданный на интервале $[0, T)$, в его ЧВП $f_{x[0,T]}(\xi)$ – функцию вещественной пороговой переменной ξ . Однако, следует отметить, что в представленной формальной записи подынтегральная функция $\delta(\xi - x(t))$ не задана в такой форме функции времени t , над которой было бы возможно провести интегрирование в явном виде. Сингулярная форма записи такого выражения существенно затрудняет его содержательную интерпретацию. Так, например, алгебраические манипуляции в работах [1, 3, 6] проводятся без его раскрытия и какой-либо демонстрации на примерах практических сигналов. Такой анализ имеет прикладной исследовательский интерес, поскольку он открывает возможность создания методов и алгоритмов цифровой обработки, предназначенных для практического использования, например, для оценивания плотности вероятности как это представлено в [7].

1.1 Анализ корней порогового уравнения

Представление ЧВП (5) предполагает интегрирование выражения, представленного дельта-функцией, в пределах интервала конечной длительности $[0, T)$. Поэтому будет удобно ввести модифицированную дельту-функцию, обозначаемую через

$$\delta_{[0,T]}(\xi - x(t)) = \delta(\xi - x(t)) \text{rect}\left(\frac{t - 0.5T}{T}\right) \quad (6)$$

с указанием интервала в нижнем регистре, который естественным образом ограничивает область носителя по переменной t посредством прямоугольной оконной функции.

Подстановка модифицированной дельта-функции (6) вместо исходной $\delta(\xi - x(t))$ в выражение (5) не приведёт к его изменению:

$$f_{x[0,T]}(\xi) = \frac{1}{T} \int_0^T \delta_{[0,T]}(\xi - x(t)) dt. \quad (7)$$

В соответствии со своим функциональным определением дельта-функция $\delta(\bullet)$ отлична от нуля только тогда, когда её аргумент, записанный в скобках, обращается в нуль. Для некоторого зафиксированного значения пороговой переменной ξ это приводит к пороговому уравнению

$$x(t) = \xi, \quad (8)$$

которое в общем случае может считаться алгебраическим уравнением относительно переменной t . В большинстве практически интересных случаев его решение может быть получено с требуемой точностью с использованием численных методов, а в некоторых случаях его удастся получить в форме аналитического выражения. Обозначим через $R_x(\xi)$ множество корней уравнения (8):

$$R_x(\xi) = \{t : x(t) = \xi\}. \quad (9)$$

Если при некотором значении ξ уравнение (8) не имеет корней, соответствующее ему множество $R_x(\xi)$ будет пустым \emptyset .

Принимая во внимание только те корни уравнения (8), которые лежат в интервале $[0, T)$, множество корней может быть $R_x(\xi)$ сокращено до множества $R_{x[0,T]}(\xi)$ операцией пересечения:

$$R_{x[0,T]}(\xi) = R_x(\xi) \cap [0; T). \quad (10)$$

Все корни, принадлежащие множеству $R_{x[0,T]}(\xi)$, представляют собой вещественные числа со стандартной топологией [8], которые могут быть отнесены к одному из двух важных в рамках текущего анализа типов точек: изолированным и неизолированным.

Точка $t_0 \in [0, T)$ называется *изолированным* корнем уравнения (8), если она удовлетворяет следующему условию:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall t \in (t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon): \left[t_0 \in R_{x[0,T]}(\xi) \right] \wedge \left[t \notin R_{x[0,T]}(\xi) \right], \quad (11)$$

в противном случае, корень называется *неизолированным*.

Все изолированные корни формируют подмножество $Rc_{x[0,T]}(\xi)$ множества $R_{x[0,T]}(\xi)$ корней уравнения (8): $Rc_{x[0,T]}(\xi) = \{t_{m[0,T]}(\xi)\}$, где обозначает m -й изолированный корень.

Свойство 1. Множество изолированных корней $Rc_{x[0,T]}(\xi)$ – счётное.

В силу этого оно имеет меру Лебега нуль:

$$\mu[Rc_{x[0,T]}(\xi)] = 0. \quad (12)$$

Множество $Ru_{x[0,T]}(\xi)$ неизолированных корней будет дополнением множества $Rc_{x[0,T]}(\xi)$ в множестве $R_{x[0,T]}(\xi)$: $Ru_{x[0,T]}(\xi) = R_{x[0,T]}(\xi) \setminus Rc_{x[0,T]}(\xi)$.

