

ОЦЕНКА КОРРЕКТИРУЮЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОНСТРУКЦИЙ НА ОСНОВЕ БЛОЧНЫХ МАТРИЦ ПРИ ИСПРАВЛЕНИИ ПАКЕТОВ ОШИБОК

DOI: 10.36724/2072-8735-2025-19-11-23-32

Вересова Алина Максимовна,
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения, г. Санкт-Петербург,
Россия, a.veresova@guap.ru

Тюрликов Андрей Михайлович,
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения, г. Санкт-Петербург,
Россия, turlikov@guap.ru

Богатырев Владимир Анатольевич,
Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения, г. Санкт-Петербург,
Россия, vladimir.bogatyrev@gmail.com

Manuscript received 11 August 2025;
Accepted 14 October 2025

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003, "Фундаментальные основы построения помехозащищённых систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга"

Ключевые слова: коды с малой плотностью проверок на чётность, блочно-перестановочная конструкция, квазициклические коды, пакеты ошибок, каналы с памятью

В статье рассматривается задача оценки помехоустойчивости некоторых кодов с малой плотностью проверок на чётность, проверочная матрица которых составлена из блоков различной природы. Рассмотрен обобщённый подход к определению корректирующей способности кода для случая, когда ошибки представляют собой комбинацию пакетов и независимых ошибок заданной кратности, основанный на комбинаторном покрытии множества ошибочных позиций слова. Целью данной работы является анализ корректирующей способности ансамблей блочно-перестановочных кодов по сравнению с широко используемыми блочно-циркулянтными кодами, а также их известных подклассов для исправления однократных пакетов ошибок. Известно, что для всех этих конструкций максимально возможная длина исправляемого одиночного пакета строго меньше размера блока, таким образом, если размер блока и максимальная длина отличаются на единицу, такие коды оптимальны в рамках данных конструкций. Проведена экспериментальная оценка длины исправляемого одиночного пакета для кодов Гилберта, их детерминированного и вероятностного расширения, ансамбля блочно-циркулянтных кодов, а также ансамбля блочно-перестановочных кодов. Показано, что в ансамбле блочно-перестановочных кодов находятся оптимальные для блочных конструкций коды при любом размере блока. Этим свойством не обладают другие рассмотренные конструкции: для блочно-циркулянтных кодов, включая расширения кода Гилберта, оптимальные коды найдены лишь для нечётных значений размера блока. При этом вероятность выбора из ансамбля кода с максимальной корректирующей способностью выше для расширенного кода Гилберта, чем для общего блочно-циркулянтного кода. Рассмотренный детерминированный расширенный код Гилберта показывает сравнительно небольшую корректирующую способность и оптимален только при простых значениях размера блока. Результаты работы могут быть использованы для построения кодовых схем и повышения достоверности передачи в каналах со сложной структурой шума, описываемой группированными ошибками.

Информация об авторах:

Вересова Алина Максимовна, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Кафедра инфокоммуникационных технологий и систем связи, старший преподаватель, г. Санкт-Петербург, Россия. ORCID 0000-0002-3792-9249

Тюрликов Андрей Михайлович, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Кафедра инфокоммуникационных технологий и систем связи, заведующий кафедрой, профессор, доктор технических наук, г. Санкт-Петербург, Россия. ORCID 0000-0001-7132-094X

Богатырев Владимир Анатольевич, Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения, Кафедра информационной безопасности, профессор, доктор технических наук, г. Санкт-Петербург, Россия. ORCID 0000-0003-0213-0223

Для цитирования:

Вересова А.М., Тюрликов А.М., Богатырев В.А. Оценка корректирующей способности конструкций на основе блочных матриц при исправлении пакетов ошибок // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2025. Том 19. №11. С. 23-32.

For citation:

A. M. Veresova, A. M. Turlikov, V. A. Bogatyrev, "Estimation of burst error correcting capability for code constructions based on matrices from blocks", T-Comm, 2025, vol. 19, no.11, pp. 23-32. (in Russian)

Введение

С развитием современных систем инфокоммуникаций к ним предъявляются всё возрастающие требования к их надёжности, производительности и помехоустойчивости. Задача повышения вероятности безошибочной передачи сообщений решается комбинированием методов с использованием обратной связи (там, где это возможно) и непосредственного (прямого) исправления ошибок на приёмнике без переспроса. В первом случае требуется механизм обнаружения некорректно принятых пакетов, что решается обычно с помощью добавления контрольной суммы, вычисленной на основе циклического избыточного кода (CRC, cyclic redundancy check), и при необходимости осуществляется переспрос и повторная передача ошибочного пакета, либо, в гибридном режиме, дополнительной избыточности для новой попытки коррекции [1, 2]. Эти методы используются на канальном или транспортном уровнях сети. Во втором случае используется помехоустойчивый код, делающий попытку исправления ошибок в принятых на физическом уровне сети символов [3, 4]. В данной статье рассматривается задача прямого исправления ошибок.

Для построения эффективных методов помехоустойчивого кодирования и декодирования требуется использование адекватной модели искажения информации в канале связи. К. Шенноном было показано существование предельной величины скорости безошибочной передачи, называемой пропускной способностью канала, зависящей только от свойств канала и при которой возможно обеспечить сколь угодно малую вероятность ошибки. Необходимо отметить, что под каналом связи здесь понимается именно математическая модель, описывающая переходные вероятности между входными и выходными последовательностями или символами.

Классическая теория помехоустойчивого кодирования обычно рассматривает модели, в которых ошибки происходят независимо. Современные методы кодирования предлагают классы кодов с вычислительно эффективными декодерами, практически вплотную подходящие к пропускной способности каналов с независимыми ошибками – в первую очередь, канала с аддитивным белым гауссовским шумом. В этой связи следует в первую очередь отметить классы полярных кодов [5-7] и кодов с малой плотностью проверок на чётность (МППЧ) [8; 9].

Однако модели с независимыми ошибками зачастую неадекватны процессам, приводящим к искажению символов в реальных каналах связи. Современным подходом для адаптации таких моделей к практическим ситуациям является использование перемежения, что приводит к увеличению задержек обработки информации как на передатчике, так и на приёмнике, однако помимо этого, известно, что такая адаптация увеличивает разрыв между практическими характеристиками надёжности и теоретическими, задаваемыми пропускной способностью канала. Таким образом, дальнейшее улучшение характеристик систем связи возможно, если система помехоустойчивого кодирования ориентирована на исправление ошибок, специфичных для канала связи.

Статистическая зависимость ошибок в канале обычно называется памятью, и приводит к формированию сгруппированных ошибок, называемых пакетами [3, 10, 11]. В теории кодирования классическими подходами для исправления

пакетов ошибок являются коды Рида-Соломона, использование которых приводит к сравнительно вычислительно ёмким процедурам декодирования в не двоичных полях, циклические коды Файра, которые являются высокоскоростными и не обладают достаточной гибкостью в выборе параметров, или использование итеративных конструкций, также вычислительно ресурсозатратных и недостаточно гибких [12, 13]. В последние годы рассматривались возможности исправления пакетов ошибок с помощью полярных кодов [14, 15], а также МППЧ-кодов [16-18]. Однако в этих статьях мало внимания уделено анализу корректирующих свойств соответствующих кодовых конструкций и в основном рассматриваются методы декодирования и связанные с ними вероятности ошибки. Кроме того, не анализируется конструкция МППЧ-кодов, основанная на произвольных перестановках.

