

ПРОБЛЕМА СПРАВЕДЛИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МОЩНОСТИ В СИСТЕМЕ PD-NOMA

DOI: 10.36724/2072-8735-2025-19-12-25-33

Крейнделин Виталий Борисович,
Московский технический университет связи и информатики,
Москва, Россия, vitkrend@gmail.com

Manuscript received 30 August 2025;
Accepted 11 November 2025

Варукина Лидия Александровна,
Московский технический университет связи и информатики,
Москва, Россия, varukina@rambler.ru

Ключевые слова: NOMA, PD-NOMA, справедливое распределение, индекс Джейна, коэффициент Джини, подвижная связь

Системы многостанционного доступа с разделением пользователей по мощности (Power Domain Non-Orthogonal Multiple Access – PD-NOMA) относятся к числу наиболее перспективных технологий беспроводной связи, позволяющих значительно увеличить эффективность использования ограниченного радиочастотного спектра. Ключевая особенность PD-NOMA заключается в том, что несколько пользователей одновременно используют один и тот же частотно-временной ресурс, а их сигналы разделяются в мощностной области. Для корректного приема на стороне абонентских устройств применяется метод последовательного исключения помех (Successive Interference Cancellation, SIC), обеспечивающий возможность восстановления полезных данных даже при наличии наложенных сигналов с разными уровнями мощности. Такой подход открывает путь к повышению пропускной способности и обслуживанию большего числа абонентов по сравнению с ортогональными схемами доступа. Несмотря на преимущества, система PD-NOMA имеет и существенные недостатки. В реальных условиях различия в характеристиках каналов пользователей могут приводить к дисбалансу распределения ресурсов. Пользователи, находящиеся ближе к базовой станции и обладающие более высоким качеством канала, получают большую эффективность при меньших энергозатратах, тогда как абоненты с ослабленными каналами оказываются в неблагоприятном положении. Это создает риск дискриминации и ухудшения качества предоставляемых услуг. В данной работе рассматриваются методы справедливого распределения мощности между пользователями, которые позволяют достичь баланса между максимизацией суммарной пропускной способности и равномерным доступом к ресурсам сети. Анализируются различные критерии справедливости, включая индекс Джейна, коэффициент Джини, пропорциональную и взвешенную справедливость. Показано, каким образом указанные метрики могут быть интегрированы в задачу оптимизации распределения мощности в системе PD-NOMA. В качестве примера представлено решение задачи оптимизация распределения мощности с ограничением по индексу Джейна на основе метода множителей Лагранжа. Полученные результаты подтверждают эффективность рассмотренного подхода и демонстрируют возможность повышения устойчивости и равноправия в обслуживании пользователей в системах PD-NOMA.

Информация об авторах:

Крейнделин Виталий Борисович, профессор, д.т.н., МТУСИ, Москва, Россия
Варукина Лидия Александровна, соискатель, к.т.н., МТУСИ, Москва, Россия

Для цитирования:

Крейнделин В.Б., Варукина Л.А. Проблема справедливого распределения мощности в системе PD-NOMA // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2025. Том 19. №12. С. 25-33.

For citation:

V.B. Kreyndelin, L.A. Varukina, "Problem of fair power allocation in PD-NOMA system ", T-Comm, 2025, vol. 19, no.12, pp. 25-33. (in Russian)

Введение

Система связи неортогонального множественного доступа с разделением сигналов различных пользователей по мощности PD-NOMA обеспечивает доступ нескольких пользователей к сервисам беспроводной сети связи при использовании ими одного и того же частотно-временного ресурса, уплотняя по мощности сигналы разных пользователей в одном и том же канале [1-3]. В отличие от традиционных ортогональных схем множественного доступа, где каждому отдельному пользователю выделяется свой собственный ортогональный ресурс, в системе неортогонального множественного доступа PD-NOMA можно увеличить спектральную эффективность всей системы связи за счет использования сразу несколькими пользователями общих неортогональных канальных ресурсов.

Развитие технологий мобильной связи на протяжении последних десятилетий демонстрирует, что каждое новое поколение систем связи опирается на более гибкие и эффективные методы использования радиочастотного спектра. Если в системах 3G ключевым нововведением стало широкополосное кодовое разделение сигналов пользователей, а в системах 4G был осуществлен переход к технологии ортогонального частотного мультиплексирования OFDMA (Orthogonal Frequency Division Multiple Access), то в сетях 5G одной из перспективных технологий рассматривалась именно технология неортогонального множественного доступа NOMA (Non-Orthogonal Multiple Access) [4]. В системах 6G предполагается еще более глубокая интеграция NOMA с другими технологиями, например, с технологиями полного дуплекса, машинного обучения и искусственного интеллекта для управления радиоресурсами. Исследование вопросов справедливого распределения мощности в системах PD-NOMA актуально не только в теоретическом, но и в прикладном плане. Оно позволяет заранее выработать критерии оптимизации и стратегии, которые могут лечь в основу будущих систем связи.

В системе PD-NOMA для пользователей, находящихся на различных расстояниях от базовой станции, мощности передаваемых сигналов назначаются по-разному: терминалы с «сильными» каналами получают меньшую мощность, а абоненты, находящиеся в менее благоприятных условиях связи — большую мощность. При этом на стороне приемника применяется процедура последовательного подавления помех (Successive Interference Cancellation, SIC), позволяющая в большинстве практически используемых сценариях корректно демодулировать полезный сигнал [5, 6].

Принцип работы PD-NOMA схематично показан на рисунке 1. Базовая станция (БС) передает суперпозицию (линейную комбинацию) сигналов нескольких пользователей. Сигналы абонентского терминала 1 (АТ1) передаются с мощностью p_1 . Сигналы абонентского терминала 2 (АТ2) передаются с мощностью p_2 . На приемной стороне происходит поэтапное выделение составляющих с использованием SIC-демодуляции [7, 8]. Такой подход позволяет достичь более высокой пропускной способности системы связи, чем при традиционном ортогональном разделении ресурсов, однако одновременно ставит задачу корректного распределения мощности между пользователями, что напрямую связано с вопросами эффективного и справедливого распределения ресурсов системы между пользователями.