В зависимости от структуры множества корней $R_{x[0,T]}(\xi)$ возможным оказывается один из четырёх случаев – уравнение (8) на интервале $[0, T)$:

1) не имеет корней: $R_{x[0,T]}(\xi) = \emptyset$;

2) имеет только изолированные корни:

$$R_{x[0,T]}(\xi) = Rc_{x[0,T]}(\xi);$$

3) имеет только неизолированные корни $R_{x[[0, T]]}(\xi) = Ru_{x[[0, T]]}(\xi)$;

4) имеет как изолированные, так и неизолированные корни: $R_{x[[0, T]]}(\xi) = Ru_{x[[0, T]]}(\xi) \cup Ru_{x[[0, T]]}(\xi)$.

На рисунке 1 представлен пример некоторого непрерывного сигнала на интервале $[0, T)$, в рамках которого проиллюстрирован каждый из случаев, имеющий место при выборе подходящего значения пороговой переменной ξ , нижний индекс в записи которой соответствует номеру случая из списка выше.

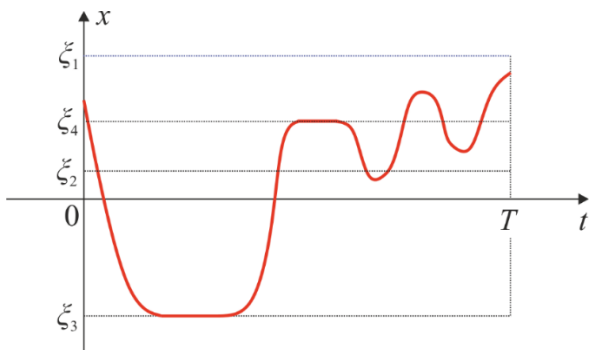


Рис. 1. Зависимость множества корней от выбора пороговой переменной

Большинство практически используемых сигналов при разных значениях пороговой переменной $\xi \in \mathbb{R}$ порождают различные случаи для множества корней $R_{x[[0, T]]}(\xi)$. Так, например, если сигнал $x(t)$ ограничен сверху:

$$\exists X_{\max} \forall t \in [0, T), x(t) < X_{\max} \quad (13)$$

или снизу:

$$\exists X_{\min} \forall t \in [0, T), x(t) > X_{\min}, \quad (14)$$

то непременно будут существовать такие значения ξ , для которых множество корней $R_{x[[0, T]]}(\xi)$ будет пустым (случай 1). Однако, такой сигнал $x(t)$, множества $R_{x[[0, T]]}(\xi)$ корней которого при всех $\xi \in \mathbb{R}$ были бы пустыми, т.е. все ξ соответствуют случаю 1, не может существовать, поскольку это бы означало отсутствие сигнала в сущностном смысле, а не равенство его нулю на интервале наблюдения. С другой стороны, оказывается возможным существование в принципе сигналов, которые при всех значениях порога $\xi \in \mathbb{R}$ формируют только такие множества корней $R_{x[[0, T]]}(\xi)$, которые соответствуют случаю 2. Однако такие сигналы представляют в большей степени теоретический интерес, поскольку они не будут ограничены сверху и снизу по значению.

Сигналы, которые порождают множества корней $R_{x[[0, T]]}(\xi)$, соответствующие только случаям 1 и 3, представляют собой известный класс сигналов с конечным числом возможных значений. Примерами могут служить сигналы с амплитудно-импульсной модуляцией, формируемые при использовании конечного алфавита сообщений, а также

сигналы непрерывного времени, квантованные по уровню.

Как следует из иллюстрации, представленной на рисунке 1, в наиболее простом, и в то же время интересном с практической точки зрения, случае неизолированными корням будут соответствовать некоторые интервалы времени ненулевой протяжённости, в пределах которых сигнал $x(t)$, остаётся постоянным.

Свойство 2. Множество таких значений пороговой переменной ξ , для которых мера Лебега $Ru_{x[[0, T]]}(\xi)$ строго положительна $\mu[Ru_{x[[0, T]]}(\xi)] > 0$, – счётное.

Обозначив каждое такое значение через $x_{k[[0, T]]}$, составим множество таких значений пороговой переменной ξ , которое обозначим $X_{[0, T)}$:

$$X_{[0, T)} \triangleq \{x_{k[[0, T]]} : \mu[Ru_{x[[0, T]]}(x_{k[[0, T]]})] > 0\}. \quad (15)$$

Необходимо отметить, что для обозначения указанного множества и его элементов намерено выбрана буква x , используемая для обозначения сигнала, потому что существование таких элементов и их фактические значения определяются формой сигнала и никак не зависят от выбора значения пороговой переменной ξ .

