

# АНАЛИТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ГРАДИЕНТНЫХ ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН

DOI: 10.36724/2072-8735-2026-20-2-23-30

Manuscript received 14 December 2025;

Accepted 16 February 2026

**Савотченко Сергей Евгеньевич,**

Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе, Москва, Россия;  
Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия;  
МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия, [savotchenko@mirea.ru](mailto:savotchenko@mirea.ru)

**Ключевые слова:** волоконная оптика, оптоволокно, математическая модель, оптический волновод, волноводная мода, краевая задача, точное решение

Работа посвящена аналитическому моделированию оптических градиентных волокон с изменяющимся в зависимости от радиального расстояния показателем преломления, широко применяемых в оптоволоконных телекоммуникационных системах. Рассматриваются цилиндрические волокна с круговым сечением. В основе рассматриваемых моделей таких градиентных волокон лежат радиальные профили показателя преломления. Предложены модели градиентных волокон с новой формой зависимости показателя преломления от радиуса волокна. Математическая формулировка моделей представляет собой краевую задачу для стационарного волнового уравнения (уравнения Гельмгольца) с переменными коэффициентами, которые определяются выбранными формами радиального профиля показателя преломления. Рассмотрены профили показателя преломления, допускающие нахождение точных аналитических решений сформулированных уравнений, описывающие поперечное распределение электрического поля в волокне. Предложена модель цилиндрического градиентного волокна с круговым сечением на основе нового градиентного профиля показателя преломления в сердцевине и в оболочке волокна. Для такого профиля найдено новое точное аналитическое решение сформулированной краевой задачи, которое является ограниченным и непрерывным в рассматриваемой волноводной области. Радиальное распределение поля в сердцевине выражается через функцию Уиттекера со вторым полуцелым индексом, а в оболочке волокна – через функцию Макдональда с нецелым индексом. Выявлены основные различия между поперечными распределениями, соответствующими предложенным обобщенным профилем и классическим параболическим профилем.

**Информация об авторе:**

**Савотченко Сергей Евгеньевич**, д.ф.-м.н. Российский государственный геологоразведочный университет имени Серго Орджоникидзе; Московский технический университет связи и информатики; МИРЭА – Российский технологический университет, Москва, Россия, ORCID 0000-0002-7158-9145

**Для цитирования:**

Савотченко С.Е. Аналитические решения в моделях градиентных оптических волокон // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2026. Том 20. №2. С. 23-30.

**For citation:**

S.E. Savotchenko, "Analytical solutions in the models of the graded-index optical fibers", T-Comm, 2026, vol. 20, no.2, pp. 23-30. (in Russian)

## Введение

Современные средства телекоммуникаций немислимы без такого их структурного элемента как оптические волокна [1]. Оптоволоконные системы связи находят широкое применение в различных устройствах и технологиях [2, 3]. В связи с этим исследования по совершенствованию технологий оптоволоконной связи являются актуальными и востребованными [4].

Разработке и исследованию свойств оптических волокон различных типов посвящено большое количество литературы [5, 6]. Большое значение имеют работы по теоретическому моделированию оптоволоконных систем связи и передачи данных [7]. При этом важное место в таких исследованиях занимают проблемы получения не только численных результатов моделирования [8], но точных аналитических решений сформулированных уравнений [9-11].

При формулировке математических моделей оптических волокон учитываются многие факторы (материал, геометрия, структурная композиция). Самой распространенной формой являются цилиндрические оптические волокна с круговым сечением [12]. Наиболее важным показателем, отражающим характерные свойства модельных волокон, является показатель преломления материала, из которого изготовлено волокно. В зависимости от его вида выделяют два самых распространенных класса волокон: ступенчатые – с постоянным показателем преломления в различных структурных участках волокна, а также градиентные – показатель преломления в определенных структурных участках волокна зависит от его радиуса (то есть расстояния от оси симметрии цилиндрического волокна) [13].

Типичной структурой цилиндрического волокна является сердцевина с показателем преломления  $n_{co}$ , вокруг которой имеется оболочка с другим показателем преломления  $n_{cl}$  (Рис.1). В градиентных волокнах эти показатели преломления, или один из них, являются функциями от расстояния от центра волокна  $r$  (эта величина играет роль полярного радиуса в цилиндрических координатах) [14].

В зависимости от выбора этих функций может появиться возможность найти точное решение краевой задачи для волнового уравнения, описывающее стационарные волноводные моды моделируемого оптического волокна. Наиболее хорошо изученным случаем является параболическая зависимость от квадрата показателя преломления сердцевины в виде [15]

$$n_{co}^2(r) = n_{co}^2 \left( 1 - \Delta_{co} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right), r < a, \quad (1)$$

где  $a$  – радиус сердцевины волокна, и

$$\Delta_{co} = \frac{n_{co}^2 - n_{cl}^2}{n_{co}^2} \quad (2)$$

Показатель преломления оболочки считается постоянным ( $n_{cl} = \text{const}$ ,  $r > a$ ). Также в (1) величина  $n_{co}$  обозначает константу. Такая форма функции (1) допускает получения точного аналитического решения волнового уравнения, выражающегося через различные цилиндрические функции Бесселя [16].