В настоящей статье рассматривается корректирующая способность некоторых наиболее интересных классов МППЧ-кодов, основанных на блоках перестановок. Статья организована следующим образом. Так как описание векторов ошибок сложной структуры, а также само понятие корректирующей способности кода при исправлении таких ошибок не является общепринятым, сначала вводится понятие обобщённой корректирующей способности, на основании которого формулируется критерий помехоустойчивости как максимальной длины исправляемого пакета при заданных кратностях пакетов и независимых ошибок. Далее проводится экспериментальная оценка максимальной длины исправляемого одиночного пакета для блочно-циркулянтных кодов, их подклассов: кодов Гилберта, детерминированных и вероятностных расширенных кодов Гилберта, а также для блочно-перестановочных кодов общего вида.

Обобщённая корректирующая способность линейного кода

Линейный (n, k) -код представляет собой k -мерное подпространство n -мерного линейного векторного пространства над конечным полем, далее мы ограничимся рассмотрением только двоичных кодов. Базис \mathbf{G} этого пространства – $(k \times n)$ -матрица полного ранга – называется порождающей матрицей, а базис \mathbf{H} ортогонального пространства – проверочной матрицей. Матрица \mathbf{H} имеет размерность $r \times n$, где $r = n - k$ – число избыточных символов, и для неё выполняется $\mathbf{GH}^T = \mathbf{0}$. Линейный код может быть задан как с помощью порождающей, так и с помощью проверочной матрицы. Необходимо отметить, что для классов МППЧ-кодов, рассматриваемых далее, проверочная матрица часто имеет дополнительные линейно зависимые строки, что обусловлено её конструкцией, таким образом, число избыточных символов кода $r = \text{rank } \mathbf{H}$ несколько меньше количества строк в \mathbf{H} , этой разницей мы будем пренебрегать.

При исправлении независимых ошибок важнейшей характеристикой помехоустойчивости является количество исправляемых ошибок t , которое часто характеризуется величиной минимального расстояния Хемминга $d_0 = 2t + 1$ рассматриваемого кода. Определить корректирующую способность (или минимальное расстояние) можно как по порождающей матрице, используя некоторый вариант перебора по кодовым словам, так и по проверочной матрице.

Если минимальный вес Хэмминга кодового слова \mathbf{a} равен $W(\mathbf{a}) = d_0$, то в проверочной матрице имеется комбинация из d_0 линейно зависимых столбцов, и любые $d_0 - 1$ столбцов линейно независимы. С точки зрения корректирующей способности, это означает, что никакие две комбинации из t столбцов не должны давать одинаковый синдром, то есть любые $2t$ столбцов проверочной матрицы образуют подматрицу полного ранга. Таким образом, процедура определения корректирующей способности кода может заключаться в нахождении максимального значения t , для которого ранг всех возможных подматриц из $2t$ столбцов является полным.

На основании этого легко можно получить, что $d_0 \leq n - k + 1 = r + 1$, и это неравенство известно как граница Синглтона. Однако такой перебор экспоненциален, и более того, определение минимального расстояния кода в общем случае – NP-трудная задача. Заметим, что параметр корректирующей способности t следует рассматривать в следующем смысле: код может исправить любую комбинацию из не более, чем t ошибок, но также некоторые комбинации из более чем t ошибок – конкретный набор этих комбинаций определяется стандартной расстановкой кода [3]. Таким образом, параметр t (или d_0) – это удобный (и реализуемый на практике) способ задания подмножества векторов ошибок, исправляемых кодом, задание же всех таких векторов имеет экспоненциальную сложность.

В случае каналов с памятью дискретная модель ошибок обычно подразумевает введение понятия пакета ошибок. Есть разные подходы к определению пакета ошибок, самым простым из которых является определение пакета как подвектора в векторе ошибок \mathbf{e} , чьи позиции расположены от первого до последнего ненулевого элемента \mathbf{e} , и длина пакета равна длине этого подвектора. При такой трактовке пакет всегда начинается и всегда заканчивается ненулевым элементом. Существуют и другие подходы к определению пакета ошибок. В частности, такое определение не может быть обобщено на случай многократных пакетов, а также компандных ошибок, сочетающих пакеты и независимые ошибки. Зададим определение структуры вектора ошибки на основе подхода Э. М. Габидулина, использованного при задании класса комбинаторных метрик [19]. Пусть $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ – множество номеров позиций вектора из n элементов, тогда носитель вектора $\text{supp}(\mathbf{e}) = \{i \mid e_i \neq 0, i \in \mathbb{N}_n\}$ – множество ненулевых позиций вектора \mathbf{e} .

Для некоторого множества A будем говорить, что оно покрывает вектор ошибки \mathbf{e} , если $\text{supp}(\mathbf{e}) \subseteq A$, т.е. все ненулевые позиции \mathbf{e} содержатся в A . Рассмотрим множество $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots, A_s\}$, $A_i \subseteq \mathbb{N}_n$ такое, что $\bigcup_{i=1}^s A_i = \mathbb{N}_n$. Пусть для некоторого b

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_b &= \{B_1, B_2, \dots, B_{n-b+1}, T_1, T_2, \dots, T_n\}, \\ A_1 &= B_1 = \{1, 2, \dots, b\}, \\ A_2 &= B_2 = \{2, 3, \dots, b+1\}, \\ &\dots, \\ A_{n-b+1} &= B_{n-b+1} = \{n-b+1, n-b+2, \dots, n\}, \\ A_{n-b+2} &= T_1 = \{1\}, \\ A_{n-b+3} &= T_2 = \{2\}, \\ &\dots, \\ A_{2n-b+1} &= T_n = \{n\}, \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $s = 2n - b + 1$ и дополнительные обозначения подмножеств B_i и T_i введены для удобного соответствия пакетам и независимым ошибкам.

Будем считать, что величина $z = \{0, 1\}$ принимает значения нуля и единицы булеана A , т.е. справедливо $0A = \emptyset$ и $1A = A$. Пусть $\mathcal{Z} = (z_1, z_2, \dots, z_s)$, $z_i \in \{0, 1\}$, и для $1 \leq i \leq j \leq n$ обозначим через $z_i^j = (z_i, z_{i+1}, \dots, z_j)$ подвектор \mathcal{Z} из подряд идущих элементов от i до j . Далее, пусть $Z_1 = z_1^{n-b+1}$, $Z_2 = z_{n-b+2}^s$. Тогда будем говорить, что вектор ошибки \mathbf{e} образован b_n -кратными пакетами длиной b и t_n -кратными независимыми ошибками, если существует такой вектор $\mathcal{Z} = (Z_1 \mid Z_2)$, где $W(Z_1) = b_n$, $W(Z_2) = t_n$, для которого

$$\text{supp}(\mathbf{e}) \subseteq \bigcup_{i=1}^s z_i A_i = \left[\bigcup_{i=1}^{n-b+1} z_i B_i \right] \cup \left[\bigcup_{i=n-b+2}^s z_i T_i \right] = \left[\bigcup_{i \in \text{supp}(Z_1)} B_i \right] \cup \left[\bigcup_{i \in \text{supp}(Z_2)} T_i \right], \quad (2)$$

другими словами, если все ненулевые позиции вектора ошибки \mathbf{e} могут быть покрыты набором из не более, чем b_n множеств B_i (пакетов длиной, не превышающей b) и t_n множеств T_i (независимых одиночных ошибок), причём эти множества могут пересекаться. Заметим, что при заданном правиле (1) построения множеств B_i и T_i одному и тому же вектору ошибок могут соответствовать разные покрытия, т.е. разные векторы \mathcal{Z} . Например, носителем вектора $\mathbf{e} = (0010100)$ является $\text{supp}(\mathbf{e}) = \{3, 5\}$. При $b = 2$, $b_n = 1$, $t_n = 1$ это множество является подмножеством как объединения $B_3 \cup T_5$, так и $T_3 \cup B_5$, существуют и другие варианты объединений, дающих покрытие.