1.2 Явная форма частно-временной плотности

Рассмотренные выше свойства 1 и 2 позволяют перейти к новому представлению ЧВП (5) в форме выражения, содержащего явную функциональную зависимость от её аргументов:

$$\delta_{[0; T)}(\xi - x(t)) = \sum_m \frac{\delta(t - t_{m[[0, T]]}(\xi))}{|x'[t_{m[[0, T]]}(\xi)]|} + \sum_k I[t \in Ru_{x[[0, T]]}(x_{k[[0, T]]})] \delta(\xi - x_{k[[0, T]]}), \quad (16)$$

где $x'(t)$ обозначает значение производной сигнала в точке t , а индикаторная $I[t \in A]$ функция позволяет формально задать протяжённые интервалы времени, поскольку она обращается в единицу для тех t , которые принадлежат множеству A .

Следует обратить внимание, что первая сумма состоит из одномерных дельта-функций, аргументом которых выступает переменная времени t , а вторая сумма включает в себя одномерные дельта-функции, аргументом которых выступает пороговая переменная ξ . Таким образом удаётся добиться корректного разделения сложного аргумента, изначально представленного в записи дельта-функции (6).

Подстановка (16) в (7) делает возможным проведение интегрирования в явном виде, что позволяет получить следующее формальное выражение для ЧВП:

$$f_{x[[0, T]]}(\xi) = \frac{1}{T} \sum_m \frac{1}{|x'[t_{m[[0, T]]}(\xi)]|} + \frac{1}{T} \sum_k \mu[Ru_{x[[0, T]]}(x_{k[[0, T]]})] \delta(\xi - x_{k[[0, T]]}). \quad (17)$$

Заметим, что второе слагаемое в (17), представляющее дельта-функцию аргумента ξ , будет присутствовать только для таких значений пороговой переменной ξ , которые содержатся в множестве $X_{[0, T]}$ (15).

2. Пример нестационарного анализа частотно-временных характеристик сигнала

Для описания нестационарных свойств сигнала можно использовать характеристику, представляющую собой переменную индикаторную функцию (ПИФ):

$$\mathcal{I}_x(t, \xi) \triangleq I(x(t) \leq \xi) = u(\xi - x(t)), \quad (18)$$

где аргументы t и ξ обозначают соответственно текущее время и пороговое значение, используемое для сравнения значений сигнала. Наряду с ПИФ для описания нестационарных свойств сигнала может быть использовано *распределение «время-значение»* (РВЗ), или *time-value distribution (TVD)*. Формальная запись РВЗ для сигнала $x(t)$ непрерывного времени имеет вид:

$$TVD_x(t, \xi) \triangleq \frac{d\mathcal{I}_x(t, \xi)}{d\xi} = \delta(\xi - x(t)). \quad (19)$$

В том случае, если сигнал имеет циклостационарный характер, его РВЗ может быть выражена в форме обобщённого ряда Фурье:

$$TVD_x(t, \xi) = \sum_{\alpha \in A} f_x^{(\alpha)}(\xi) e^{j2\pi\alpha t}, \quad (20)$$

где A (альфа) – множество циклических частот РВЗ, а $f_x^{(\alpha)}$ – компонента РВЗ на циклической частоте α , которая может быть формально получена предельным усреднением:

$$f_x^{(\alpha)}(\xi) = \left\langle TVD_x(t, \xi) e^{-j2\pi\alpha t} \right\rangle_t. \quad (21)$$

Среди всех компонент традиционно особого внимания заслуживает компонента, соответствующая нулевой частоте $\alpha = 0$, которая является результатом предельного усреднения РВЗ и совпадает с ЧВП (5) при расширении интервала наблюдения сигнала до всей оси текущего времени:

$$f_x^{(0)}(\xi) = \left\langle TVD_x(t, \xi) \right\rangle_t = f_{x|\mathbb{R}}(\xi). \quad (22)$$

Непосредственное вычисление компонент $f_x^{(\alpha)}$ по формуле (21) при подстановке РВЗ (19) может оказаться затруднительным в силу того, что подынтегральное выражение оказывается неявной сингулярной функцией. Одним из путей упрощения данного преобразования является использование формулы (16), позволяющей перейти к записи функции (19) как функции переменной времени в явном виде.