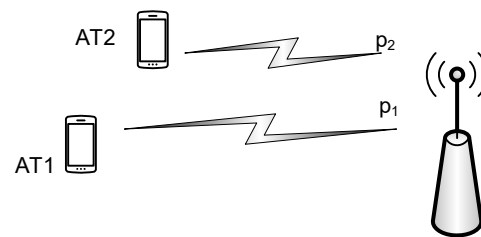


Рис. 1. Принцип работы системы PD-NOMA

Сигнал, передаваемый базовой станцией, является суперпозицией сигналов, предназначенных для каждого пользователя:

$$x = \sum_{k=1}^K p_k \theta_k,$$

где θ_k – комплексный символ квадратурной амплитудной модуляции, предназначенный для k -го пользователя, $k = 1 \dots K$; p_k – мощность сигнала k -го пользователя.

Сигнал, принимаемый k -м абонентским терминалом, описывается следующим выражением:

$$y_k = h_k x + \eta_k,$$

где h_k – комплексный коэффициент передачи беспроводного канала связи между базовой станцией и k -м абонентским терминалом, η_k – комплексный аддитивный белый гауссовский шум на входе приемника k -го абонентского терминала с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной $2\sigma^2$.

Потенциальная скорость передачи информации для k -го пользователя зависит от отношения сигнал/шум ρ_k

$$\rho_k = \frac{p_k |h_k|^2}{\sigma_k^2 + \sum_{j=1, j \neq k}^K p_j |h_j|^2} \quad (1)$$

и ограничивается известным пределом Шеннона [6, 7]:

$$R_k = B \log_2(1 + \rho_k), \quad (2)$$

где B – ширина полосы частот канала связи.

1 Постановка задачи распределения мощности

Распределение мощности между пользователями может рассматриваться как задача оптимизации по определенному критерию. Среди известных критериев можно выделить следующие [9, 10]:

- максимизация суммарной пропускной способности системы связи;
- максимизация отношения сигнал-шум на входе приемников пользователей;
- минимизация средней вероятности ошибки для всех пользователей или удовлетворение некоторых заданных требований по вероятности ошибок для каждого отдельного пользователя.

Задачу оптимизации в общем виде можно представить в

виде задачи максимизации некоторого показателя эффективности работы системы связи и ее можно описать следующим выражением:

$$\max_{\mathbf{P} \in \Pi} \sum_{k=1}^K M_k(\mathbf{P}), \quad (3)$$

где $M_k(\mathbf{P})$ – некоторый ключевой показатель эффективности для k -го пользователя, с использованием которого осуществляется оптимизация, и зависящий от распределения мощности между различными пользователями. Такое распределение описывается вектором

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_k \end{bmatrix}, \text{ где, в свою очередь, } p_k \text{ – мощность передачи сигналов } k\text{-го пользователя, } k=1\dots K.$$

Возможный набор векторов \mathbf{P} определяется множеством Π . Без введения ограничения на множество Π векторов \mathbf{P} , например, при бесконечном увеличении мощности для всех пользователей или даже для некоторых пользователей рассматриваемая оптимизационная задача (3) не имеет практического смысла. Поэтому множество Π должно быть обязательно ограничено.

Задача (3) оптимизации эффективности работы системы может быть обобщена следующим образом:

$$\max_{\mathbf{P} \in \Pi} (f(M_1(\mathbf{P}), M_2(\mathbf{P}), \dots, M_K(\mathbf{P}))), \quad (4)$$

где $f()$ – некоторая функция. Данная функция может быть как линейной, так и нелинейной.

При максимизации суммарной пропускной способности в качестве метрики используется скорость передачи данных абонентского терминала $M_k(\mathbf{P}) = R_k(\mathbf{P})$.

В основе рассматриваемой задачи оптимизации лежит противоречие между двумя несопадающими целями:

1. Максимизация суммарной пропускной способности всей системы связи. Это естественное стремление разработчиков систем и операторов сетей связи, поскольку позволяет обслуживать больше пользователей или передавать больше данных.

2. Справедливость распределения ресурсов. С точки зрения конечных пользователей важно, чтобы доступ к сервисам был равноправным и не зависел слишком сильно от условий распространения сигналов или близости к базовой станции. При этом важно, чтобы каждый пользователь получил обслуживание, которое бы его устраивало.

Рассмотрим подробнее ограничения, накладываемые при решении задачи оптимизации (3), а также ограничения, накладываемые на вектор \mathbf{P} мощностей сигналов пользователей [11]:

1. Ограничение по суммарной мощности. В реальных условиях передатчик базовой станции не может бесконечно увеличивать излучаемую мощность. Поэтому вводится условие, что сумма мощностей всех сигналов пользователей не превышает максимально допустимого значения. Это отражает физические ограничения оборудования, а также возможные нормативные ограничения по уровню излучений. Таким

образом, имеет место следующее условие:

$$\sum_{k=1}^K p_k \leq P_{\max}, \quad (5)$$

где P_{\max} – максимальная общая мощность передачи сигналов для всех пользователей, $p_k, k=1\dots K$, – мощность передачи сигнала k -го абонентского терминала.

Формулу (5) можно переписать также в векторном виде:

$$\mathbf{1} \cdot \mathbf{P} \leq P_{\max}, \quad (6)$$

где $\mathbf{1} = [1 \dots 1]$ – вектор-строка размера $1 \times K$.

Выражения (5) и (6) устанавливают ограничения суммарной мощности и тем самым явно определяют вид множества Π .

2. Ограничение по качеству обслуживания. Каждый пользователь должен иметь минимально гарантированную скорость передачи данных. В противном случае для него использование системы теряет смысл. Это ограничение позволяет предотвратить ситуации, когда «слабые» пользователи полностью «выбрасываются» из системы ради увеличения суммарной пропускной способности всей системы связи, что представляется несправедливым и потому неприемлемым. Ограничение по качеству обслуживания каждого пользователя выглядит следующим образом:

$$R_k(\mathbf{P}) \geq R_k^{\min}, \quad (7)$$

где $R_k(\mathbf{P})$ – скорость передачи данных k -го абонентского терминала, определяемая соотношением (2), R_k^{\min} – минимально допустимая скорость передачи, установленная для k -го абонентского терминала.