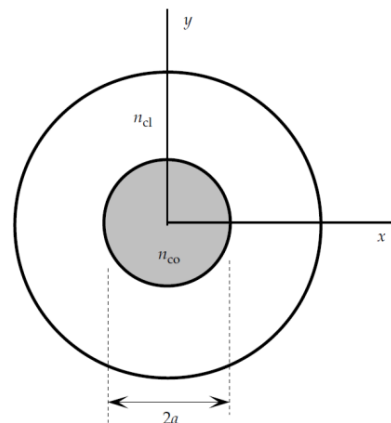


Рис. 1. Сердцевина и оболочка оптического волокна

Также широко распространенным обобщением формы профиля показателя преломления (1) при моделировании свойств градиентных волокон является функция в виде [17]

$$n_{co}^2(r) = n_{co}^2 \left( 1 - \Delta_{co} \left( \frac{r}{a} \right)^\alpha \right), r < a, \quad (3)$$

где  $\alpha$  – параметр профиля (при  $\alpha=2$  из (3) получается параболический профиль (1)). Выражения (3) иногда называют  $\alpha$ -профилем.

Помимо профилей (1) и (3) рассматриваются и другие, в том числе и нелинейные, когда показатель преломления зависит от интенсивности света  $I$ , то есть  $n=n(I)$  [18, 19]. Однако в цилиндрических волноводах такие формы профиля исследуются только численными методами [12].

В данной работе рассматриваются профили показателя преломления, отличные от параболического в сердцевине и с переменным показателем преломления оболочки, которые допускают нахождения точных аналитических решений волнового уравнения, описывающего стационарные волноводные моды. Использование таких профилей в моделях оптических градиентных волноводов и, в частности, волокон, позволяет избежать численного решения уравнений (которые, априори, приближенные), а также наглядно проанализировать их дисперсионные свойства [20].

## 1 Основные модельные уравнения

При моделировании оптических волноводных структур в первую очередь следует определить геометрию рассматриваемого волновода и свойства материалов, из которых он состоит. Рассмотрим цилиндрическое волокно кругового сечения (рис. 1) с сердцевиной радиуса  $a$ , которое приближенно будет считаться много меньше радиуса волокна. Такое допущение при формулировке математической модели возможно, если считать, что интенсивность света в оболочке должна быстро убывать с ростом расстояния от сердцевины. Другими словами, считается, что поле слабо проникает в материал оболочки и быстро в нем затухает. Также будем рассматривать только немагнитные материалы без диэлектрических потерь.

Несмотря на то, что в реальных волокнах присутствуют диэлектрические потери, известно, что при определенных длинах волн/частотах лазерные импульсы могут распространяться практически без потерь, то есть их можно считать пренебрежительно малыми по сравнению с интенсивностью входящего излучения.

Показатель преломления волокна представим в виде:

$$n = \begin{cases} n_{co}, & r < a, \\ n_{cl}, & r > a. \end{cases} \quad (4)$$

В (4) если оба показателя преломления  $n_{co}$  сердцевины  $n_{cl}$  оболочки постоянные величины, то модель будет описывать ступенчатое волокно, а если хотя бы один из них будет зависеть от пространственных координат, в частности, от полярного радиуса  $r$ , то модель будет описывать градиентное волокно.

Будем считать, что магнитная проницаемость материала волокна везде одинакова и равна  $\mu_0$ . Будем рассматривать только электрическую составляющую электромагнитного поля. Тогда уравнения Максвелла для напряженностей электрического и магнитного полей позволяют получить волновое уравнение для вектора напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в виде

$$\Delta \mathbf{E} = \varepsilon_0 \mu_0 n^2 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (5)$$

где  $\varepsilon_0$  – диэлектрическая постоянная,  $\Delta$  – оператор Лапласа.

Для монохроматической волны при использовании представления  $\mathbf{E} = \mathbf{E} \exp(-i\omega t)$ , где  $\omega$  – частота,  $t$  – время, волновое уравнение (5) переходит в уравнение Гельмгольца

$$\Delta \mathbf{E} + (kn)^2 \mathbf{E} = 0, \quad (6)$$

где  $k = \varepsilon_0 \mu_0 \omega^2$  – волновое число.

Поскольку оператор Лапласа представим виде

$$\Delta = \Delta_{\perp} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (7)$$

где  $\Delta_{\perp}$  – поперечная часть оператора Лапласа, а волна распространяется вдоль оси  $z$  (оси симметрии цилиндрического волокна с круговым сечением), то при использовании представления  $\mathbf{E} = \mathbf{E} \exp(i\beta z)$ , где  $\beta$  – константа распространения, из уравнения (6) получается

$$\Delta_{\perp} \mathbf{E} + (k^2 n^2 - \beta^2) \mathbf{E} = 0. \quad (8)$$

Если выделить поперечную составляющую электрического поля  $\mathbf{E}_{\perp}$ , то его можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{e}_z E_z, \quad (9)$$

где  $\mathbf{e}_z$  – единичный вектор вдоль оси  $z$ . Как известно, достаточно определить  $z$ -ую компоненту полей [14]. Поэтому далее будем рассматривать уравнения только для компоненты  $E_z$ .