2.1 Аналитическое распределение «время-значение» гармонического сигнала

Рассмотрим в качестве примера отыскание компонент РВЗ для гармонического сигнала

$$x(t) = A_x \cos(2\pi\nu_x t + \varphi_x), \quad (23)$$

где ν_x , A_x , φ_x обозначают соответственно его частоту, амплитуду и начальную фазу. Для упрощения вывода РВЗ положим начальную фазу φ_x нулевой, что можно сделать без потери общности, поскольку далее будет показано как свойство трансляции времени позволит учесть начальную фазу в финальном представлении ряда.

Формальная подстановка (23) в (19) позволяет получить непосредственное выражение для РВЗ гармонического сигнала:

$$\begin{aligned} TVD_x(t, \xi) &= \delta(\xi - x(t)) = \\ &= \delta(\xi - A_x \cos(2\pi\nu_x t)). \end{aligned} \quad (24)$$

Периодическая структура функции позволяет сделать предположение о возможности представлении РВЗ в форме ряда Фурье (20) с частотами $\alpha = k\nu_x$, $k \in \mathbb{Z}$. Первым шагом к построению этого ряда является определение области носителя РВЗ по аргументу ξ . Так условие

$$\forall \xi, |\xi| > A_x : TVD_x(t, \xi) = 0 \quad (25)$$

позволяет ограничить формальный анализ РВЗ только для случаев $|\xi| < A_x$, а при крайних значениях $|\xi| = A_x$, где производная $x'(t)$ обращается в нуль, результат может быть получен с помощью односторонних пределов.

Вторым шагом является применение формулы (16). Поскольку сигнал $x(t)$, заданный (23), не имеет плоских участков, его РВЗ будет состоять только из первой суммы:

$$\begin{aligned} TVD_x(t, \xi) &= \delta[\xi - x(t)] = \\ &= \sum_{t_0 \in R_x(\xi)} \frac{1}{|x'(t_0)|} \delta(t - t_0), \end{aligned} \quad (26)$$

где $R_x(\xi)$ обозначает множество всех изолированных корней, которые могут быть получены решением уравнения (8) для выбранного сигнала (23):

$$\begin{aligned} R_x(\xi) &= Rc_x(\xi) = \\ &= \left\{ t \mid t = \pm \frac{1}{2\pi\nu_x} \arccos\left(\frac{\xi}{A_x}\right) + \frac{n}{\nu_x}, n \in \mathbb{Z}, |\xi| \leq A, \right. \\ &\quad \left. \emptyset, |\xi| > A. \right. \end{aligned} \quad (27)$$

Абсолютное значение производной, используемое в (26), может быть выражено в явной форме с помощью дифференцирования (23) и последующей подстановки корней из множества (27):

$$\begin{aligned} |\xi| \leq A_x, t_0 \in R_x(\xi) : \\ |x'(t_0)| &= |-2\pi\nu_x A_x \sin(2\pi\nu_x t_0)| = \\ &= 2\pi\nu_x A_x \sqrt{1 - (\xi/A_x)^2} = 2\pi\nu_x \sqrt{A_x^2 - \xi^2}, \end{aligned} \quad (28)$$

а для значений $|\xi| > A_x$ значение производной не имеет смысла.

На третьем шаге зафиксируем некоторое значение пороговой переменной ξ и рассмотрим функцию $c_T(t; \xi)$:

$$c_T(t; \xi) \triangleq \delta(\xi - x(t)) = TVD_x(t, \xi), \quad (29)$$

которая может быть выражена в явной аналитической записи как функция аргумента t . Запись T в нижнем регистре подчёркивает факт, что функция (29) будет периодической с периодом $T_x = 1/\nu_x$, одинаковым для всех ξ . Это следует из структуры множества корней (27), где периодичность появляется в следствие отыскания общего вида решения тригонометрического уравнения [9].