Таким образом, рассмотренное множество \mathcal{A}_b не может быть использовано для введения нормы вектора и меры расстояния (метрики), как это делал Э. М. Габидулин для других вариантов задания \mathcal{A} в [19], в связи с тем, что как норма, так и расстояние являются функциями, а отображение из \mathbf{e} в \mathcal{Z} неоднозначно. Более того, для некоторых векторов \mathbf{e} вообще не существует вектора \mathcal{Z} , для которого выполнялось бы (2). Обозначим через $\mathcal{Z}(\mathbf{e}, b_n, t_n, \mathcal{A}_b)$ множество векторов \mathcal{Z} , для которых выполняется (2) для заданных \mathbf{e} , b_n , t_n , \mathcal{A}_b (это означает и задание b).

Таким образом, (2) может рассматриваться как задача распознавания, результатом которой является ответ «да» или «нет» на вопрос: «является ли множество $\mathcal{Z}(\mathbf{e}, b_n, t_n, \mathcal{A}_b)$ непустым?». Данная задача может быть основой для определения обобщённой корректирующей способности кода, так как, как мы видели ранее, корректирующая способность задаёт некоторое подмножество исправляемых вектором ошибок.

Тогда обобщённая корректирующая способность кода может быть задана как параметр, определяющий при фиксированных b_n , t_n , и \mathcal{A}_b множество из всех таких векторов ошибок \mathbf{e} , для которых задача распознавания (2) имеет ответ «да» и все такие векторы лежат в разных смежных классах (и следовательно, исправляются кодом).

Очевидно, такое множество векторов ошибок может формировать некоторое подмножество лидеров смежных классов. Например, при $b_n = 0$ множество \mathcal{A}_b не зависит от b и состоит из $\mathcal{A} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$, и $\mathcal{Z}(\mathbf{e}, 0, t_n, \mathcal{A}) \neq \emptyset$ для любого \mathbf{e} , для которого $W(\mathbf{e}) \leq t_n$, тогда максимально возможное t_n , при котором задача распознавания (2) имеет ответ «да» только для векторов из разных смежных классов, совпадает с рассмотренной ранее «классической» корректирующей способностью кода при исправлении независимых ошибок.

Пусть теперь $t_n = 0, b_n = 1$, тогда $\mathcal{A}_b = \{B_1, B_2, \dots, B_{n-b+1}\}$, и $\mathcal{Z}(\mathbf{e}, 1, 0, \mathcal{A}_b) \neq \emptyset$ для всех векторов, образующих однократный пакет длиной, не превышающей b . Максимизация по b даст «классическую» пакетную корректирующую способность, т.е. максимальную длину произвольного пакета, исправляемого кодом.

В зависимости от решаемых задач, можно фиксировать одни параметры из набора b_n, t_n, \mathcal{A}_b и определять через них другие. Мы будем рассматривать вариант, при котором для заданных b_n и t_n , т.е. кратностях пакетов и независимых ошибок, максимизируется длина исправляемого пакета.

Пусть $\mathcal{E}(b_n, t_n, \mathcal{A}_b) = \{\mathbf{e} : \mathcal{Z}(\mathbf{e}, b_n, t_n, \mathcal{A}) \neq \emptyset\}$ – множество векторов, для которых задача (2) имеет ответ «да». Пусть \mathcal{C} – линейный (n, k) -код с проверочной матрицей \mathbf{H} . Любые два вектора \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 не могут быть (одновременно) исправлены кодом тогда и только тогда, когда $\mathbf{e}_1 \mathbf{H}^T = \mathbf{e}_2 \mathbf{H}^T$. Пусть

$$\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(b_n, t_n, \mathcal{A}_b) = \{\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots\} \subseteq \mathcal{E}(b_n, t_n, \mathcal{A}_b) : (\forall i \neq j) \mathbf{e}_i \mathbf{H}^T \neq \mathbf{e}_j \mathbf{H}^T\}$$

– множество таких векторов из $\mathcal{E}(b_n, t_n, \mathcal{A}_b)$, которые лежат в разных смежных классах стандартной расстановки кода \mathcal{C} . Тогда обобщённой (или совместной) (b_n, t_n) -корректирующей способностью кода будем называть величину

$$b_0 = \max_{\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(b_n, t_n, \mathcal{A}_b) \neq \emptyset} \{b\},$$

т.е. максимальную длину пакета b_0 , при которой все векторы, образующие b_n -кратные пакеты длиной b_0 и t_n -кратные независимые ошибки, лежат в разных смежных классах.

Процедура определения b_0 может быть построена, используя идеи, описанные ранее для определения корректирующей способности кода по проверочной матрице. В случае однократных пакетов, аналогично исправлению независимых ошибок, способность кода исправить одиночный пакет длиной b означает, что любые два набора из b подряд идущих столбцов проверочной матрицы образуют подматрицу полного ранга, и процедура также заключается в определении ранга всех возможных подматриц соответствующей конфигурации. Вычислительная сложность такой процедуры полиномиальна. Максимальная длина исправляемого пакета удовлетворяет границе Рейгера: $b \leq (n - k) / 2 = r / 2$.

Легко обобщить описанные ранее процедуры для определения совместной корректирующей способности. Никакие два вектора \mathbf{e}_i и \mathbf{e}_j , входящие в $\mathcal{E}_{\mathcal{C}}(b_n, t_n, \mathcal{A}_b)$, не могут иметь одинаковый синдром, это эквивалентно тому, что

подматрица, составленная из столбцов с номерами носителя вектора $\mathbf{e}_i \oplus \mathbf{e}_j$, не может иметь линейно зависимые столбцы, т.е. должна иметь полный ранг. Это можно проверить, рассматривая ранги подматриц из $2b_n$ блоков по b подряд идущих столбцов (для некоторого заданного b) и $2t_n$ отдельных стоящих столбцов и максимизируя b при условии отсутствия подматриц неполного ранга.