В силу цилиндрической симметрии волокна целесообразно перейти к цилиндрическим координатам  $(r, \varphi, z)$ , причем поперечная часть оператора Лапласа будет:

$$\Delta_{\perp} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (10)$$

В парааксиальном приближении [14, 21] уравнение (8) для компоненты поля в цилиндрических координатах примет вид

$$\Delta_{\perp} E_z + (k^2 n^2 - \beta^2) E_z = 0. \quad (11)$$

В силу цилиндрической симметрии решение уравнение (11) должно быть периодическим по угловой координате  $\varphi$ , поэтому можно использовать представление

$$E_z(r, \varphi) = u(r) \exp(im\varphi), \quad (12)$$

где  $m = 0, 1, \dots$ , – целочисленный параметр, определяющий порядок волноводной моды,  $u(r)$  – радиальная часть напряженности электрического поля (радиальное распределение), которое при заданном значении  $m$  соответствует волноводной моде порядка  $m$ . Подстановка (12) в (11) с учетом (10) позволяет получить уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( k^2 n^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) u = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) представляет собой основное уравнение теории оптических волноводов, используемое при моделировании цилиндрических волокон кругового сечения.

Поскольку в волокне все компоненты полей должны быть непрерывными, то на границе сердцевины при  $r=a$  для радиального распределения поля должны выполняться условия сопряжения:

$$u(a-0) = u(a+0), \quad (14)$$

$$u'(a-0) = u'(a+0), \quad (15)$$

Здесь в (14) и (15) и далее понимаются левосторонние и правосторонние пределы, соответственно:  $u(a \pm 0) = \lim_{r \rightarrow a \pm 0} u(r)$  и  $u'(a \pm 0) = \lim_{r \rightarrow a \pm 0} u'(r)$ , а штрих обозначает производную по  $r$ .

Поскольку мы считаем, что  $a \ll R$ , где  $R$  радиус волокна, то уравнение (13) решается в области  $0 < r < +\infty$ , причем его решение должно быть всюду ограниченным, и в частности удовлетворять условию на бесконечности:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} u(r) = 0, \quad (16)$$

которое часто записывают в эквивалентной форме как:  $u(r) \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$ .

Таким образом, математическая формулировка модели для определения поперечного распределения электрического поля в цилиндрическом волокне кругового сечения представляет собой краевую задачу сопряжения для уравнения (13) со скачкообразным изменением коэффициента в соответствии с (4). Постановка задачи: требуется найти непрерывное ограниченное решение уравнения (13), удовлетворяющее граничным условиям (14)-(16). Для ее решения необходимо конкретизировать зависимость показателя преломления  $n$  от радиуса  $r$  в (4).

Следует отметить, что в уравнении (13) показатель преломления считается зависящим от одной пространственной координаты, а именно, от полярного радиуса  $r$ . Это возможно в случае цилиндрической симметрии рассматриваемой системы. Зависимость от радиуса имеет место в том числе и для ступенчатых волокон, поскольку в разных участках сечения

волокна значения показателя преломления различны, хотя и постоянные в определенных его зонах. Другими словами, значения показателя преломления меняются скачкообразно при переходе из одной структурной зоны ступенчатого волокна в другую. Следовательно, коэффициент в уравнении (13) имеет скачек, то есть рассматриваемая модель волокна основана на уравнении с разрывными коэффициентами.

Однако в случае ступенчатых волокон уравнение (13) представляется в виде нескольких уравнений с постоянными коэффициентами на различных структурных участках волокна. Соответствующие решения «сшиваются» граничными условиями на границах структурных элементов волокна. Решения таких задач для ступенчатых волокон представляет собой простую задачу.

Для градиентных волокон основная сложность при аналитическом моделировании связана с нахождением решения уравнения с переменными коэффициентами. Если существует точное аналитическое решение уравнения с переменными коэффициентами, то оно, как правило, выражается через специальные функции математической физики. Причем в случае нахождения решения рассматриваемой краевой задачи для таких функций необходимо, чтобы они были непрерывны и ограничены в области поиска решения. А поскольку требуется выполнения условия непрерывности всех компонент поля, то рассматриваемая компонента электрического поля как решение краевой задачи, должна характеризоваться и непрерывной производной в области поиска решения. Другими словами, решение краевой задачи должно быть гладким.

Поскольку решения краевой задачи (13)-(16) зависят от целочисленной переменной  $m$ , то их можно говорить, что они описывают волноводные моды порядка  $m$ . Волноводная мода нулевого порядка (при  $m=0$ ) часто называется фундаментальной или основной.

Также следует отметить, что константа распространения изначально считается неизвестной в задачах моделирования волноводов. Она определяется в ходе ее решения и, как правило, выражается через величины, характеризующие геометрические и оптические свойства материалов волноводной структуры. Поэтому сформулированная краевая задача (13)-(16) модели волокна фактически представляет собой задачу на собственные значения. В этом контексте волноводные моды являются собственными функциями задачи, а константа распространения данной моды представляет собой собственное значение. Поскольку для каждого порядка волноводной моды они различны, то можно говорить о дискретном спектре собственных значений, то есть константы распространения.

## 2 Радиальные распределения поля для различных градиентов показателя преломления

Для ступенчатых волокон  $n_{co}$  и  $n_{cl}$  в (4) считаются константами, не зависящими от радиуса  $r$ . В этом случае уравнение (13) примет может быть представлено в виде двух уравнений с постоянными коэффициентами на различных участках (сечениях) волокна:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( k^2 n_{co}^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) u = 0, r < a. \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( k^2 n_{cl}^2 - \beta^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) u = 0, r > a. \quad (18)$$

Уравнение (17) описывает поперечное распределение компоненты электрического поля в сердцевине волокна, а уравнение (18) распределение этого поля в оболочке. Оба этих уравнения относятся к уравнениям Бесселя. Уравнение (17) имеет два линейно независимых решения, описываемых цилиндрическими функциями первого и второго рода, а уравнение (18) имеет два линейно независимых решения, описываемых цилиндрическими функциями мнимого аргумента первого и второго рода (или модифицированными цилиндрическими функциями).