3. Ограничение по отношению сигнал-шум. Даже если мощность выделена, но отношение сигнал-шум ниже минимально допустимого значения, то успешная демодуляция сигнала PD-NOMA в приемнике становится невозможной. Это условие тесно связано с особенностями работы и возможностями алгоритмов SIC. Таким образом, можно записать это условие в следующем виде:

$$\rho_k(\mathbf{P}) \geq \rho_{\min}, \quad (8)$$

где $\rho_k(\mathbf{P})$ – отношение сигнал-шум для k -го абонентского терминала, определяемое соотношением (1), ρ_{\min} – минимально допустимое отношение сигнал-шум для успешной демодуляции сигнала в приемнике.

Таким образом, задача оптимизации распределения мощности в системе PD-NOMA представляет собой задачу многокритериальной оптимизации, где приходится балансировать между различными факторами, чтобы найти наилучшее решение с учетом всех обстоятельств. Выражения для ограничения по качеству обслуживания (7) и по качеству обслуживания (8) неявно определяют вид множества Π , которое ограничивает допустимые значения вектора \mathbf{P} при решении рассматриваемых оптимизационных задач (3) и (4).

При решении задачи оптимизации помимо критериев оптимизации, нужны еще также алгоритмы оптимизации,

которые часто сводятся к поиску экстремума целевой функции [12]. В качестве примера возможного многомодального характера целевой функции рассмотрим функцию максимизации суммарной пропускной способности системы.

2 Задача максимизации суммарной пропускной способности системы связи

Запишем целевую функцию задачи максимизации суммарной пропускной способности системы связи с учетом выражений (1-3):

$$f = \max_{\mathbf{P}} \sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P}) = \max_{\mathbf{P}} \sum_{k=1}^K B \log_2(1 + \rho_k) =$$

$$= \max_{\mathbf{P}} \sum_{k=1}^K \left(B \log_2 \left(1 + \frac{p_k |h_k|^2}{\sigma^2 + \sum_{j=1, j \neq k}^K p_j |h_k|^2} \right) \right).$$

Для визуализации данной целевой функции построим график зависимости суммарной пропускной способности системы связи с двумя пользователями ($K=2$) от распределения мощности между этими пользователями, $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$.

Суммарная пропускная способность в такой системе связи будет равна:

$$R_{\Sigma}(\mathbf{P}) = R_1(\mathbf{P}) + R_2(\mathbf{P}) =$$

$$= B \log_2 \left(1 + \frac{P_1 |h_1|^2}{\sigma^2 + P_2 |h_1|^2} \right) + B \log_2 \left(1 + \frac{P_2 |h_2|^2}{\sigma^2 + P_1 |h_2|^2} \right).$$

При этом действует ограничение, определяемое условием (6). Далее для упрощения вычислений (но без снижения общности рассмотрения) считаем, что полоса частот канала связи равна единице, т.е. $B=1$. График зависимости суммарной пропускной способности $R_{\Sigma}(\mathbf{P})$ системы связи от распределения мощности между двумя пользователями показан на рисунке 2.

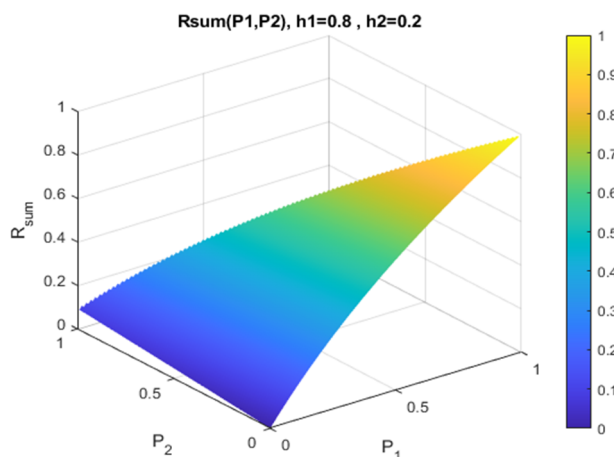


Рис. 2. График зависимости суммарной пропускной способности системы связи от распределения мощности при $K=2$, $\mathbf{1} \cdot \mathbf{P} \leq P_{\max}$, $P_{\max}=1$, $h_1=0,8$, $h_2=0,2$, $\sigma^2=0,5$

При фиксированной общей мощности ($\mathbf{1} \cdot \mathbf{P} = P_{\max}$) сигналов обоих пользователей график будет представлять собой срез данного 3D-графика вдоль линии $P_1 + P_2 = P_{\max}$, см.

Рис.3. При этом $P_2 = P_{\max} - P_1$, а суммарную пропускную способность $R_{\Sigma}(\mathbf{P})$ можно представить как зависимость $R_{\Sigma}(P_1)$ только от одного аргумента.

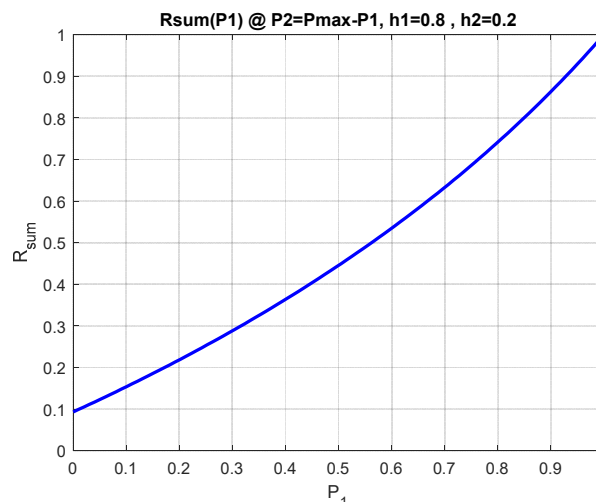


Рис. 3. График зависимости суммарной пропускной способности системы связи от распределения мощности $R_{\Sigma}(P_1)$ при

$$P_1 + P_2 = P_{\max} = 1, \quad h_1 = 0,8, \quad h_2 = 0,2, \quad \sigma^2 = 0,5$$

Решение задачи оптимизации (3) только по критерию максимизации суммарной пропускной способности $R_{\Sigma}(\mathbf{P})$ может привести к несправедливому распределению ресурсов – одному пользователю может быть выделено слишком мало мощности, или даже не выделено совсем мощности. В то же время, другому пользователю будет выделено намного больше мощности, чем ему необходимо для обеспечения заданного качества связи. Например, это имеет место в рассматриваемом выше случае – система с двумя пользователями $P_1 + P_2 = P_{\max}$.