Алгоритм и некоторые результаты его выполнения приведены в [20], приведём здесь псевдокод алгоритма для полноты изложения. В псевдокоде используются следующие обозначения. Пусть \mathbf{H} – проверочная матрица кода, b_n и t_n – кратности пакетов и отдельных ошибок, соответственно, b – некоторое натуральное число. Обозначим через $H_{2b_n}^{(b)}$ множество возможных позиций $2b_n$ пакетов длиной b , каждый пакет включает в себя b подряд идущих номеров позиций от 1 до n . Для ускорения работы алгоритма можно считать, что эти множества не пересекаются, т.е. пакеты не накладываются друг на друга – это включает в себя их пересечение как частный случай, но уменьшает число шагов алгоритма. Далее, пусть T_{2t_n} – множество из $2t_n$ произвольных позиций, не вошедших в $H_{2b_n}^{(b)}$. Наконец, через $\mathbf{H}(\alpha, \beta)$ обозначим подматрицу проверочной матрицы \mathbf{H} , составленную из столбцов с номерами из объединения множеств α и β . Псевдокод алгоритма приведён ниже.

ПРОЦЕДУРА $b_0 = \text{FindBMax}(b, \mathbf{H}, b_n, t_n)$

ВХОД: величина $b \geq b_0$, проверочная $(r \times n)$ матрица \mathbf{H} , кратность пакетов b_n , кратность ошибок t_n

ВЫХОД: обобщённая корректирующая способность b_0 кода.

1. Если $b = 0$, вернуть 0.
2. Для всех $\alpha \in H_{2b_n}^{(b)}$
3. Для всех $\beta \in T_{2t_n}$
4. Если $\text{rank}(\mathbf{H}(\alpha, \beta)) < 2(b_n b + t_n)$
5. Вернуть $b_0 = \text{FindBMax}(b - 1, \mathbf{H}, b_n, t_n)$.
6. Вернуть b .

Алгоритм. Определение обобщённой корректирующей способности линейного кода

Как можно видеть из приведённого псевдокода, алгоритм состоит в вызове рекурсивной процедуры, которой передаётся некоторое начальное значение b , являющееся верхней границей для b_0 , и при каждом рекурсивном вызове значение b уменьшается на единицу, пока не станет равным b_0 – тогда условие в строке 4 внутри циклов в строках 2 и 3 никогда не выполнится, это свидетельствует о том, что текущее значение $b = b_0$.

Процедура идёт от большего значения b к меньшему, так как можно ожидать, что при больших $b > b_0$ мы достаточно быстро будем находить подматрицы неполного ранга и переходить к следующему значению b . Конечно, максимально возможным значением для b является n , но для ускорения работы алгоритма желательно приблизить значение b к искомому b_0 , гарантированно сохраняя условие верхней границы. Воспользуемся для этого некоторой модификацией известных границ корректирующей способности.

С точки зрения границ Синглтона и Рейгера, максимальные значения корректирующей способности t и b (для

однократных пакетов) одинаковы, поскольку в одном случае рассматриваются комбинации из $2t$, а в другом – из $2b$ столбцов проверочной матрицы, а максимальный ранг подматрицы \mathbf{H} не может быть больше, чем $\text{rank } \mathbf{H} = r = n - k$. Это сразу даёт границы $2t \leq r$ и $2b \leq r$, что и соответствует границам Синглтона и Рейгера.

В случае совместной корректирующей способности, т.к. мы рассматриваем подматрицы из двух наборов комбинаций b_n пакетов длиной b и t_n ошибок, они содержат $2b_n b + 2t_n$ столбцов, и можно получить обобщённую границу Рейгера: $2b_n b + 2t_n \leq r$. Верхней границей длины пакета в таком случае будет значение

$$b_0 \leq \frac{r - 2t_n}{2b_n}.$$

Величину в правой части неравенства можно использовать как начальное значение b при первом вызове вышеприведённой рекурсивной процедуры. Вычислительная сложность алгоритма определения совместной корректирующей способности определена в работе [20], она зависит от рассматриваемых параметров и полиномиальна при небольших значениях b_n и t_n .

Оценка корректирующей способности блочно-перестановочного кода

Используя подходы, описанные в предыдущем разделе, проведём оценку корректирующей способности некоторых важных классов кодов. Ограничимся рассмотрением наиболее распространённого случая исправления однократных пакетов, т.е. $t_n = 0$, $b_n = 1$.

Одними из широко используемых сегодня кодов являются коды с малой плотностью проверок на чётность (МППЧ). В современных системах связи наибольшее распространение получила конструкция низкоплотных кодов, основанная на блоках — перестановках единичной матрицы. Такие коды описываются при помощи проверочной матрицы \mathbf{H} вида

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{11} & \mathbf{C}_{12} & \cdots & \mathbf{C}_{1\rho} \\ \mathbf{C}_{21} & \mathbf{C}_{22} & \cdots & \mathbf{C}_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_{\gamma 1} & \mathbf{C}_{\gamma 2} & \cdots & \mathbf{C}_{\gamma\rho} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

состоящей из $\gamma \times \rho$ блоков. Каждый блок представляет собой $(m \times m)$ -двоичную матрицу, таким образом, длина кода равна $n = \rho m$, а число проверочных символов r несколько меньше числа строк γm в (3), т.к. матрица вида (3) имеет линейно зависимые строки. Обычно при исправлении независимых ошибок используется блочно-циркулянтная конструкция (БЦК), где каждый блок – некоторая степень циркулянта с генератором единичного веса, что совпадает с матрицей циклической перестановки. Такая конструкция задаёт квазидвоичный код и позволяет упростить процедуры кодирования и декодирования. Иногда рассматривают также циркулянты с генератором большего веса, однако практически во всех современных стандартах связи, использующих МППЧ-коды, в качестве блоков используются матрицы циклической

перестановки, и мы также будем рассматривать только такой вариант БЦК.

Более компактно матрица (3) в случае БЦК может быть представлена с помощью так называемой базовой $(\gamma \times \rho)$ матрицы:

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1\rho} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2\rho} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{\gamma 1} & p_{\gamma 2} & \cdots & p_{\gamma\rho} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

здесь p_{ij} – целое число от 0 до $m - 1$, представляющее собой степень матрицы циклической перестановки, $\mathbf{C}_{ij} = \mathbf{C}^{p_{ij}}$.

Известны также конструкции на основе использования более общей блочно-перестановочной конструкции (БПК), в которой блоки – перестановки столбцов единичной матрицы общего вида. Очевидно, БЦК является подклассом БПК. Выбор конкретных блоков, как правило, определяется с помощью интенсивного компьютерного моделирования, возможно, направленного при помощи некоторых, порой достаточно сложных эвристик. Некоторые из них используют анализ структуры матрицы и связанного с ней графа Таннера, а также весовые распределения строк и столбцов проверочной матрицы, и для улучшения структуры матрицы иногда используется маскирование матрицы (3) нулевыми блоками.

Как правило, для эффективного исправления независимых ошибок проверочные матрицы должны включать большое число блоков. Обычно число блоков γ в столбце (3) не менее четырёх, и может достигать нескольких десятков, как, например, в кодах стандарта мобильной связи 5G. Число блоков в строке ρ определяется скоростью кода R и может быть примерно оценено как $\rho = \gamma / (1 - R)$.