Для случая ступенчатого волокна хорошо известно решение задачи (14)-(18) при условии, что  $n_{cl} < \beta/k < n_{co}$  [21]:

$$u(r) = u_a \begin{cases} \frac{J_m(qr)}{J_m(qa)}, r < a, \\ \frac{K_m(\kappa r)}{K_m(\kappa a)}, r > a, \end{cases} \quad (19)$$

где  $u_a$  – амплитуда поля на границе сердцевина-оболочка,

$$q^2 = (n_{co}k)^2 - \beta^2, \quad (20)$$

$$\kappa^2 = \beta^2 - (n_{cl}k)^2, \quad (21)$$

$J_m(x)$  – функция Бесселя первого рода,  $K_m(x)$  – функция Макдональда (модифицированная функция Бесселя / функция Бесселя мнимого аргумента второго рода).

При нахождении решения (19) было учтено, что в области  $0 < r < a$  (в частности, в начале координат), ограниченной является только функция Бесселя первого рода, в области  $r > a$  (в частности, на бесконечности), ограниченной является только функция Макдональда, которая асимптотически приближается к нулю на бесконечности, то есть удовлетворяет условию (16).

Решение (19) удовлетворяет условию (14) непрерывности радиального распределения поля на границе сердцевина-оболочка. Для того, чтобы полученное решение (19) удовлетворяло условию (15) непрерывности производной радиального распределения поля на границе сердцевина-оболочка (то есть решение (19) должно быть гладким), следует его подставить в (15) и получить соотношение, связывающее константу распространения с параметрами задачи. В результате такой подстановки получается, что константа распространения определяется как положительное решение уравнения:

$$q \frac{J'_m(qa)}{J_m(qa)} = \kappa \frac{K'_m(\kappa a)}{K_m(\kappa a)} \quad (22)$$

Данное уравнение, определяющее зависимость константы распространения от физических и геометрических характеристик волокна, называют дисперсионным. Ясно, что данное трансцендентное уравнение может быть решено только численными методами.

Рассмотрим теперь градиентное волокно с показателем преломления в виде:

$$n = \begin{cases} n_{co}, & r < a, \\ n_{cl} \left( 1 - \Delta_{cl} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right)^{1/2}, & r > a, \end{cases} \quad (23)$$

где  $\Delta_{cl}$  – параметр плавности перехода значения показателя преломления. В такой модели сердцевина характеризуется постоянным значением показателем преломления  $n_{co}$ , а в обкладке показатель преломления монотонно убывает от значения  $n_{co}$  до  $n_{cl}$ .

Предложенный градиентный профиль показателя преломления (23) представляет собой плавный, то есть более реалистичный, переход от одного значения показателя преломления в сердцевине к другому в обкладке.

В такой постановке задачи с профилем (23) уравнение (17) остается неизменным, а вместо (18) получится уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \left( \kappa^2 + n_{cl}^2 k^2 \Delta_{cl} \left( \frac{a}{r} \right)^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) u = 0, \quad r > a. \quad (24)$$

Ограниченное решение этого уравнения, удовлетворяющее условию на бесконечности (16) также выражается через функцию Макдональда, но с другим порядком, который уже не будет в общем случае целым числом.

Следовательно, решение краевой задачи для уравнений (17) и (24) при условиях (14)-(16) имеет вид:

$$u(r) = u_a \begin{cases} \frac{J_m(qr)}{J_m(qa)}, & r < a, \\ \frac{K_\nu(\kappa r)}{K_\nu(\kappa a)}, & r > a, \end{cases} \quad (25)$$

где

$$\nu = \sqrt{m^2 + \Delta_{cl} (akn_{cl})^2}. \quad (26)$$

Данное решение краевой задачи получено при условии при условии, что  $n_{cl} < \beta/k < n_{co}$ . Очевидным образом при  $\Delta_{cl} \rightarrow 0$  решение (25) переходит в известное решение (19), так как из (26) следует, что  $\nu \rightarrow m$ . Отличие решения (25) от (19) заключается в том, что индекс функции Макдональда, определяемый (26), является нецелым числом, и при положительном значении параметра плавности перехода значения показателя преломления  $\Delta_{cl}$  превосходит порядок волноводной моды  $m$  ступенчатого волокна.

Решение (25) удовлетворяет условию (14) непрерывности радиального распределения поля на границе сердцевина-обкладка. Для того, чтобы полученное нами решение (25) удовлетворяло условию (15) непрерывности производной радиального распределения поля на границе сердцевина-обкладка (то есть решение (25) должно быть гладким в области поиска решения), следует его подставить в (15) и получить соотношение, связывающее константу распространения с параметрами задачи. В результате такой подстановки получается, что константа распространения определяется как положительное решение уравнения:

$$q \frac{J'_m(qa)}{J_m(qa)} = \kappa \frac{K'_\nu(\kappa a)}{K_\nu(\kappa a)}, \quad (27)$$

которое при  $\Delta_{cl} \rightarrow 0$  переходит в дисперсионное уравнение (22) для ступенчатого волокна [12, 14, 21].

