

ОПТИМИЗАЦИЯ КОДИРОВАНИЯ В СИГНАЛЬНО-КОВОДОЙ КОНСТРУКЦИИ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ БИТОВЫХ ОШИБОК ПРИ ДЕМОДУЛЯЦИИ

DOI: 10.36724/2072-8735-2026-20-4-25-32

Manuscript received 24 January 2026;
Accepted 28 March 2026

Аджемов Артем Сергеевич,
Московский технический университет связи и информатики,
Москва, Россия, asa@mtuci.ru

Поборчая Наталья Евгеньевна,
Московский технический университет связи и информатики,
Москва, Россия

Ключевые слова: биекция пространств, метрические пространства, сигнально-кодовые конструкции, кодирование источников, виды (методы) дискретной модуляции, кодовое расстояние

Современные средства связи, находят применение в самых разных сферах деятельности человека, а также и в различных автоматизированных и информационных системах. При этом формируемые ими сообщения весьма различны по своей природе, а также отличаются требованиями по времени доставки сообщений, их верности и т.д. Помимо этого необходимо учитывать, что для обеспечения телекоммуникационных возможностей для различных источников используются различные среды передачи, а именно: физические пары проводов, оптические линии связи, радио среда и т.д., имеющие существенно отличающиеся характеристики, что необходимо учитывать при выборе соответствующего метода передачи сигналов. Преобразование различных сообщений от источника в цифровую форму позволяет обеспечить их эффективную обработку, например, первичное и помехоустойчивое кодирование, в том числе с учетом возможности применения программных решений при практической реализации. В тоже время для согласования спектральных характеристик цифрового сигнала с частотными характеристиками канала необходимо использование методов дискретной модуляции, в результате чего сигнал становится аналоговым. Таким образом, на различных этапах происходят преобразования сигналов, которые рассматриваются в различных метрических пространствах. Причем эти преобразования не отвечают условиям изоморфного преобразования, что требует отдельного исследования с учетом способов дискретной модуляции и видов действующих помех. В результате появляется возможность нахождения оптимального способа биекции пространств при преобразовании сигналов, что в частности для методов дискретной модуляции позволяет уменьшить вероятность битовой ошибки при демодуляции в условиях действия помех.

Информация об авторах:

Аджемов Артем Сергеевич, д.т.н., профессор, Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия
Поборчая Наталья Евгеньевна, д.т.н., Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Для цитирования:

Аджемов А.С., Поборчая Н.Е. Оптимизация кодирования в сигнально-кодовой конструкции при различных распределениях битовых ошибок при демодуляции // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2026. Том 20. №4. С. 25-32.

For citation:

A.S. Adzhemov, N.E. Poborchaya, "Optimization of coding in a signal-code design for different bit error distributions during demodulation", T-Comm, 2026, vol. 20, no.4, pp. 25-32. (in Russian)

Введение

Методы дискретной модуляции, использующие разнообразные способы изменения параметров несущего сигнала, предусматривают, согласно исходному сообщению, адекватные изменения (модуляцию) одного или нескольких параметров гармонического колебания $U_{\mu} = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, где U_0 – амплитуда гармонического колебания, ω_0 – частота и φ_0 – начальная фаза. Поскольку в современных информационных и телекоммуникационных системах все виды сообщений от различных источников преобразуются в цифровую форму, то соответствующие значения модулированного сигнала, а точнее одного или нескольких значений его параметров: амплитуда, частота или фаза, принимают определенные дискретные значения, каждое из которых ставится в соответствие цифровой кодовой комбинации, отображающей исходное сообщение от источника [1-3, 15-18].

Сообщения от различных источников, часто изначально имеющих неэлектрическую природу, например, акустический сигнал, температурный датчик, изображение и т.д. принято рассматривать, как изменяющееся во времени сообщение $S(t)$, которое затем с помощью соответствующих устройств преобразуется в электрический сигнал $s(t)$. Исходное сообщение $S(t)$, а также его электрическое отображение в виде сигнала $s(t)$, могут быть как непрерывны, так и дискретны во времени, а также они могут быть непрерывны или дискретны по принимаемым значениям.

Современная элементная база, а также широкое использование программных решений в практической реализации различных устройств обосновывает повсеместное использование цифровых методов передачи, хранения, обработки и приема сигналов [7-12]. Поэтому после преобразования неэлектрического сообщения $S(t)$ в электрический сигнал $s(t)$ происходит его дальнейшая трансформация в цифровой сигнал $s_{Ц}(t)$. В итоге после цифрового отображения исходное сообщение превращается в цифровой, как правило, двоичный сигнал, когда каждая кодовая комбинация соответствует определенным значениям исходного сигнала $s(t)$ и, следовательно, сообщению $S(t)$.

На рис. 1 показаны этапы описанных преобразований, а также и последующих трансформаций, обеспечивающих требуемой качество и возможность передачи исходного сообщения к получателю.