Как видно из рисунка 3, максимальная суммарная пропускная способность $R_{\Sigma}(P_1)$ достигается при выделении всей мощности 1-му пользователю, $P_1 = P_{\max}$, находящемуся в лучших условиях распространения радиоволн, $|h_1| > |h_2|$. Но в этом случае 2-му пользователю, находящемуся в неблагоприятных условиях распространения радиоволн, не будет совсем выделено ресурсов, $P_2 = 0$. Очевидно, это сделает невозможной его работу.

Для устранения этой проблемы нужно использовать методы справедливого распределения ресурсов.

3 Справедливое распределение ресурсов

При определенных условиях при решении задачи оптимизации (3) пользователю может быть выделен такой объем ресурсов (в нашем случае это мощность передачи), при котором

Таблица 1

Методы справедливости распределения ресурсов

№	Метод	Комментарий
1	Использование индекса Джайна $F(\mathbf{P}) = \frac{\left(\sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P})\right)^2}{K \sum_{k=1}^K (R_k(\mathbf{P}))^2}$	Обеспечение равномерности распределения ресурсов между пользователями. При $F = 1$ обеспечивается равномерное распределение ресурсов между пользователями, а при $F \rightarrow 0$ один или несколько пользователей получают большую часть ресурсов.
2	Использование коэффициента Джини $G(\mathbf{P}) = \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K R_i(\mathbf{P}) - R_j(\mathbf{P}) }{2K \sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P})}$	Минимизация неравенства в распределении ресурсов между пользователями. При $G = 0$ обеспечивается равномерное распределение ресурсов между пользователями, а при $G = 1$ – максимально неравномерное распределение ресурсов.
3	Настраиваемый компромисс между суммарной скоростью пользователей и справедливостью $\max_{\mathbf{P}} \left(\sum_{k=1}^K u_{\alpha} R_k(\mathbf{P}) \right),$ $u_{\alpha}(R_k) = \begin{cases} \ln(R_k(\mathbf{P})), & \alpha = 1 \\ \frac{R_k^{1-\alpha}(\mathbf{P})}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \end{cases}$	$u_{\alpha}(\cdot)$ – функция полезности, отражающая «удовлетворенность» пользователя. $\max_{\mathbf{P}} \left(\sum_{k=1}^K u_{\alpha} R_k(\mathbf{P}) \right)$ – суммарная «справедливость-эффективность» системы
4	Максимизация минимальной справедливости $\max_{\mathbf{P}} \left(\min_{k,k=1..K} R_k(\mathbf{P}) \right)$	Максимизация по мощности заданного минимального показателя среди всех пользователей
5	Пропорциональная справедливость $\max_{\mathbf{P}} \left(\sum_k \log_2(R_k(\mathbf{P})) \right)$	Достижение баланса между суммарной скоростью и справедливостью для всех пользователей
6	Взвешенная справедливость $\max_{\mathbf{P}} \left(\sum_{k=1}^K w_k R_k(\mathbf{P}) \right)$ $\sum_{k=1}^K w_k = 1.$	Максимизация суммарной пропускной способности системы связи с учетом приоритетов по качеству обслуживания различных пользователей

будут достигаться максимальная эффективность работы системы связи, например, суммарная пропускная способность системы, но уровень обслуживания некоторого пользователя будет ниже минимально допустимого значения, например, $R_k < R^{\min}$.

Для предотвращения такой дискриминации в обслуживании пользователей требуется найти и обеспечить компромисс между максимизацией эффективности работы системы связи и справедливостью в распределении ресурсов.

В литературе предлагается множество способов оценки справедливости [10, 14-1716]. Каждый из них отражает определенное понимание равноправного доступа пользователей к ресурсам. Кратко рассмотрим некоторые из таких способов.

1. Индекс Джайна (Jain's Fairness Index) [10]. Наиболее часто используемая метрика. Его значение изменяется от 0 (полностью несправедливо) до 1 (абсолютное равенство, означающее в данном случае полную справедливость). Например, если один пользователь получает почти все ресурсы, а остальные – минимальные доли, индекс Джайна будет стремиться к нулю. Если же распределение равномерное, он близок будет к единице.

2. Коэффициент Джини (Gini Coefficient) [14]. Заимствован из экономики и анализа неравенства доходов. В контексте связи он показывает, насколько сильно различается доступ пользователей к мощности. Чем ближе коэффициент Джини к нулю, тем более равномерно распределяются ресурсы между пользователями.

3. Настраиваемый компромисс между суммарной скоростью пользователей и справедливостью (α -Fairness) [15]. В задачу распределения ресурсов вводится некоторая функция полезности, отражающая «удовлетворенность» пользователя предоставляемыми услугами связи.

4. Пропорциональная справедливость (Proportional Fairness) [16]. Подразумевает, что каждому пользователю выделяется мощность пропорционально его потребностям и условиям, существующим в канале связи. Этот подход удобен в системах связи, где пользователи имеют разные классы обслуживания.

5. Максимизация минимальной справедливости (Max-Min Fairness) [10]. Суть метода в том, чтобы максимизировать показатели того пользователя, у которого условия в канале связи самые худшие. Таким образом, система гарантирует, что «слабый» абонент не останется совсем без ресурсов, т.е. будет соблюден принцип «социальной справедливости».

6. Взвешенная справедливость (Weighted Fairness) [17]. Позволяет оператору сети связи явно задавать приоритеты. Например, абонентам с критически важными сервисами можно назначить больший вес по сравнению с остальными (не столь привилегированными) абонентами.

Краткое математическое описание различных методов обеспечения справедливости при распределении ресурсов сети связи между пользователями приведено в таблице 1.

Любой из указанных выше методов можно интегрировать в решение задачи оптимизации (4). Рассмотрим теперь варианты использования индекса Джайна $F(\mathbf{P})$.