Также как и дисперсионное уравнение (22), данное трансцендентное уравнение (27) может быть решено только численными методами. Для упрощения численного анализа уравнения (27) можно привести к виду

$$s \frac{J'_m(s)}{J_m(s)} = \sqrt{A^2 - s^2} \frac{K'_\nu(\sqrt{A^2 - s^2})}{K_\nu(\sqrt{A^2 - s^2})}, \quad (28)$$

где обозначено  $A^2 = (ak)^2(n_{co}^2 - n_{cl}^2)$  и  $s = qa$  – новая неизвестная. Здесь учтено, что в силу (20) и (21) выполняется соотношение:  $\kappa^2 = k^2(n_{co}^2 - n_{cl}^2) - q^2$ .

Анализ показал, что дисперсионное уравнение (28) имеет корни в интервале  $0 < s < A$ , которые зависят от трех параметров, включая порядок моды, то есть  $s_m = s_m(\nu, A)$ . Следовательно, получив решение дисперсионного уравнения (28), можно записать дискретный спектр собственных значений краевой задачи для уравнений (17) и (24) при условиях (14)-(16), определяющий допустимые значения константы распространения, при которых могут возбуждаться волноводные моды соответствующего порядка:

$$\beta_m^2 = (n_{co} k)^2 - (s_m / a)^2. \quad (29)$$

Таким образом, найдено точное решение краевой задачи для уравнений (17) и (24) при условиях (14)-(16): собственные функции определяются (25), а собственные значения – (29).

Следующим шагом дальнейшего обобщения градиентного профиля (23) может быть учет зависимости показателя преломления сердцевинны от радиуса. Поскольку самым распространенным видом такой зависимости показателя преломления в градиентных волокнах является параболическая [15, 22-24], то рассмотрим теперь модель, в которой показатель преломления определяется функцией вида:

$$n^2 = \begin{cases} n_{co}^2 \left( 1 - \Delta_{co} \left( \frac{r}{a} \right)^2 \right), & r < a, \\ n_{cl}^2 \left( 1 - \Delta_{cl} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right), & r > a. \end{cases} \quad (30)$$

В такой постановке задачи с учетом профиля (30) уравнение (24) остается неизменным, а вместо (17) получится уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \left( n_{co}^2 k^2 - \beta^2 - n_{co}^2 k^2 \Delta_{co} \left( \frac{r}{a} \right)^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) u = 0, \quad r > a. \quad (31)$$

Общее решение уравнения (31) может быть записано через различные специальные функции, например, через гипергеометрические функции или конфлюэнтные функции Хойна [25]. Однако его можно привести заменой переменных к уравнению Уиттрекера, которое имеет два линейно независимых решения, называемых функциями Уиттекера, причем только одна из них ограничена в начале координат.

С учетом этого решение краевой задачи для уравнений (24) и (31) при условиях (14)-(16) можно записать в виде:

$$u(r) = u_a \begin{cases} \frac{a M_{l,m/2}(pr^2)}{r M_{l,m/2}(pa^2)}, & r < a, \\ \frac{K_\nu(\kappa r)}{K_\nu(\kappa a)}, & r > a, \end{cases} \quad (32)$$

где  $M_{\alpha,\beta}(x)$  – функция Уиттекера [25],

$$l = \frac{a(k^2 n_{co}^2 - \beta^2)}{4n_{co}\sqrt{\Delta_{co}}}, \quad (33)$$

$$p = \frac{n_{co}\sqrt{\Delta_{co}}}{a}. \quad (34)$$

При нахождении решения (32) было учтено, что в области  $0 < r < a$  (в частности, в начале координат), ограниченной является только функция Уиттекера  $M_{\alpha,\beta}$ , а в области  $r > a$  (в частности, на бесконечности), ограниченной является только функция Макдональда, которая асимптотически приближается к нулю на бесконечности, то есть удовлетворяет условию (16).

Решение (32) удовлетворяет условию (14) непрерывности радиального распределения поля на границе сердцевина-обкладка. Для того, чтобы полученное нами решение (32) удовлетворяло условию (15) непрерывности производной радиального распределения поля на границе сердцевина-обкладка (то есть решение (32) должно быть гладким в области поиска решения), следует его подставить в (15) и получить соотношение, связывающее константу распространения с параметрами задачи. В результате такой подстановки получается, что константа распространения определяется как положительное решение уравнения (то есть константа распространения определяется как положительное решение дисперсионного уравнения):

$$q_{cor} = q_{cl}, \quad (35)$$

где обозначено

$$q_{cor} = pa - \frac{1+2l}{a} + \frac{m+1+2l}{a} \frac{M_{l+1,m/2}(pr^2)}{M_{l,m/2}(pa^2)}, \quad (36)$$

$$q_{cl} = \frac{v}{a} - \kappa \frac{K_{v+1}(\kappa r)}{K_v(\kappa a)}. \quad (37)$$

Таким образом, найдено точное решение краевой задачи для уравнений (24) и (31) при условиях (14)-(16): собственные функции определяются (32), а собственные значения – корнями дисперсионного уравнения (35). Дисперсионное уравнение (35) может быть решено численными методами. Его анализ показал, что константа распространения  $\beta$  монотонно возрастает при увеличении радиуса ядра волокна  $a$ .