Возможность применения блочно-циркулянтной конструкции для исправления однократных пакетов ошибок рассматривалась в [21], где было показано, что если не используется маскирование нулевыми блоками, длина однократного исправляемого пакета b_0 не превышает величину $m - 1$. Следовательно, с учётом границы Рейгера $b_0 \leq r/2$ при выборе кодов БЦК для исправления пакетов ошибок информационная избыточность используется более эффективно, если число блоков невелико. Указанная верхняя граница $b_0 \leq m - 1$ справедлива и для БПК.

При наименьшем значении $\gamma = 2$ известны коды Гилберта, являющиеся подклассом БЦК и базовая матрица (4) которых имеет вид

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & \rho - 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Важно отметить, что в конструкции (5) матрица циклической перестановки \mathbf{C} получена циклическим сдвигом столбцов единичной матрицы влево. Это имеет большое значение для исправления пакетов ошибок, так как при использовании сдвига вправо корректирующая пакетная способность этих кодов резко ухудшается. Это связано с тем, что корректирующая способность кода при исправлении пакетов ошибок связана с подматрицами из подряд идущих столбцов, и если при исправлении независимых ошибок использование эквивалентных МППЧ-кодов, т.е. отличающихся перестановкой

координат кодового слова или столбцов проверочной матрицы, не влияет на дистанционные и спектральные характеристики кода, а также на обычно рассматриваемые структуры графа Таннера, в случае пакетов ошибок эквивалентные коды могут обладать принципиально разными свойствами.

Корректирующая способность кодов Гилберта при исправлении однократных пакетов ошибок может быть вычислена аналитически с помощью процедуры, описанной в [22]. При $\rho = 3$ длина исправляемого пакета $b = m - 1$, и такие коды лежат на границе Рейгера. Однако с ростом параметра ρ корректирующая способность кодов Гилберта уменьшается примерно линейно до значения около $m/2$, и начиная со значений $\rho \approx m/2$ не изменяется. Корректирующая способность кодов Гилберта для некоторых значений m приведена на рисунке 1.

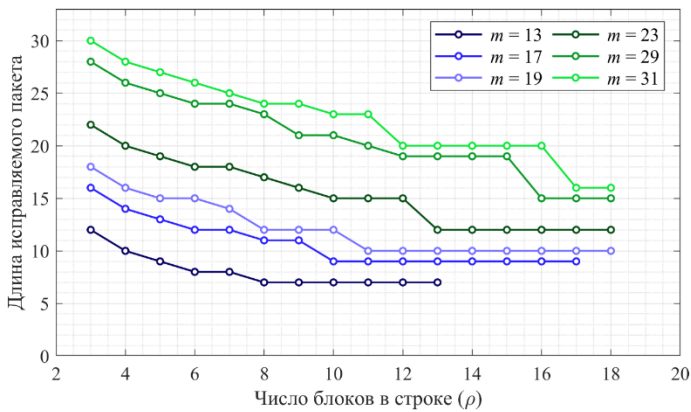


Рис. 1. Корректирующая способность кодов Гилберта при исправлении однократных пакетов

В [23] предложено обобщение кодов Гилберта для $\gamma = 3$. Базовая матрица таких кодов имеет вид

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \rho-2 & \rho-1 \\ \rho-1 & \rho-2 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

Заметим, что конструкции (5) и (6) детерминированы в том смысле, что для заданных параметров ρ и m существует ровно один код Гилберта и его обобщение для $\gamma = 3$.

Конструкция (5) может быть также обобщена до вероятностного ансамбля кодов с базовой матрицей

$$\mathbf{H}_b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \rho-2 & \rho-1 \\ p_0 & p_1 & \dots & p_{\rho-2} & p_{\rho-1} \end{bmatrix}, \quad (7)$$

где $\{p_0, p_1, \dots, p_{\rho-1}\}$ – случайная перестановка чисел от 0 до $\rho - 1$, с условием, что $p_{i+1} - p_i \neq 1$ ни для какого $i = 0, \dots, \rho - 2$.

Доказано, что для простых m коды (5) и (6) всегда исправляют пакеты длиной до $m - 1$, что является наилучшей возможной корректирующей способностью для БЦК относительно размера блока, однако для составных значений m корректирующая способность данных кодов неизвестна.

Проведём экспериментальный анализ корректирующей способности при исправлении однократных пакетов для следующих классов кодов:

- расширенные коды Гилберта (6) и (7) с разными размерами блоков (при представлении результатов экспериментов будем обозначать эти классы кодов через 3-Gilb и 3-Gilb Perm, соответственно);
- вероятностный ансамбль блочно-циркулянтных кодов со случайными базовыми матрицами (4) (обозначим этот класс как ВСС);
- вероятностный ансамбль блочно-перестановочных кодов со случайно сгенерированными перестановками (обозначим этот класс как ВРС).

Проанализируем коды из указанных ансамблей для $\gamma = 3$, $\rho = 6$ и для $\gamma = 3$, $\rho = 12$. В случае $\gamma = 2$ результаты БЦК и БПК не будут лучше, чем у кодов Гилберта, при $\gamma = 4$, как отмечалось, ухудшается относительная корректирующая способность, т.к. для кодов одинаковой длины и скорости размер блока m , являющийся верхней границей для b_0 , заметно уменьшается с ростом γ .

Для указанных конструкций будем оценивать расхождение максимальной длины b_0 исправляемого пакета и верхней границы для БЦК и БПК, равной $m - 1$, а точнее, будем оценивать величину $m - b_0$, лучшую (минимальную) среди сгенерированных кодов вероятностного ансамбля. При расхождении $m - b_0 = 1$ будем получать оптимальные коды, достигающие максимально возможной корректирующей способности для БЦК и БПК.

На рисунке 2 показаны результаты моделирования для расширенных кодов Гилберта вида (6) и (7). Можно заметить, что для простых значений размера блока для обоих кодов расхождение равно единице, т.е. достигается максимальное значение корректирующей способности. Однако для составных m случайные коды Гилберта показывают лучший результат, чем детерминированные: для нечётных размеров блока в ансамбле всегда найдётся код с корректирующей способностью $b = m - 1$, а для чётных – с $b = m - 2$. Коды вида (6) для составных m показывают сравнительно небольшую длину исправляемого пакета.

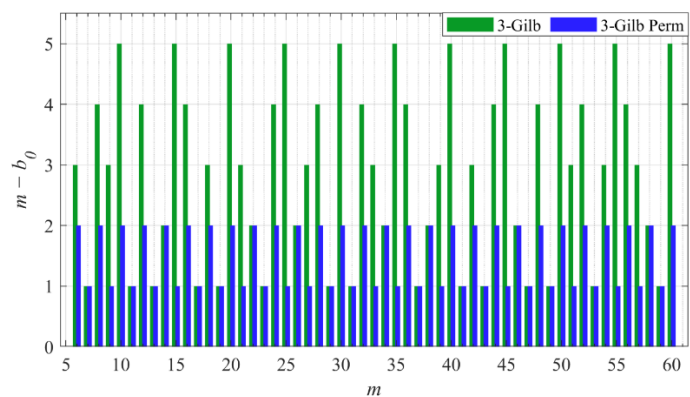


Рис. 2. Зависимость расхождения корректирующей способности размера блока для расширенных кодов Гилберта при $\rho = 6$

На рисунке 3 представлены результаты моделирования для БЦК, БПК и расширенных кодов Гилберта при $\rho = 6$.