1. Для достижения компромисса между эффективностью и справедливостью в системе PD-NOMA можно задать фиксированное значение индекса Джайна $F = F_{target}$ в диапазоне $[0,1]$ в зависимости от требуемой степени справедливости распределения ресурсов: от максимального выделения ресурсов какому-то одному пользователю до равномерного распределения ресурсов между всеми пользователями системы связи. Мы также вводим дополнительное ограничение индекса Джайна по F_{target} , например, при максимизации пропускной способности системы:

$$\max_{F(\mathbf{P})=F_{target}} \left(\sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P}) \right), \quad (9)$$

где $F(R_1(\mathbf{P}), \dots, R_K(\mathbf{P})) = F(\mathbf{P}) = F_{target}$.

2. Возможен также другой подход к использованию индекса Джейна – максимизация, собственно, индекса Джейна, если требуется получить более равномерное распределение ресурсов между пользователями:

$$\max_{1 \leq P \leq P_{max}} \frac{\left(\sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P}) \right)^2}{K \sum_{k=1}^K R_k^2(\mathbf{P})}.$$

Аналогичным образом можно также использовать коэффициент Джини $G(\mathbf{P})$ в задаче оптимизации (3):

1. Задаем целевое значение индекса Джини $G = G_{target}$ в диапазоне $[0, 1]$ в зависимости от требуемой степени справедливости: от равномерного распределения ресурсов между пользователями до максимального выделения ресурсов какому-то одному пользователю. Затем вводим дополнительное ограничение по G_{target} . Для максимизации пропускной способности всей системы связи записываем следующую оптимизационную задачу:

$$\max_{G(\mathbf{P})=G_{target}} \left(\sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P}) \right),$$

где $G(R_1(\mathbf{P}), \dots, R_K(\mathbf{P})) = G(\mathbf{P}) = G_{target}$.

2. Другой подход к использованию индекса Джини – минимизация, собственно, индекса Джини, если требуется выполнить более равномерное распределение ресурсов:

$$\min_{1 \leq P \leq P_{max}} \frac{\left(\sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P}) \right)^2}{K \sum_{k=1}^K R_k^2(\mathbf{P})}.$$

Остальные методы, указанные в таблице 1, интегрируются непосредственно в формулу (3). Настраиваемый компромисс между суммарной скоростью всех пользователей и справедливостью представляет собой решение следующей задачи оптимизации:

$$\max_{1 \leq P \leq P_{max}} \left(\sum_{k=1}^K u_k R_k(\mathbf{P}) \right).$$

Метод максимизации минимальной справедливости $\max_{1 \leq P \leq P_{max}} \left(\min_{k=1 \dots K} (R_k(\mathbf{P})) \right)$ можно выразить в следующей эквивалентной форме:

$$\min_{k=1 \dots K} \left(\max_{1 \leq P \leq P_{max}} (R_k(\mathbf{P})) \right).$$

Данная форма оказывается более удобной при реализации практических алгоритмов оптимизации.

Таким образом, мы переходим к решению задачи оптимизации минимаксным методом. В такой постановке упрощается решение задачи: сначала вычисляются максимальные скорости для каждого пользователя – максимизация по непрерывному множеству значений \mathbf{P} , а затем из дискретного множества максимальных скоростей выбирается тот пользователь, для которого имеет место минимальное значение из вычисленных максимальных скоростей.

При использовании метода пропорциональной справедливости оптимизационная задача максимизации пропускной способности системы будет выглядеть следующим образом:

$$\max_{1 \leq P \leq P_{max}} \left(\sum_{k=1}^K \log_2(R_k(\mathbf{P})) \right).$$

При использовании метода взвешенной справедливости оптимизационная задача максимизации пропускной способности системы будет выглядеть следующим образом:

$$\max_{1 \leq P \leq P_{max}} \left(\sum_{k=1}^K w_k R_k(\mathbf{P}) \right).$$

4. Пример решения задачи оптимизации справедливого распределения мощности при использовании индекса Джейна

Рассмотрим решение оптимизационной задачи (9), включающей в себя ограничения на индекс Джейна и суммарную выходную мощность передатчика, известным методом множителей Лагранжа для задачи с ограничением [18].

Если в выражении (9) зафиксировать индекс Джейна $F(R_1, \dots, R_K) = F_{target}$ и принять $\mathbf{1} \times \mathbf{P} = P_{max}$, то можно записать следующую функцию Лагранжа:

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{P}, \mu, \lambda) = & - \sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P}) + \mu \left(\sum_{k=1}^K p_k - P_{max} \right) + \\ & + \lambda \left(F(R_1, \dots, R_K) - F_{target} \right), \end{aligned} \quad (10)$$

где μ и λ – множители Лагранжа.

Решение задачи минимизации функции (10) возможно с помощью численных градиентных методов [12].

Для иллюстрации возможности использования метода множителей Лагранжа рассмотрим простейший случай двух пользователей. Пусть первый пользователь находится ближе к базовой станции и имеет высокий коэффициент передачи канала, а второй расположен на краю соты, соответственно, с малым коэффициентом передачи. Если без учета какого-либо критерия справедливости максимизировать суммарную пропускную способность, вся мощность будет отдана первому пользователю. Второй же пользователь не получит вообще ничего, что для него будет означать полный отказ в предоставлении услуг связи. Чтобы избежать такой ситуации, в задачу оптимизации включается дополнительное условие: индекс справедливости должен быть не ниже заданного порога.

Мощности сигналов двух пользователей связаны очевидным соотношением $P_2 = P_{max} - P_1$. На основе (10) запишем функцию Лагранжа для рассматриваемого случая двух пользователей:

$$\Lambda(P_1, \lambda) = -R_1(P_1) - R_2(P_1) + \lambda(F(P_1) - F_{target}), \quad (11)$$

где $F(P_1) = \frac{(R_1(P_1) + R_2(P_1))^2}{2(R_1(P_1)^2 + R_2(P_1)^2)} = F_{target}$.

На рисунке 4 приведен график функции Лагранжа (11) для случая $P_{max} = 1, h_1 = 0,8, h_2 = 0,2, \sigma^2 = 0,5, F_{target} = 0,9$.