Анализ радиального распределения волноводных мод, определяемого найденным решением краевой задачи (32), показал, что наибольшая интенсивность поля для фундаментальной моды (при  $m=0$ ) наблюдается на оси симметрии волокна. Для волноводных мод старших порядков начиная с  $m=1, 2, \dots$ , интенсивность поля резко падает (вплоть до нулевого значения в зависимости от радиуса сердцевинки  $a$ ). Максимальное значение интенсивности поля в этих случаях наблюдается в сердцевине при  $0 < r < a$ . Высота максимума увеличивается с ростом порядка волноводной моды.

Отметим, что при  $\Delta_{cl} \rightarrow 0$  решение (32) переходит с учетом замены в нем  $v \rightarrow m$  в известное решение для параболического профиля сердцевинки и постоянного показателя преломления обкладки [26]. Был проведен сравнительный анализ профилей поперечного распределения для того простого параболического профиля и предложенного нами обобщенного градиентного профиля (29).

В результате анализа было установлено, что интенсивность света в центре сердцевинки волокна в случае предлагаемого профиля (30) выше, чем в случае классического параболического профиля. То же самое связано с глубиной проникновения электрического поля в обкладку. При этом распределение света, соответствующее профилю (30), характеризуется более высокой интенсивностью, как в центре волокна, так и в обкладке, в отличие от известного параболического профиля с крутой долиной [22-24, 26]. Однако разница в уровнях интенсивности света для таких профилей показателя преломления становится практически неразличимой на расстоянии около половины радиуса волокна от его центра и вблизи границы сердцевина-обкладка в оболочке.

#### 4 Выводы

Сформулированы модели ряда градиентных волокон с новой формой зависимости показателя преломления от радиуса волокна. Математические модели представляют собой краевые задачи для стационарного волнового уравнения с переменным коэффициентом, который определяется выбранной зависимостью показателя преломления. Были подобраны такие профили показателя преломления, которые позволили получить точные аналитические решения сформулированных уравнений, описывающие поперечное распределение электрического поля в волокне. Предложена модель цилиндрического градиентного волокна с круговым сечением на основе нового профиля показателя преломления, для которого найдено точное аналитическое решение соответствующей краевой задачи.

Выявлены основные различия между поперечными распределениями, соответствующими предложенным обобщенным профилям и классическим параболическим профилем с острыми долинами в профиле показателя преломления. Установлено, что распределение света, рассчитанное в предложенной обобщенной модели, характеризуется более высокой интенсивностью как в центре волокна, так и в обкладке, в отличие от известного профиля с острыми долинами. Следовательно, предложенный обобщенный (более плавный) профиль может применяться при моделировании оптических свойств реальных волокон в отличие от классического параболического профиля с острыми долинами.

Использование предлагаемого профиля позволяет получить более реалистичную оценку характеристик дисперсионных свойств оптических волокон. Проведенные исследования могут найти применение при разработке и совершенствовании оптоволоконных систем связи на основе градиентах оптических волокон с определенными дисперсионными свойствами.

#### Литература

1. Листвин А.В., Листвин В.Н., Швыдков Д.В. Оптические волокна для линий связи. М.: ВЭЛКОМ, 2003. 288 с.
2. Бурков В.Д., Иванов Г.А. Научные основы создания устройств и систем волоконно-оптической техники. М.: Изд-во МГУЛ, 2008. 332 с.
3. Йоргачев Д.В., Бондаренко О.В. Волоконно-оптические кабели и линии связи. М.: Экотрендз, 2002. 282 с.
4. Koos C. Nanophotonic Devices for Linear and Nonlinear Optical Signal Processing. Karlsruhe: Karlsruhe Institut Fur Technologie, 2014. 226 p.