Один период функции $c_T(t; \xi)$, заданный на интервале $[-T_x/2, T_x/2]$, обозначим через $c(t; \xi)$; он может быть выражен явно следующим образом:

$$c(t; \xi) = \frac{1}{\pi \nu_x \sqrt{A_x^2 - \xi^2}} \times \left[\frac{1}{2} \delta(t + t_0(\xi)) + \frac{1}{2} \delta(t - t_0(\xi)) \right] \text{rect}\left(\frac{\xi}{2A_x}\right), \quad (30)$$

где t_0 обозначает главный корень тригонометрического уравнения (8) с учётом (23), а именно:

$$t_0(\xi) = \frac{1}{2\pi \nu_x} \arccos\left(\frac{\xi}{A_x}\right). \quad (31)$$

Преобразование Фурье $c(t; \xi)$ по переменной t имеет вид:

$$C(\alpha; \xi) = \frac{1}{\pi \nu_x \sqrt{A_x^2 - \xi^2}} \times \cos\left(\frac{\alpha}{\nu_x} \arccos\left(\frac{\xi}{A_x}\right)\right) \text{rect}\left(\frac{\xi}{2A_x}\right), \quad (32)$$

где α обозначает циклическую частоту – переменную частотной области, парную текущему времени t .

Тогда k -й коэффициент ряда Фурье $C_T^{(k\nu_x)}(\xi)$ описывается выражением:

$$C_T^{(k\nu_x)}(\xi) = \nu_x C(k\nu_x, \xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{A_x^2 - \xi^2}} \cos\left(k \arccos\left(\frac{\xi}{A_x}\right)\right) \text{rect}\left(\frac{\xi}{2A_x}\right). \quad (33)$$

Второй множитель в выражении (33) представляет собой выражение хорошо известное в математическом анализе и может быть переписан как полином Чебышёва первого рода [10]:

$$\cos(k \arccos(\psi)) = T_{|k|}(\psi), \quad |\psi| \leq 1. \quad (34)$$

Окончательно разложение РВЗ (26) в ряд Фурье имеет вид:

$$TVD_x(t, \xi) = \delta(\xi - x(t)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_x^k(\xi) e^{j2\pi k \nu_x t}, \quad (35)$$

где $f_x^{k\nu_x}(\xi)$ – k -я компонента РВЗ, соответствующая частоте $\alpha = k\nu_x$,

$$f_x^k(\xi) = C_T^{(k\nu_x)}(\xi) = \frac{1}{A_x} f_{\cos}^k\left(\frac{\xi}{A_x}\right) \quad (36)$$

выражается с использованием нормированной функции

$$f_{\cos}^k(\psi) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \psi^2}} T_{|k|}(\psi) \text{rect}\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad (37)$$

аналитическое выражение которой не содержит непосредственно значений амплитуды A_x и частоты ν_x гармонического сигнала.

2.2 Анализ гармоник с произвольной начальной фазой

Введение ненулевой начальной фазы в гармонический сигнал (23) может быть эквивалентно представлено введением временного сдвига $\tau_x = -\varphi_x / 2\pi \nu_x$, что позволяет сформировать сигнал $y(t)$ как трансляцию $x(t)$:

$$y(t) = A_x \cos(2\pi \nu_x t + \varphi_x) = A_x \cos(2\pi \nu_x (t - \tau_x)) = x(t - \tau_x). \quad (38)$$

В соответствии со свойством ряда Фурье, каждая компонента РВЗ $y(t)$ получит дополнительный фазовый множитель по отношению к (36):

$$f_y^k(\xi) = \frac{1}{A_x} f_{\cos}^k\left(\frac{\xi}{A_x}\right) e^{jk\varphi_x}; \quad (39)$$

нулевая, или стационарная, компонента ($k = 0$) при этом не изменится.

2.3 Нормализованные компоненты ряда Фурье распределения «время-значение»

Рассмотрим подробнее общий вид функций, используемых для формальной записи нормированных компонент $f_{\cos}^k(\psi)$. Множитель $\text{rect}(\psi/2)$ выполняет в записи (37) роль ограничителя: при любом порядке k каждая из этих функций будет отлична от нуля только для $\psi \in [-1, 1]$, а для значений аргумента за пределами этого интервала функция принимает нулевые значения независимо от значений других множителей в её записи.

Полиномы Чебышёва первого рода $T_k(\psi)$ произвольного порядка – функции, которые осциллируют ограничено на интервале $[-1, 1]$:

$$\forall \psi \in [-1, 1]: |T_k(\psi)| \leq 1 \quad (40)$$

и достигают на границах этого интервала одного из значений $\{-1, 1\}$.

Графики первых шести компонент $f_{\cos}^k(\psi)$ представлен на рисунке 2. Среди всех компонентов отдельного внимания заслуживает нулевая ($k = 0$) компонента:

$$f_x^0(\xi) = \frac{1}{\pi \sqrt{1 - \psi^2}} \operatorname{rect}\left(\frac{\psi}{2}\right), \quad (41)$$

описывающая стационарную часть РВЗ, или ЧВП сигнала $x(t)$.