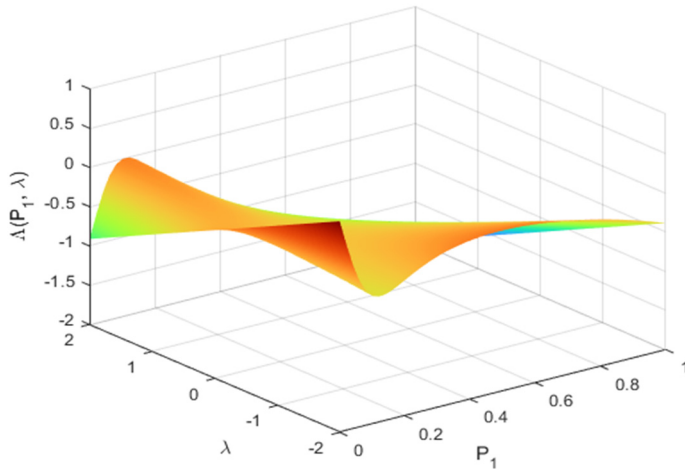


Рис. 4. График функции Лагранжа (11) при $P_1 + P_2 = P_{max} = 1, h_1 = 0,8, h_2 = 0,2$

Для решения задачи минимизации функции Лагранжа (11) традиционным методом градиентного спуска используем следующий алгоритм [12]:

1. Инициализация.

- Выбираем начальное значение $P_1^{(0)} \in [0, P_{max}]$,
- Выбираем начальное значение $\lambda^{(0)}$,
- Шаг градиентного спуска $\alpha > 0$, шаг изменения $\lambda \partial_\lambda > 0$,
- Допускаемая погрешность по индексу Джайна ϵ_F .

2. Настройка множителя λ .

Повторять операции, описанные ниже, пока значение индекса Джайна не приблизится к целевому значению F_{target} :

2.1. При фиксированном λ минимизировать функцию Лагранжа $\Lambda(P_1, \lambda)$.

Для каждой итерации t необходимо:

а) вычислить скорости передачи данных для обоих пользователей и индекс Джайна

$$R_1^{(t)} = \log_2 \left(1 + \frac{P_1^{(t-1)} |h_1|^2}{\sigma^2 + (P_{max} - P_1^{(t-1)}) |h_2|^2} \right),$$

$$R_2^{(t)} = \log_2 \left(1 + \frac{(P_{max} - P_1^{(t-1)}) |h_2|^2}{\sigma^2 + P_1^{(t-1)} |h_1|^2} \right),$$

$$F^{(t)} = \frac{(R_1^{(t)} + R_2^{(t)})^2}{2((R_1^{(t)})^2 + (R_2^{(t)})^2)},$$

б) вычислить градиент функции Лагранжа

$$g = \frac{d\Lambda}{dP_1} = -\frac{dR_1}{dP_1} - \frac{dR_2}{dP_1} + \lambda \frac{dF}{dP_1},$$

где $\frac{dR_1}{dP_1} = \frac{|h_1|^2}{\ln(2)(\sigma^2 + (P_{max} - P_1) |h_2|^2)}$,

$$\frac{dR_2}{dP_1} = \frac{|h_2|^2}{\ln(2)(\sigma^2 + P_1 |h_2|^2)},$$

$$\frac{dF}{dP_1} = \frac{(R_1 + R_2)(R_2^2 dR_1 / dP_1 - R_1^2 dR_2 / dP_1)}{(R_1^2 + R_2^2)^2},$$

в) обновить значение мощности для следующей итерации

$$P_1^{(t+1)} = P_1^{(t)} + \alpha g,$$

г) ограничить значение мощности

$$P_1^{(t+1)} \in [0, P_{max}],$$

Получить результаты оптимизации при текущем значении λ : $P_1^* = P_1^{(t)}, P_2^* = P_{max} - P_1^{(t)}, R_1^* = R_1^{(t)}, R_2^* = R_2^{(t)}, F^* = F^{(t)}$.

2.2. Проверка ограничения.

Если $|F - F_{target}| < \epsilon_F$, алгоритм завершен, в противном случае:

- если $F^* < F_{target}$, увеличить λ на ∂_λ , $\lambda + \partial_\lambda$, а
- если $F^* > F_{target}$, уменьшить λ на ∂_λ , $\max(\lambda - \partial_\lambda, 0)$.

3. Выход.

Результат выполнения алгоритма оптимизации – $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} P_1^* \\ P_2^* \end{bmatrix}$.

Чтобы лучше понять работу приведенного алгоритма оптимизации, можно представить его в виде простого псевдокода:

```

Инициализация P1, P2
Повторять:
    Вычислить скорости R1, R2
    Найти индекс Джайна F
    Если F < F_target:
        увеличить lambda
    Иначе:
        уменьшить lambda
    Обновить P1, P2 методом градиентного спуска
    До тех пор, пока |F - F_target| < epsilon
    
```

Таким образом, решение задачи оптимизации становится прозрачным и легко воспроизводимым в численных экспериментах.

Например, для системы связи с двумя пользователями:

- при $P_{max} = 1, h_1 = 0,8, h_2 = 0,2, \sigma^2 = 0,5, F_{target} = 0,9$

;

- при параметрах алгоритма $\lambda^{(0)} = 0,1, \alpha = 0,001, \partial_\lambda = 0,001, \epsilon_F = 0,001$, в результате выполнения описанного алгоритма оптимизации получим $P_1^* = 0,0629, P_2^* = 0,9371, R_1^* = 0,0519, R_2^* = 0,1038, F^* = 0,9, \lambda^* = 0,13$.

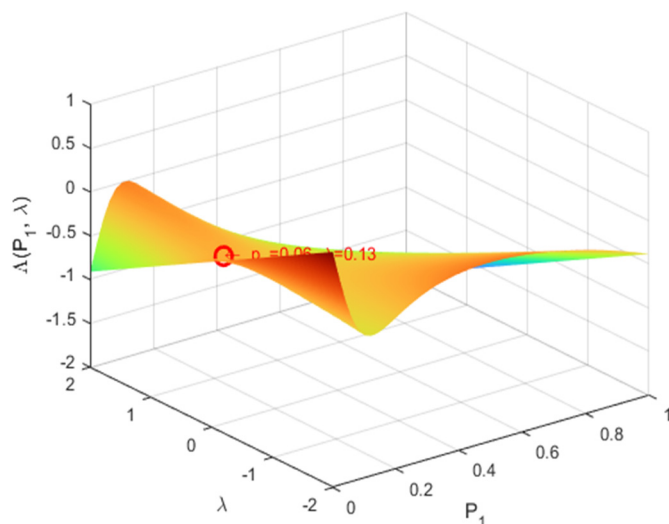


Рис. 5. Результат решения задачи оптимизации

Результат решения оптимизационной задачи можно отобразить на поверхности функции Лагранжа (см. рис. 5).