5. *БейлиД., РайтЭ.* Волоконная оптика: теория и практика. М.: Кудиц-Пресс, 2008. 320 с.
6. *Желтиков А.М.* Оптика микроструктурированных волокон. М.: Наука, 2004. 352 с.
7. *Базаров Е.Н., Бурков В.Д., Шатров А.Д.* Теоретические основы волоконно-оптической техники. М.: Изд-во МГУЛ, 2004. 203 с.
8. *Шумкова Д.Б., Левченко А.Е.* Специальные волоконные световоды. Пермь: Изд-во Перм. нац. исслед. политехн. ун-та, 2011. 178 с.
9. *Savotchenko S.E.* Features of dispersion properties of a waveguide with a modified Kerr weak nonlinear nonlinearity coated with a metal thin film // *Optical and Quantum Electronics*. 2024. Vol. 56. P. 1159. DOI: 10.1007/s11082-024-07123-x.
10. *Savotchenko S.E.* Features of self-confinement of the linearly polarized waves in a nonlinear fiber with a light induced core // *Romanian Journal in Physics*. 2024. Vol. 69. № 3-4. P. 201. DOI: 10.59277/RomJPhys.2024.69.201.
11. *Savotchenko S.E.* Analytical solutions describing new features of guided wave modes in circular fiber consisting of a constant-index core and a graded-index cladding with saturation // *Romanian Journal in Physics*. 2024. Vol. 69. N 5-6. P. 202. DOI: 10.59277/RomJPhys.2024.69.202.
12. *Агравал Г.* Нелинейная волоконная оптика. М.: Мир, 1996. 323 с.
13. *Agrawal G.P.* Physics and Engineering of Graded-Index Media. New York: Cambridge University Press, 2023. 348 p. DOI: 10.1017/9781009282086.
14. *Chen C.-L.* Foundations for guided-wave optics. New York: John Wiley & Sons, 2005. 462 p. DOI: 10.1002/0470042222.
15. *Ikuno H.* Guided Modes of the Graded-Index Optical Fiber With a Parabolic-Index Core. In: *Optical Waveguide Sciences. Proceedings of the International Symposium*. Dordrecht: Springer, 1983, pp. 195-201. DOI: 10.1007/978-94-009-6875-2\_22.
16. *Hashimoto M., Nemoto S., Makimoto T.* Analysis of Guided Waves Along the Cladded Optical Fiber: Parabolic-Index Core and Homogeneous Cladding // *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1977. Vol. 25, pp. 11-17. DOI: 10.1109/TMTT.1977.1129024.
17. *Fundamentals of Optical Waveguides*. Cambridge: Elsevier Inc., Academic Press, 2022. DOI: 10.1016/C2017-0-02432-1.
18. *Розанов Н.Н.* Нелинейная оптика. Ч. 1. Уравнения распространения излучения и нелинейный отклик среды. СПб.: Изд-во СПбГУИТМО, 2008. 95 с.
19. *Беспрозванных В.Г., Первадчук В.П.* Нелинейная оптика. Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2011. 200 с.
20. *Gladkikh V.A., Vlasenko V.D.* Calculation of parameters (propagation constant, phase and group velocities) of a graded-index optical fiber // *Computer Optics*. 2025. Vol. 49. № 1, pp. 30-35. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1521.
21. *Adams M.J.* An Introduction to Optical Waveguides. Chichester: Wiley, 1981. 418 p.
22. *Lachance R., Blanger P.* Modes in Divergent Parabolic Graded-Index Optical Fibers // *Journal of Lightwave Technology*. 1991. Vol. 9, pp. 1425-1430. DOI: 10.1109/50.97628.
23. *Krapez J.-C.* Multipurpose S-shaped solvable profiles of the refractive index: application to modeling of antireflection layers and quasi-crystals // *J. Opt. Soc. Am. A* 2018. Vol. 35, pp. 1039-1052. DOI: 10.1364/JOSAA.35.001039.
24. *Liu Y., Wang Y., Geng W., Zhao W., Zhang H., Zhang W., Pan Z., Yue Y.* Parabolic-Index Ring-Core Fiber Supporting High-Purity Orbital Angular Momentum Modes // *Sensors (Basel)*. 2023. Vol. 23, №7, pp. 3641. DOI: 10.3390/s23073641.
25. *Брычков Ю. А., Прудников А. П.* Функции Уиттекера // Большая российская энциклопедия: научно-образовательный портал. URL: <https://bigenc.ru/c/funktsii-uittekera-6d1e96/?v=3785531>. (Дата публикации: 23.05.2022)
26. *Zubia J., Aldabaldetrekue G., Durana G., Illarramendi M.* Geometric optics analysis of inverted graded index fibers // *Journal of Optics*. 2022. Vol. 24. P. 115602. DOI: 10.1088/2040-8986/ac939a

## ANALYTICAL SOLUTIONS IN THE MODELS OF THE GRADED-INDEX OPTICAL FIBERS

**Sergey E. Savotchenko**, *Sergo Ordzhonikidze Russian State Geological Prospecting University, Moscow, Russia*  
*Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia;*  
*MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia, [savotchenko@mirea.ru](mailto:savotchenko@mirea.ru)*

### Abstract

This paper deals with the analytical modeling of graded-index optical fibers with a refractive index varying with radial distance widely used in fiber optic telecommunication systems. Cylindrical fibers with a circular cross section are considered. Radial refractive index profiles underlie the models for such fiber gradients. Models of graded-index fibers with a new form of refractive index dependence on fiber radius are proposed. The mathematical formulation of the models represents a boundary value problem for a stationary wave equation with variable coefficients determined by the selected forms of the radial refractive index profile. Refractive index profiles are considered that allow finding exact analytical solutions to the formulated equations describing the transverse distribution of the electric field in the fiber. A model of a cylindrical graded-index fiber with a circular cross section is proposed based on a new graded-index profile in the fiber core and cladding. A new exact analytical solution to the corresponding boundary value problem is found for this profile. The radial field distribution in the core is expressed using the Whittaker function with a second half-integer index, while in the fiber cladding it is expressed using the modified Bessel function of the second kind with a non-integer index. The main differences between the transverse distributions corresponding to the proposed generalized profile and the classical parabolic profile are identified.

**Keywords:** fiber optics, optical fiber, mathematical model, optical waveguide, waveguide mode, boundary value problem, exact solution