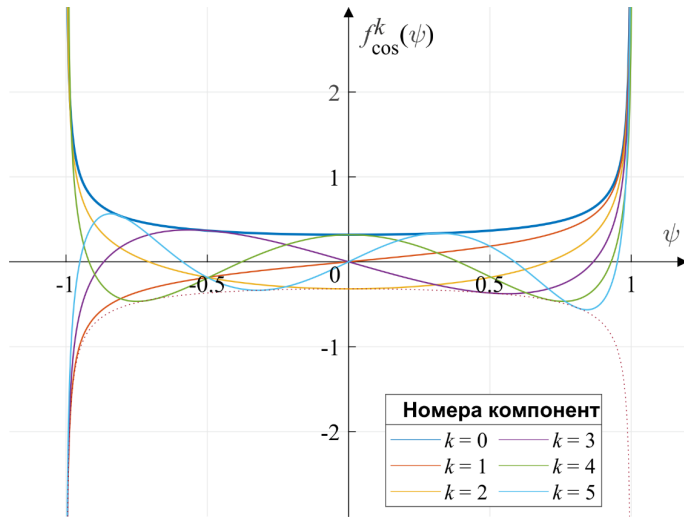


Рис. 2. Компоненты ряда Фурье распределения «время-значение» гармонического сигнала

Из общей формулы (37) и свойства (40) непосредственно следует тот факт, что нулевая компонента является мажорантой всех прочих компонент $f_{\cos}^k(\psi)$:

$$k \in \mathbb{Z}^* : |f_x^k(\xi)| \leq |f_x^0(\xi)|. \quad (42)$$

2.4 Компоненты ряда Фурье переменной индикаторной функции

Переменная индикаторная функция $\mathcal{I}_x(t, \xi)$ может быть представлена с помощью ряда Фурье аналогично тому, как это было сделано для РВЗ (35):

$$\mathcal{I}_x(t, \xi) = u(\xi - x(t)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} F_x^k(\xi) e^{j2\pi k \nu_x t}, \quad (43)$$

где компоненты $F_x^k(\xi)$ могут быть найдены как кумулятивные функции для компонент РВЗ $f_x^k(\xi)$:

$$F_x^k(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_x^k(\gamma) d\gamma = F_{\cos}^k\left(\frac{\xi}{A_x}\right), \quad (44)$$

в записи которых используется нормированная кумулятивная функция:

$$F_{\cos}^k(\psi) = \int_{-\infty}^{\psi} f_{\cos}^k(\gamma) d\gamma \quad (45)$$

Интегрирование компонент РВЗ, заданных аналитически выражением (37), позволяет выразить компоненты $F_{\cos}^k(\psi)$ в форме явных аналитических выражений:

$$F_{\cos}^k(\psi) = \begin{cases} \left[1 - \frac{1}{\pi} \arccos(\psi)\right] \operatorname{rect}(\psi/2) + u(\psi - 1), & k = 0, \\ -\frac{1}{\pi k} \sin(k \arccos(\psi)) \operatorname{rect}(\psi/2), & k \neq 0. \end{cases} \quad (46)$$

Шесть компонент $F_{\cos}^k(\psi)$ для значений индекса k от нуля до пяти представлены на графике на рисунке 3.

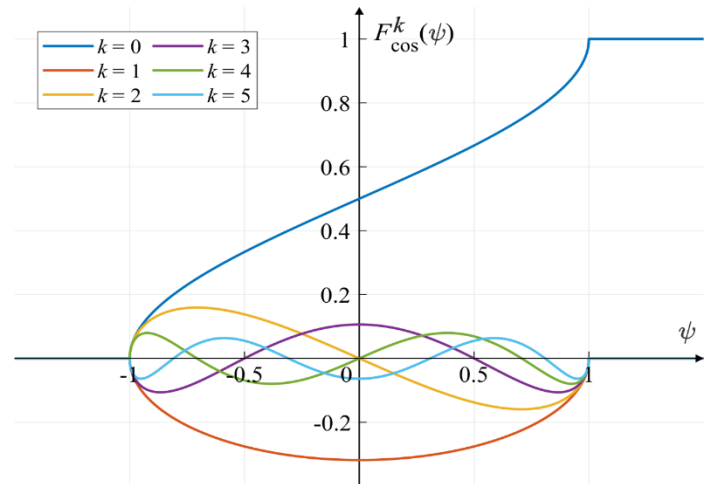


Рис. 3. Компоненты ряда Фурье переменной индикаторной функции гармонического сигнала