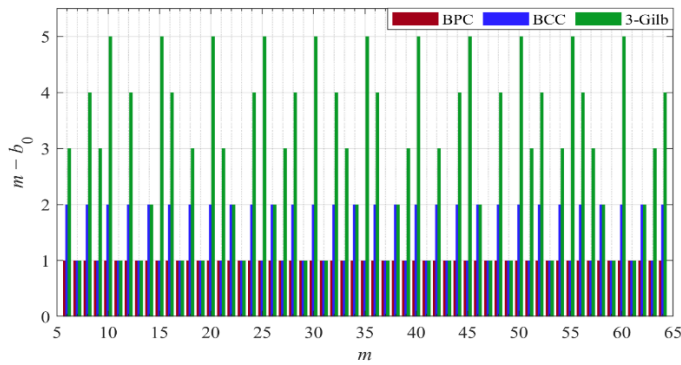


Рис. 3. Зависимость расхождения корректирующей способности размера блока для МППЧ-кодов при $\gamma = 3, \rho = 6$

Для вероятностных ансамблей было сгенерировано 1000 случайных кодов и выбраны лучшие из них по корректирующей способности (увеличение выборки не приводит к значимым изменениям результатов). Как видно из рисунка, для БПК были найдены коды с длиной исправляемого пакета $m - 1$ для всех рассмотренных значений m , для БЦК, как и для случайных кодов Гилберта, верхняя граница достигается для нечётных значений m и на единицу хуже для чётных значений. Расширенные детерминированные коды Гилберта оптимальны при простых m и приведены для сравнения.

Из рисунков 2 и 3 видно, что циклические вероятностные конструкции, т. е. коды вида (6) и БЦК, показывают одинаковую корректирующую способность для лучших случаев. На рисунке 4 представлена вероятность нахождения кода с максимальной корректирующей способностью для этих конструкций при нечётном размере блока. Как видно из графиков, для случайных расширенных кодов Гилберта вероятность нахождения кода с $b = b_0$ заметно выше, чем для БЦК.

На рисунке 5 представлены результаты моделирования для БЦК, БПК и расширенных кодов Гилберта при $\rho = 12$. Для вероятностных ансамблей было сгенерировано 100 случайных кодов. Как видно из рисунка, результаты несколько хуже для БПК – при некоторых малых значениях размера блока m не были найдены оптимальные коды с максимальной длиной пакета. Заметно хуже результаты для БЦК, и расширенные коды Гилберта снова показывают наихудший результат. Возможно, при увеличении выборки могут быть найдены коды, более близкие к оптимальным. При этом при простых m , как и ранее, во всех случаях для всех конструкций получены коды максимальной корректирующей способности.

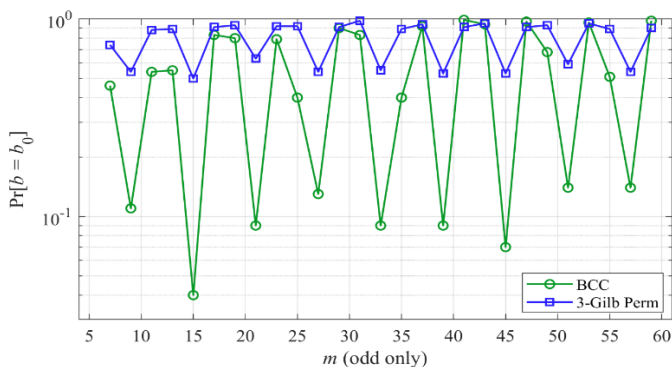


Рис. 4. Вероятность нахождения кода с максимальной корректирующей способностью для БЦК и случайных расширенных кодов Гилберта

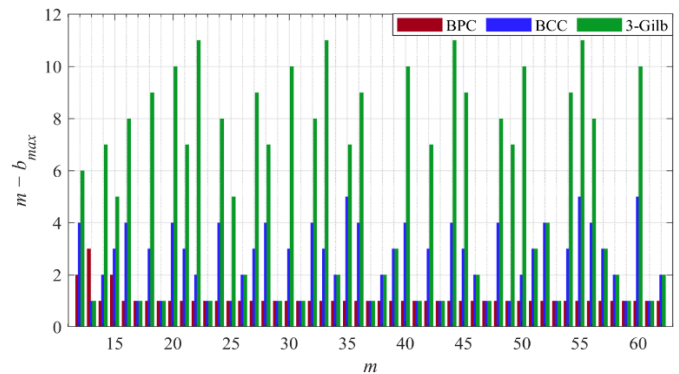


Рис. 5. Зависимость расхождения корректирующей способности размера блока для МППЧ-кодов при $\gamma = 3, \rho = 12$

Заключение

В статье рассматривается задача определения корректирующей способности при исправлении пакетов ошибок для некоторых классов кодов с малой плотностью проверок на чётность, проверочная матрица которых состоит из блоков. На основе комбинаторной метрики Е.М. Габидулина сформулирован подход к определению комбинированного (компаундного) вектора ошибки, состоящего в общем случае из многократных пакетов и независимых ошибок, а также понятие обобщённой корректирующей способности.

Для случая исправления однократных пакетов ошибок проведена экспериментальная оценка корректирующей способности блочно-циркулянтных кодов, а также их подклассов: кодов Гилберта. Рассмотрено обобщение кодов Гилберта на основе детерминированной конструкции и вероятностного ансамбля. Показано, что детерминированные расширенные коды Гилберта достигают оптимальной для блочных конструкций корректирующей способности лишь для простых размеров блоков, тогда как вероятностные расширенные коды Гилберта могут быть оптимальны для любого нечётного размера блока. Этим же свойством обладают и блочно-циркулянтные конструкции общего вида, однако вероятность нахождения оптимальных кодов на основе вероятностных расширенных кодов Гилберта выше, чем для общего ансамбля блочно-циркулянтных кодов. Рассмотрен также вероятностный ансамбль блочно-перестановочных кодов, для которого показано, что он содержит оптимальные коды для любого размера блока проверочной матрицы.

Полученные результаты могут быть использованы для построения схем кодирования для систем связи, ошибки в которых характеризуются одиночными пакетами, позволяют выполнять адаптацию кодовых конструкций с учётом как статистических особенностей каналов связи, так и требований к вычислительной эффективности процедур кодирования и декодирования.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № FSRF-2023-0003, «Фундаментальные основы построения помехозащищённых систем космической и спутниковой связи, относительной навигации, технического зрения и аэрокосмического мониторинга».