## References

- [1] A.V. Listvin, V.N. Listvin, D.V. Shvydkov, "Optical Fibers for Communication Lines", Moscow; VELCOM, 2003, 288 p. (In Russian)
- [2] V.D. Burkov, G. A. Ivanov, "Scientific Foundations of Creating Fiber-Optic Devices and Systems", Moscow: MGUL Publishing House, 2008, 332 p. (In Russian)
- [3] D. V. Yorgachev, O. V. Bondarenko, "Fiber-Optic Cables and Communication Lines", Moscow: Ecotrends, 2002, 282 p. (In Russian).
- [4] C. Koos, "Nanophotonic Devices for Linear and Nonlinear Optical Signal Processing", Karlsruhe: Karlsruhe Institut Fur Technologie, 2014, 226 p.
- [5] D. Bailey, E. Wright, "Fiber Optics: Theory and Practice", Moscow: Kudits-Press, 2008, 320 p. (In Russian)
- [6] A. M. Zheltikov, "Optics of Microstructured Fibers", Moscow: Nauka, 2004, 352 p. (In Russian)
- [7] E. N. Bazarov, V. D. Burkov, A. D. Shatrov, "Theoretical Foundations of Fiber-Optic Technology. Moscow: Publishing House of Moscow State University of Forestry", 2004, 203 p. (In Russian)
- [8] D. B. Shumkova, A. E. Levchenko, "Specialized Fiber Light Guides". Perm: Publishing House of Perm National Research Polytechnic University, 2011, 178 p. (In Russian)
- [9] S.E. Savotchenko, "Features of dispersion properties of a waveguide with a modified Kerr weak nonlocal nonlinearity coated with a metal thin film", *Optical and Quantum Electronics*, 2024, vol. 56, pp. 1159. DOI: 10.1007/s11082-024-07123-x.
- [10] S.E. Savotchenko, "Features of self-confinement of the linearly polarized waves in a nonlinear fiber with a light induced core", *Romanian Journal in Physics*, 2024, vol. 69, no. 3-4, pp. 201. DOI: 10.59277/RomJPhys.2024.69.201.
- [11] S.E. Savotchenko, "Analytical solutions describing new features of guided wave modes in circular fiber consisting of a constant-index core and a graded-index cladding with saturation", *Romanian Journal in Physics*, 2024, vol. 69, no. 5-6, P. 202. DOI: 10.59277/RomJPhys.2024.69.202.
- [12] G.P. Agrawal, "Nonlinear fiber optic", 3rd ed., San Diego: Academic Press, 2001, 467 p.
- [13] G.P. Agrawal, "Physics and Engineering of Graded-Index Media", New York: Cambridge University Press, 2023, 348 p. DOI: 10.1017/9781009282086.
- [14] C.-L. Chen, "Foundations for guided-wave optics", New York: John Wiley & Sons, 2005. 462 p. DOI: 10.1002/0470042222.
- [15] H. Ikuno, "Guided Modes of the Graded-Index Optical Fiber With a Parabolic-Index Core", *Optical Waveguide Sciences. Proceedings of the International Symposium*, Dordrecht: Springer, 1983, pp. 195-201. DOI: 10.1007/978-94-009-6875-2\_22.
- [16] M. Hashimoto, S. Nemoto, T. Makimoto, "Analysis of Guided Waves Along the Cladded Optical Fiber: Parabolic-Index Core and Homogeneous Cladding", *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, 1977, vol. 25, pp. 11-17. DOI: 10.1109/TMTT.1977.1129024.
- [17] Fundamentals of Optical Waveguides. Cambridge: Elsevier Inc., Academic Press, 2022. DOI: 10.1016/C2017-0-02432-1.
- [18] N.N. Rozanov, "Nonlinear Optics. Part I. Radiation Propagation Equations and Nonlinear Response of the Medium", St. Petersburg: SPbGUITMO Publishing House, 2008, 95 p. (In Russian).
- [19] V.G. Besprozvannykh, V.P. Pervadchuk, "Nonlinear Optics", Perm: Perm State Technical University Publishing House, 2011, 200 p. (In Russian)
- [20] V.A. Gladkikh, V.D. Vlasenko, "Calculation of parameters (propagation constant, phase and group velocities) of a graded-index optical fiber", *Computer Optics*, 2025, vol. 49, no. 1, pp. 30-35. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-1521.
- [21] M.J. Adams, "An Introduction to Optical Waveguides," Chichester: Wiley, 1981, 418 p.
- [22] R. Lachance, P. Blanger, "Modes in Divergent Parabolic Graded-Index Optical Fibers", *Journal of Lightwave Technology*, 1999, vol. 9, pp. 1425-1430. DOI: 10.1109/50.97628.
- [23] J.-C. Krapez, "Multipurpose S-shaped solvable profiles of the refractive index: application to modeling of antireflection layers and quasi-crystals", *J. Opt. Soc. Am. A*, 2018, vol. 35, pp. 1039-1052. DOI: 10.1364/JOSAA.35.001039.
- [24] Y. Liu, Y. Wang, W. Geng, W. Zhao, H. Zhang, W. Zhang, Z. Pan, Y. Yue, "Parabolic-Index Ring-Core Fiber Supporting High-Purity Orbital Angular Momentum Modes", *Sensors (Basel)*, 2023, vol. 23, no. 7, pp. 3641. DOI: 10.3390/s23073641.
- [25] Yu. A. Brychkov, A. P. Prudnikov, "Whittaker functions", *Great Russian Encyclopedia: scientific and educational portal*. <https://bigenc.ru/c/funktsii-uitteker-a-6d1e96/?v=3785531>. (In Russian)
- [26] J. Zubia, G. Aldabaldetrekua, G. Durana, M. Illarramendi, "Geometric optics analysis of inverted graded index fibers", *Journal of Optics*, 2022, vol. 24, pp. 115602. DOI: 10.1088/2040-8986/ac939a

## Information about author:

Sergey E. Savotchenko, Russian State Geological Prospecting University named after Sergo Ordzhonikidze; Moscow Technical University of Communications and Informatics; MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia, ORCID 0000-0002-7158-9145