Следует обратить внимание на несколько свойств компонент $F_{\cos}^k(\psi)$. Так, стационарная компонента ($k = 0$) является неубывающей функцией, равна нулю вплоть до нижней границы интервала $[-1, 1]$ и достигает единицы на его верхней границе. Эта компонента имеет смысл эквивалентный функции распределения случайной величины и обладает всеми её свойствами. Компоненты для $k \geq 1$ представляют собой переменную часть в описании индикаторной функции (18) и не обладают свойствами стационарной компоненты. Так, с учётом (39) они могут вообще принимать комплексные значения, а на верхней границе интервала $[-1, 1]$ все компоненты $F_{\cos}^k(\psi)$, $k \neq 0$, обращаются в нуль. Формула (46) позволяет определить верхнюю границу для значений, принимаемых компонентами:

$$\psi \in [-1, 1] : |F_{\cos}^k(\psi)| \leq \frac{1}{\pi k}, \quad (47)$$

$$\text{или } \|F_{\cos}^k(\psi)\|_{\infty} = \frac{1}{\pi k}.$$

Дополнительно следует отметить, что верхняя граница компонент ПИФ убывает с ростом номера k .

Заключение

В настоящем исследовании был проведён анализ распределения время-значения, являющегося наряду с переменной

во времени индикаторной функцией одной из основных характеристик в рамках частно-временного подхода к описанию свойств случайных процессов. На основе формального анализа было получено аналитическое выражение для РВЗ, заданное в форме явной функции двух переменных – текущего времени и порога. Показано, что такая функция является обобщённой функцией, содержащей суммы не более чем счётного числа слагаемых, каждое из которых содержит одномерную дельта-функцию Дирака. Использование такого выражения позволяет существенно упростить интегрирование во времени при формировании частно-временной плотности – вероятностной характеристики, эквивалентной по физическому смыслу одномерной плотности вероятности стационарного эргодического случайного процесса. Однако, в рамках частно-временного подхода требование эргодичности не устанавливается, что позволяет распространить полученный результат на существенно более широкий класс случайных процессов.

Используемое в рамках частно-временного представления РВЗ по своему физическому смыслу является аналогом переменной во времени одномерной плотности вероятности, используемой для описания свойств нестационарных случайных процессов. На примере гармонического сигнала было показано, что для строго периодического процесса РВЗ может быть представлено с помощью ряда Фурье, аналогично тому, как это может быть выполнено для корреляционной функции циклостационарного в широком смысле случайного процесса. Для рассмотренного примера были найдены аналитические выражения членов ряда Фурье в форме явных функ-

ций пороговой переменной. Также был проведён анализ членов ряда Фурье в представлении переменной во времени индикаторной функции и установлены некоторые их свойства.

Литература

1. *Napolitano A.* Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. Academic Press. Elsevier. 2019. 626 p. DOI: 10.1016/C2017-0-04240-4.
2. *Gardner W.A., Spooner C.M.* The cumulant theory of cyclostationary time-series. I. Foundation // *IEEE Transactions on Signal Processing*. Vol. 42, no. 12. 1994, pp. 3387-3408. DOI: 10.1109/78.340775.
3. *Gardner W.A., Brown W.A.* Fraction-of-time probability for time-series that exhibit cyclostationarity // *Signal Processing*. Vol. 23, no. 3. 1991, pp. 273-292. DOI: 10.1016/0165-1684(91)90005-4
4. *Taboga M.* Lectures on Probability Theory and Mathematical Statistics, 3rd ed. USA, San Bernardino: CreateSpace, 2018. 670 p.
5. *Gardner W.A.* Statistical spectral analysis: A non-probabilistic theory. 1st ed. Prentice Hall. 1988. 591 p.
6. *Napolitano A., Gardner W.A.* Fraction-of-Time Probability: Advancing Beyond the Need for Stationarity and Ergodicity Assumptions // *IEEE Access*. Vol. 10. 2022, pp. 34591-34612. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3162620.
7. *Shevgunov T., Napolitano A.* Fraction-of-Time Density Estimation Based on Linear Interpolation of Time Series // *2021 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications*. Moscow, 2021. P. 1-4, DOI: 10.1109/IEEECONF51389.2021.9415991.
8. *Warner S.* Topology for beginners. USA: Get 800, 2019. 280 p.
9. *Выгодский М.Я.* Справочник по математике. М.: Астрель, 2010. 1055 с.
10. *Данилов Ю.А.* Многочлены Чебышева. Минск: Вышэйшая школа, 1984. 157 с.