Литература

1. *Krouk E.* ARQ // Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications / eds. E. Krouk, S. Semenov. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2011, pp. 263-276. doi: 10.1002/9780470976777.
2. *Foss S., Kim D., Turlikov A.* Efficient Remote Monitoring Through Noisy Random Access with Retransmissions // IEEE Access, 2025, vol. 13, pp. 183171-183183. doi: 10.1109/ACCESS.2025.3624788.
3. *Lin S., Li J.* Fundamentals of classical and modern error-correcting codes. Cambridge: Cambridge University Press, 2022, 840 p. doi: 10.1017/9781009067928.
4. *Morelos-Zaragoza R.H.* The art of error correcting coding. 2nd ed. Chichester; Hoboken, NJ: John Wiley, 2006, 263 p.
5. *Niu K., Zhang P., Dai J., Si Z., Dong C.* A golden decade of polar codes: From basic principle to 5G applications // China Communications, 2023, vol. 20, no. 2, pp. 94-121. doi: 10.23919/JCC.2023.02.015.
6. *Karakchieva L., Trifonov P.* A Recursive Soft-Input Soft-Output Decoding Algorithm // IEEE Transactions on Communications, 2024, vol. 72, no. 3, pp. 1290-1302. doi: 10.1109/TCOMM.2023.3334812.
7. *Fominykh A., Shabunov K.* Automorphism Set Construction for Automorphism Ensemble Decoding with Reduced Delay // IEEE Open Journal of the Communications Society, 2025, vol. 6, pp. 8625-8635. doi: 10.1109/OJCOMS.2025.3617311.
8. *Simegn D., Artemasov D., Andreev K., Rybin P., Frolov A.* Generalized LDPC Codes with low-Complexity Decoding and Fast Convergence // IEEE Wireless Communications Letters, 2025. doi: 10.1109/LWC.2025.3600912.
9. *Kavitha., N Archana., R Hinduja., A K Aishwarya.* Performance Analysis of LDPC Codes and Polar Codes // 2025 3rd International Conference on Advancements in Electrical, Electronics, Communication, Computing and Automation (ICAECA) 2025 3rd International Conference on Advancements in Electrical, Electronics, Communication, Computing and Automation (ICAECA). Coimbatore, India: IEEE, 2025, pp. 1-5. doi: 10.1109/ICAECA63854.2025.11012493.
10. *Kandhway K.* Modeling burst errors in a fading channel // 2022 IEEE 11th International Conference on Communication Systems and Network Technologies (CSNT) 2022 IEEE 11th International Conference on Communication Systems and Network Technologies (CSNT). Indore, India: IEEE, 2022, pp. 409-414. doi: 10.1109/CSNT54456.2022.9787652.
11. *Исаева М.Н.* Разработка и анализ методики построения множества плотных информационных совокупностей для исправления пакетов ошибок // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2024, Т. 18, № 10, С. 20-26. doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-10-20-26.
12. *Kuvshinov A., Timokhin I., Ivanov F.* On the Concatenation of Superposition and Polar Codes // 2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON) 2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON). Novosibirsk, Russian Federation: IEEE, 2024, pp. 52-57. doi: 10.1109/SIBIRCON63777.2024.10758448.
13. *Овчинников А.А., Фоминых А.А.* Анализ и оптимизация схем кодирования для каналов с рэлеевскими замираниями // Научные технологии в космических исследованиях Земли, 2023, Т. 15, № 3, С. 47-56. doi: 10.36724/2409-5419-2023-15-3-47-56.
14. *Ovchinnikov A.A.* Usage of polar codes for fixed and random length error bursts correction // Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics, 2025, vol. 25, no. 1, pp. 53-60. doi: 10.17586/2226-1494-2025-1-53-60.
15. *Aharoni Z., Huleihel B., Pfister H.D., Permuter H.H.* Data-Driven Polar Codes for Unknown Channels with and Without Memory // 2023 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). Taipei, Taiwan: IEEE, 2023, pp. 1890-1895. doi: 10.1109/ISIT54713.2023.10206663.
16. *Li L., Lv J., Li Y., Dai X., Wang X.* Burst Error Identification Method for LDPC Coded Systems // IEEE Communications Letters, 2024, pp. 1-5. doi: 10.1109/LCOMM.2024.3391826.
17. *Yang M., Pan Z., Djordjevic I.B.* FPGA-based burst-error performance analysis and optimization of regular and irregular SD-LDPC codes for 50G-PON and beyond // Optics Express, 2023, vol. 31, no. 6, pp. 10936-10946. doi: 10.1364/OE.477546.
18. *Song L., Huang Q., Wang Z.* Construction of Multiple-Burst-Correction Codes in Transform Domain and Its Relation to LDPC Codes // IEEE Transactions on Communications, 2020, vol. 68, no. 1, pp. 40-54. doi: 10.1109/TCOMM.2019.2948341.
19. *Gabidulin E.M.* A brief survey of metrics in coding theory // Mathematics of Distances and Applications / eds. Michel Deza, Michel Petitjean, Krassimir Markov. Sofia, Bulgaria: ITHEA, 2012, pp. 66-84.
20. *Veresova A.M., Isaeva M.N., Ovchinnikov A.A.* Estimation of Independent Errors and Bursts Correction Capability of Linear Codes // 2024 Conference of Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIcon). Saint Petersburg, Russian Federation: IEEE, 2024, pp. 23-27. doi: 10.1109/EIcon61730.2024.10468456.
21. *Вересова А.М.* Уменьшение сложности декодирования пакетов ошибок блочно-перестановочными кодами на основе методики определения местоположения пакета // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2024, Т. 18, № 10, С. 12-19. doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-10-12-19.
22. *Крук Е.А., Овчинников А.А.* Точная корректирующая способность кодов Гилберта при исправлении пакетов ошибок // Информационно-управляющие системы, 2016, № 1, С. 80-87. doi: 10.15217/issn1684-8853.2016.1.80.
23. *Kabatiansky G., Krouk E., Semenov S.* Error Correcting Coding and Security for Data Networks: Analysis of the Superchannel Concept. Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2005, 278 p.

ESTIMATION OF BURST ERROR CORRECTING CAPABILITY FOR CODE CONSTRUCTIONS BASED ON MATRICES FROM BLOCKS

Alina M. Veresova, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russia, a.veresova@guap.ru

Andrei M. Turlikov, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russia, turlikov@guap.ru

Vladimir A. Bogatyrev, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, St. Petersburg, Russia, vladimir.bogatyrev@gmail.com

Abstract

The article discusses the problem of evaluating the noise immunity of some codes with a low density of parity checks, the parity-check matrix of which is composed of blocks of various nature. A generalized approach to determining the correcting ability of a code is considered for the case when errors are a combination of bursts and independent errors of a given multiplicity, based on combinatorial coverage of a set of erroneous word positions. The purpose of this work is to analyze the correcting ability of ensembles of block-permutation codes in comparison with widely used block-circular codes, as well as their well-known subclasses to correct single error bursts. It is known that for all these designs, the maximum possible length of a fixed single burst is strictly less than the block size, so if the block size and maximum length differ by one, such codes are optimal within these designs. An experimental estimation of the length of the corrected single burst for Gilbert codes, their deterministic and probabilistic extensions, an ensemble of block-circulant codes, as well as an ensemble of block-permutation codes is carried out. It is shown that the ensemble of block-permutation codes contains optimal codes for block structures at any block size. This property is not possessed by the other constructions considered: for block-circulant codes, including extensions of the Gilbert code, optimal codes are found only for odd values of the block size. At the same time, the probability of selecting the code with the maximum correction ability from the ensemble is higher for the extended Gilbert code than for the general block-circulant code. The considered deterministic extended Gilbert code shows a relatively small correction ability and is optimal only for simple block size values. The results of the work can be used to build code schemes and increase the reliability of transmission in channels with a complex noise structure described by grouping errors.