Данный пример является простой иллюстрацией возможности решения многомерной оптимизационной задачи (9) путем применения известных численных методов.

Заключение

В данной работе рассмотрены основные подходы к решению задачи справедливого распределения мощности в системах PD-NOMA. Показано, что традиционная цель максимизации суммарной пропускной способности приводит к существенной дискриминации «слабых» пользователей. Такая дискриминация приводит к тому, что «слабые» пользователи могут получить полный отказ в обслуживании.

Для устранения этой проблемы применяются различные метрики справедливости, включая индекс Джейна. Рассмотрен пример решения задачи оптимизации численным методом с использованием традиционного метода множителей Лагранжа и также традиционного метода градиентного спуска для системы связи PD-NOMA с двумя пользователями.

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что они могут быть интегрированы в механизмы управления ресурсами в сетях мобильной связи. Особенно важным это становится для сценариев межмашинной коммуникации и Интернета вещей, где в сети присутствует огромное количество устройств с разными характеристиками каналов. Справедливое распределение мощности между такими устройствами обеспечивает техническую эффективность в предоставлении сервисов и предотвращает дисбаланс в обслуживании различных пользователей.

Литература

1. Ghanbarzadeh V., Zahabi M., Amiriara H., Jafari F., Kaddoum G. Resource Allocation in NOMA Networks: Convex Optimization and Stacking Ensemble Machine Learning. // IEEE Open Journal of the Communications Society. 2024. Vol. 5, pp. 5276-5288. doi: 10.1109/OJCOMS.2024.3450207.
2. Крейнделин В.Б., Варукина Л.А. Обработка и прекодирование сигналов в системе с неортогональным доступом и с разделением по мощности // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2024. Т. 18, № 6. С. 38-45.
3. Крейнделин В.Б., Варукина Л.А. Прекодирование и группирование сигналов пользователей в системе PD-NOMA на линии «вниз» // Электросвязь. 2024. № 10. С. 13-19.
4. Belmekki B., Alouini M.-S. NOMA as the Next-Generation Multiple Access in Nonterrestrial Networks. Proceedings of the IEEE. – 2024. Vol. 112. Issue 9, pp. 1303-1345. doi: 10.1109/JPROC.2024.3496775.
5. Tuong V., Cho S. Deep-Learning-Based Resource Allocation for 6G NOMA-Assisted Backscatter Communications. IEEE Internet of Things Journal. 2024. Vol. 11. Issue 19, pp. 32234-32243. doi: 10.1109/IJOT.2024.3424728.
6. Kreindel V.B., Varukina L.A. Signal Demodulation Method in the PD-NOMA System Using a Nonlinear Algorithm with Successive Cancellation of Demodulated Components // Journal of Communications Technology and Electronics. 2023. Vol. 68, № 7, pp. 765-770.
7. Бакулин М.Г., Варукина Л.А., Крейнделин В.Б. Технология MIMO. Принципы и алгоритмы. М.: Горячая линия – Телеком, 2014. 242 с.
8. Крейнделин В.Б., Варукина Л.А. Нелинейный алгоритм демодуляции сигналов в системе NOMA в случае пространственного мультиплексирования // Электросвязь. 2023. № 5. С. 33-39.
9. Бакулин М.Г., Бен Режеб Т.Б.К., Крейнделин В.Б. и др. Неортогональный множественный доступ (NOMA) как основа систем связи 5G и 6G. М.: Горячая линия-Телеком, 2024. 264 с.
10. Abuajwa O., Roslee M., Yusoff Z., Chuan L., Leong P. Resource Allocation for Throughput versus Fairness Trade-Offs under User Data Rate Fairness in NOMA Systems in 5G Networks // Applied Sciences. 2022. Vol. 12. Issue 7, 3226. <https://doi.org/10.3390/app12073226>
11. Trankatwar S., Wali P. Power Allocation for Sum Rate Maximization Under SIC Constraint in NOMA Networks. 16th International Conference on COMMunication Systems & NETWORKS (COMSNETS), Bengaluru, India. 2024, pp. 646-650. doi: 10.1109/COMSNETS59351.2024.10427001.
12. Гончаров В.А. Методы оптимизации: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2025. 191 с.
13. Pliatsios D., Sarigiannidis P. Resource Allocation Combining Heuristic Matching and Particle Swarm Optimization Approaches: The Case of Downlink NOMA // Information. 2019. Vol. 10, No. 11. P. 336.
14. Xu P., Cumanan K. Optimal Power Allocation Scheme for Non-Orthogonal Multiple Access With α -Fairness // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. 2017. Vol. 35, No. 10, pp. 2357-2369.
15. Jacob J.L., Abrao T. NOMA Systems Optimization to Ensure Maximum Fairness to Users. 2020. URL: <https://arxiv.org/pdf/2001.03827>
16. Hojeij M-R., Abdel Nour C., Farah J., Douillard C. Weighted Proportional Fair Scheduling for Downlink NOMA. 2017. URL: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1710.10857>
17. Sirait R., Hardjawana W., Wibisono G. Performance of Downlink NOMA for a Massive IoT Network Over a Nakagami-m Fading Channel With Optimized Power Allocation. // IEEE Access. 2023. Vol. 11, pp. 67779-67790, 2023. doi: 10.1109/ACCESS.2023.3288898.