THE SYNTHESIS OF EXPLICIT ANALYTICAL FORMULAE FOR THE PROBABILISTIC MODELS OF SIGNALS USING FRACTION-OF-TIME APPROACH

Timofey Ya. Shevgunov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
shevgunov@gmail.com

Abstract

The paper presents the development of the theoretical foundations of the fraction-of-time approach which allows one to carry out constructing the probabilistic model of a random process based on its singular realization where a priori information of its ergodic property is absent. The synthesis of the analytical expression for time-varying FOT density was conducted in the form of an explicit function depending on two variables, which was based on the detailed analysis of its implicit initial expression. The resultant form was shown to be the sum consisting of no more than countable number of summands containing one-dimensional Dirac delta functions. The explicit analytical representation led to a significant simplification of the subsequent integration in time, which was conducted for the evaluation of the stationary component of FOT describing the statistical property of the signal being analyzed. In addition, it is shown in the paper that the intermediate result of the conducted derivation, namely, the time-value distribution, plays an important role in constructing nonlinear probabilistic models of signals within the framework of the FOT approach. The Fourier series representation of the time-value distribution was obtained by the example of a monoharmonic signal, where the Fourier series coefficients are derived in the form of explicit functions of the threshold variable. The Fourier series representation with explicit Fourier coefficients was also obtained for the time-varying indicator function. The properties of the stationary components, which are related to zero cyclic frequency, of the time-value distribution and time varying indicator function were shown to be resembling the properties of probability density and cumulative distribution function describing one-dimensional random variable, while the components related to non-zero cyclic frequencies exhibit different properties. The models developed in the current research are aimed at developing new methods of estimating probabilistic characteristics of analyzed signals which in turn leads to the synthesis of new digital signal processing algorithms.

Keywords: cyclostationarity, fraction-of-time, FOT density, time-varying indicator function, time-value distribution.

References

1. A. Napolitano (2019). Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. Academic Press. Elsevier. 2019. 626 p. DOI: DOI: 10.1016/C2017-0-04240-4.
2. W.A. Gardner, C.M. Spooner (1994). The cumulant theory of cyclostationary time-series. I. Foundation. *IEEE Transactions on Signal Processing*. Vol. 42, no. 12, pp. 3387-3408. DOI: 10.1109/78.340775.
3. W.A. Gardner, W.A. Brown (1991). Fraction-of-time probability for time-series that exhibit cyclostationarity. *Signal Processing*. Vol. 23, no. 3, pp. 273-292. DOI: 10.1016/0165-1684(91)90005-4
4. M. Taboga (2018). Lectures on Probability Theory and Mathematical Statistics, 3rd ed. USA, San Bernardino: CreateSpace. 670 p.
5. W.A. Gardner (1988). Statistical spectral analysis: A non-probabilistic theory. 1st ed. Prentice Hall. 591 p.
6. A. Napolitano, W.A. Gardner (2022). Fraction-of-Time Probability: Advancing Beyond the Need for Stationarity and Ergodicity Assumptions. *IEEE Access*. vol. 10, pp. 34591-34612. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3162620.
7. T. Shevgunov, A. Napolitano (2021). Fraction-of-Time Density Estimation Based on Linear Interpolation of Time Series. *2021 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications*. Moscow. P. 1-4, DOI: 10.1109/IEEECONF51389.2021.9415991.
8. S. Warner (2019) Topology for beginners. USA: Get 800. 280 p.
9. M.Ya. Vygodskij (2010). Spravochnik po matematiki [Mathematic Handbook]. Moscow, Astrel'. 1055 p. (In Russian).
10. Yu.A. Danilov (1984). Mnogochleny Chebysheva [Chebyshev polynomials]. Minsk, Higher school. 157 p. (In Russian).

Information about author:

Timofey Ya. Shevgunov, Ph.D. (candidate of technical sciences), associate professor, Theoretical Radio Engineering department, Moscow Aviation Institute (National Research University) "MAI", Moscow, Russia