Keywords: low-density parity-check codes, block-permutation construction, quasi-cyclic codes, error bursts, channels with memory

References

- [1] E. Krouk, 'ARQ', in *Modulation and Coding Techniques in Wireless Communications*, E. Krouk and S. Semenov, Eds., Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2011, pp. 263-276. doi: 10.1002/9780470976777.
- [2] S. Foss, D. Kim, and A. Turlikov, "Efficient Remote Monitoring Through Noisy Random Access With Retransmissions," *IEEE Access*, vol. 13, pp. 183171-183183, 2025, doi: 10.1109/ACCESS.2025.3624788.
- [3] S. Lin and J. Li, *Fundamentals of classical and modern error-correcting codes*. Cambridge: Cambridge University Press, 2022. doi: 10.1017/9781009067928.
- [4] R. H. Morelos-Zaragoza, *The art of error correcting coding*, 2nd ed. Chichester; Hoboken, NJ: John Wiley, 2006.
- [5] K. Niu, P. Zhang, J. Dai, Z. Si, and C. Dong, "A golden decade of polar codes: From basic principle to 5G applications," *China Commun.*, vol. 20, no. 2, pp. 94-121, Feb. 2023, doi: 10.23919/JCC.2023.02.015.
- [6] L. Karakchieva and P. Trifonov, "A Recursive Soft-Input Soft-Output Decoding Algorithm," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 72, no. 3, pp. 1290-1302, Mar. 2024, doi: 10.1109/TCOMM.2023.3334812.
- [7] A. Fominykh and K. Shabunov, "Automorphism Set Construction for Automorphism Ensemble Decoding With Reduced Delay," *IEEE Open J. Commun. Soc.*, vol. 6, pp. 8625-8635, 2025, doi: 10.1109/OJCOMS.2025.3617311.
- [8] D. Simegn, D. Artemasov, K. Andreev, P. Rybin, and A. Frolov, "Generalized LDPC Codes With low-Complexity Decoding and Fast Convergence," *IEEE Wireless Commun. Lett.*, pp. 1-1, 2025, doi: 10.1109/LWVC.2025.3600912.
- [9] K. Kavitha, N. Archana, R. Hinduja, and A. K. Aishwarya, "Performance Analysis of LDPC Codes and Polar Codes," in *2025 3rd International Conference on Advancements in Electrical, Electronics, Communication, Computing and Automation (ICAECA)*, Coimbatore, India: IEEE, Apr. 2025, pp. 1-5. doi: 10.1109/ICAECA63854.2025.11012493.
- [10] K. Kandhway, "Modeling burst errors in a fading channel," in *2022 IEEE 11th International Conference on Communication Systems and Network Technologies (CSNT)*, Indore, India: IEEE, Apr. 2022, pp. 409-414. doi: 10.1109/CSNT54456.2022.9787652.
- [11] M. N. Isaeva, "Development and analysis of a method for constructing dense information sets for error bursts correction," *T-Comm*, vol. 18, no. 10, pp. 20-26, 2024, doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-10-20-26. (in Russian)

- [12] A. Kuvshinov, I. Timokhin, and F. Ivanov, "On the Concatenation of Superposition and Polar Codes," in *2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*, Novosibirsk, Russian Federation: IEEE, Sep. 2024, pp. 52-57. doi: 10.1109/SIBIRCON63777.2024.10758448.
- [13] A. A. Ovchinnikov and A. A. Fominykh, "Analysis and optimization of error-correcting coding schemes for channels with Rayleigh fading," *H&ES Research*, vol. 15, no. 3, pp. 47-56, 2023, doi: 10.36724/2409-5419-2023-15-3-47-56. (in Russian)
- [14] A. A. Ovchinnikov, "Usage of polar codes for fixed and random length error bursts correction," *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*, vol. 25, no. 1, pp. 53-60, 2025, doi: 10.17586/2226-1494-2025-25-1-53-60.
- [15] Z. Aharoni, B. Huleihel, H. D. Pfister, and H. H. Permuter, "Data-Driven Polar Codes for Unknown Channels With and Without Memory," in *2023 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*, Taipei, Taiwan: IEEE, Jun. 2023, pp. 1890-1895. doi: 10.1109/ISIT54713.2023.10206663.
- [16] L. Li, J. Lv, Y. Li, X. Dai, and X. Wang, "Burst Error Identification Method for LDPC Coded Systems," *IEEE Commun. Lett.*, pp. 1-5, 2024, doi: 10.1109/LCOMM.2024.3391826.
- [17] M. Yang, Z. Pan, and I. B. Djordjevic, "FPGA-based burst-error performance analysis and optimization of regular and irregular SD-LDPC codes for 50G-PON and beyond," *Opt. Express*, vol. 31, no. 6, pp. 10936-10946, Mar. 2023, doi: 10.1364/OE.477546.
- [18] L. Song, Q. Huang, and Z. Wang, "Construction of Multiple-Burst-Correction Codes in Transform Domain and Its Relation to LDPC Codes," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 68, no. 1, pp. 40-54, Jan. 2020, doi: 10.1109/TCOMM.2019.2948341.
- [19] E. M. Gabidulin, "A brief survey of metrics in coding theory," in *Mathematics of Distances and Applications*, Michel Deza, Michel Petitjean, and Krassimir Markov, Eds., Sofia, Bulgaria: ITHEA, 2012, pp. 66-84.
- [20] A. M. Veresova, M. N. Isaeva, and A. A. Ovchinnikov, "Estimation of Independent Errors and Bursts Correction Capability of Linear Codes," in *2024 Conference of Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EICon)*, Saint Petersburg, Russian Federation: IEEE, Jan. 2024, pp. 23-27. doi: 10.1109/EICon61730.2024.10468456.
- [21] A. M. Veresova, "Reducing the complexity of error bursts decoding using block-permutation codes based on the method of determining the location of the burst," *T-Comm*, vol. 18, no. 10, pp. 12-19, 2024, doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-10-12-19. (in Russian)
- [22] E. A. Krouk and A. A. Ovchinnikov, "Exact Burst-Correction Capability of Gilbert Codes," *Informatsionno-upravliaiushchie sistemy (Information and Control Systems)*, no. 1, pp. 80-87, Jan. 2016, doi: 10.15217/issn1684-8853.2016.1.80. (in Russian)
- [23] G. Kabatiansky, E. Krouk, and S. Semenov, "Error Correcting Coding and Security for Data Networks: Analysis of the Superchannel Concept," Chichester, UK: John Wiley & Sons, Ltd, 2005.

Information about authors:

Alina M. Veresova, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Infocommunication Technologies and Communication Systems, Senior Lecturer, St. Petersburg, Russia. ORCID 0000-0002-3792-9249

Andrei M. Turlikov, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Infocommunication Technologies and Communication Systems, Head of the Department; Dr. Sc., Tech., Professor, St. Petersburg, Russia. ORCID 0000-0001-7132-094X

Vladimir A. Bogatyrev, Saint-Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Department of Information Security, Dr. Sc., Tech., Professor St. Petersburg, Russia. ORCID 0000-0003-0213-0223