PROBLEM OF FAIR POWER ALLOCATION IN PD-NOMA SYSTEM

Vitaly B. Kreyndelin, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia, vitkrend@gmail.com

Lidia A. Varukina, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia, arukina@rambler.ru

Abstract

Power Domain Non-Orthogonal Multiple Access (PD-NOMA) systems are among the most promising wireless communication technologies, enabling significantly more efficient utilization of the limited radio spectrum. The key feature of PD-NOMA is that multiple users simultaneously share the same time-frequency resource, while their signals are separated in the power domain. On the receiver side, successive interference cancellation (SIC) is employed, allowing the recovery of payload even in the presence of overlapping signals with different power levels. This approach paves the way for higher throughput and the ability to serve more users compared to orthogonal access schemes. Despite its advantages, PD-NOMA also has significant drawbacks. In practical scenarios, differences in users' channel conditions may lead to an imbalance in resource allocation. Users closer to the base station with better channel quality achieve higher efficiency with lower energy consumption, while those with weaker channels are placed at a disadvantage. This creates the risk of unfair service and its degraded quality. This work investigates methods for fair power allocation among users, aiming to balance the maximization of system throughput with equal access to network resources. Various fairness criteria are analyzed, including Jain's index, the Gini coefficient, proportional fairness, and weighted fairness. The study demonstrates how these metrics can be integrated into the power allocation optimization problem in PD-NOMA systems. As an example, we present a solution to the power allocation optimization problem with a Jain's index constraint, formulated using the Lagrangian multiplier method. The obtained results confirm the effectiveness of the proposed approach and show the potential for improving robustness and fairness of service within PD-NOMA systems.

Keywords: NOMA, PD-NOMA, fairness, Jain Index, Jini Coefficient, mobile communications

References

- [1] V. Ghanbarzadeh, M. Zahabi, H. Amiriara, F. Jafari, G. Kaddoum, "Resource Allocation in NOMA Networks: Convex Optimization and Stacking Ensemble Machine Learning," *IEEE Open Journal of the Communications Society*. 2024. Vol. 5, pp. 5276-5288. doi: 10.1109/OJCOMS.2024.3450207.
- [2] V.B. Kreyndelin, L.A. Varukina, "Processing and precoding in PD-NOMA system," *T-Comm*, 2024, Vol. 18, No. 6, pp. 38-45. (in Russian)
- [3] V.B. Kreyndelin, L.A. Varukina, "Precoding and user grouping at downlink of PD-NOMA system," *Elektrosvyaz*, 2024, No. 10, pp. 13-19. (in Russian)
- [4] B. Belmekki, M.-S. Alouini, "NOMA as the Next-Generation Multiple Access in Nonterrestrial Networks," *Proceedings of the IEEE*, 2024. Vol. 112. Issue 9, pp. 1303-1345. doi: 10.1109/JPROC.2024.3496775.
- [5] V. Tuong, S. Cho, "Deep-Learning-Based Resource Allocation for 6G NOMA-Assisted Backscatter Communications," *IEEE Internet of Things Journal*. 2024. Vol. 11. Issue 19, pp. 32234-32243. doi: 10.1109/JIOT.2024.3424728.
- [6] V.B. Kreyndelin, L.A. Varukina, "Signal Demodulation Method in the PD-NOMA System Using a Nonlinear Algorithm with Successive Cancellation of Demodulated Components," *Journal of Communications Technology and Electronics*, 2023. Vol. 68, No. 7, pp. 765-770.
- [7] M.G. Bakulin, L.A. Varukina, V.B. Kreyndelin, "Technology of MIMO: principles and algorithms," Moscow, Hot Line – Telecom, 2014, 242 p. (in Russian)
- [8] V.B. Kreyndelin, L.A. Varukina, "Non-linear demodulation algorithm for NOMA system using spatial multiplexing," *Electrosvyaz*. 2023. Issue 5, pp. 33-39. (in Russian)
- [9] M.G. Bakulin, T.B.K. Ben Rejeb, V.B. Kreyndelin, et al., "Non-Orthogonal Multiple Access (NOMA) as the Basis of 5G and 6G Communication Systems," Moscow, Hot Line – Telecom, 2024, 264 p. (in Russian)
- [10] O. Abuajwa, M. Roslee, Z. Yusoff, L. Chuan, P. Leong, "Resource Allocation for Throughput versus Fairness Trade-Offs under User Data Rate Fairness in NOMA Systems in 5G Networks," *Applied Sciences*. 2022. Vol. 12. Issue 7, 3226. <https://doi.org/10.3390/app12073226>
- [11] S. Trankatwar, P. Wali, "Power Allocation for Sum Rate Maximization Under SIC Constraint in NOMA Networks," *16th International Conference on COMMunication Systems & NETWORKS (COMSNETS)*, Bengaluru, India. 2024, pp. 646-650. doi: 10.1109/COMSNETS59351.2024.10427001.
- [12] V.A. Goncharov, "Optimization Methods: textbook for universities," Moscow. Uright, 2025, 191 p. (in Russian)
- [13] D. Pliatsios, P. Sarigiannidis, "Resource Allocation Combining Heuristic Matching and Particle Swarm Optimization Approaches: The Case of Downlink Non-Orthogonal Multiple Access," *Information*, 2019, Vol. 10, No. 11, p. 336.
- [14] P. Xu, K. Cumanan, "Optimal Power Allocation Scheme for Non-Orthogonal Multiple Access With α -Fairness," *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, 2017. Vol. 35, No. 10, pp. 2357-2369.
- [15] S.M.R. Islam, N. Avazov, O.A. Dobre, K.S. Kwak, "Power-domain non-orthogonal multiple access (NOMA) in 5G systems: Potentials and challenges," *IEEE Communications Surveys & Tutorials*, 2017. Vol. 19. No. 2, pp. 721-742.
- [16] M-R. Hojeij, C. Abdel Nour, J. Farah, C. Douillard, "Weighted Proportional Fair Scheduling for Downlink Non-Orthogonal Multiple Access," 2017. Available at: <https://doi.org/10.48550/arXiv.1710.10857>
- [17] R. Sirait, W. Hardjawana, G. Wibisono, "Performance of Downlink NOMA for a Massive IoT Network Over a Nakagami-m Fading Channel With Optimized Power Allocation," *IEEE Access*. 2023. Vol. 11, pp. 67779-67790, 2023. doi: 10.1109/ACCESS.2023.3288898.

Information about authors:

Vitaly B. Kreyndelin, Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI), Doctor of technical sciences, Professor, Moscow, Russia

Lidia A. Varukina, Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI), PhD., applicant, Russia