Рис. 1. Этапы преобразований сообщение-сигнал-цифровой сигнал...

Сообщения и сигналы для их количественного оценивания описывают в определенных метрических пространствах, обладающих характерными для данного описания свойствами, обеспечивающими адекватность описания [23-26]. Таким образом, преобразования сообщений в сигналы и далее

сигналов в другие сигналы будут соответствовать трансформациям из одного метрического пространства в другое. При этом особенности и отличия описаний в разных метрических пространствах могут приводить к неизоморфности трансформаций, что следует учитывать, исходя из задачи восстановления после всех преобразований вначале исходного электрического сигнала $s(t)$, а затем и исходного сообщения $S(t)$.

Отметим, что на любом этапе преобразований: сообщение $S(t)$ в сигнал $s(t)$ затем сигнал $s(t)$ в сигнал $s_{Ц}(t)$ и т.д. в исходный преобразуемый элемент вносятся определенные искажения. Однако величина этих искажений должна отвечать установленным требованиям, предусмотренным для данного этапа преобразований в зависимости от решаемой задачи. Например, при преобразовании речевого сигнала, занимающего диапазон до 10 кГц, в электрический сигнал, согласно поставленной задаче вносятся ограничения по отображаемой полосе частот до 4 кГц, что обеспечивает необходимое качество телефонной связи с учетом требований об экономном использовании частотного диапазона, хотя и с определенной потерей качества восстановленного речевого сообщения.

Цифровой сигнал $s_{Ц}(t)$ с целью повышения качества восстановления на приме в условиях действия помех, а именно, уменьшения вероятности ошибки, претерпевает трансформацию согласно выбранному помехоустойчивому коду, в результате чего получаем цифровой сигнал $s_{Ц-П}(t)$ с внесенной дополнительной избыточностью, обеспечивающей соответствующее обнаружение и при необходимости исправление возникших ошибок. Далее цифровой сигнал необходимо преобразовать в вид, соответствующий той среде, по которой будет осуществляться его передача. Например, это могут быть пара медных проводов, оптический кабель, «радио эфир» и так далее, обладающие совершенно разными частотными характеристиками, что необходимо учитывать на этапе преобразования цифрового сигнала в линейный $s_{Ц-П-Л}(t)$, который и передается по каналу или линии связи.

Помимо описанных трансформаций, показанных на рис. 1, сигналы могут иметь и ряд других преобразований, например, связанных с группообразованием, сжатием, скремблированием и так далее. Однако в данной работе остановимся на исследованиях преобразований, показанных на рис. 1.

Не снижая общности рассуждений, предположим, что исходное сообщение $S(t)$ отображается в пространстве Евклида. Предположим также, что и электрический «эквивалент» данного сообщения, а именно сигнал $s(t)$, также представляется в данном пространстве. Дальнейшая его трансформация в цифровой сигнал $s_{Ц}(t)$ соответствует преобразованию сигналов из пространства Евклида в пространство Хэмминга, когда определенным счетным элементам сигнала $s(t)$ ставится во взаимно однозначное соответствие определенные кодовые комбинации цифрового сигнала $s_{Ц}(t)$. Осуществляемая таким образом биекция пространств Евклида и Хэмминга, может, как показано в [14], происходить разными способами (вариантами) установления соответствия, число которых равно $(2^n)!$, где n – длина кодовой комбинации цифрового сигнала.

Условимся множество элементов сигнала $s(t)$ обозначать через A , а сами элементы через $a_i \in A$, где $i = \{1, N\}$, а $N = 2^n$. Отображение аналогового сигнала $s(t)$ в виде счетного числа элементов $a_i \in A$ вносит в него определенные искажения. Однако, помимо этого могут возникать дополнительные искажения, если на приеме по причине действия помех вместо некоторого элемента a_i будет принят другой элемент $a_j, i \neq j$. При этом, как показано в [14] величина этих дополнительных искажений определяется не только интенсивностью действующих помех, но и способом биекции метрических пространств, что и станет предметом дальнейших исследований.

Дополнительные искажения, возникающие при восстановлении сигнала $s(t)$, отобразим в виде следующей матрицы искажений $\mathbf{Z}_{i,j}$:

$$\mathbf{Z}_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & z_{12} & z_{13} & \dots & z_{1N} \\ z_{21} & 0 & z_{23} & \dots & z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ z_{N1} & z_{N2} & z_{N3} & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где z_{ij} указывает на величину искажения, если вместо элемента a_i был принят элемент a_j .

Для обоснованного выбора способа биекции пространств с целью минимизации возможных дополнительных искажения необходимо также знать вероятности их возникновения, что можно установить, задав соответствующую матрицу вероятностей, когда вместо элемента a_i будет принят элемент a_j .

Запишем ее в следующем виде:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \dots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \dots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & p_{N3} & \dots & p_{NN} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Используя выражения (1) и (2) можно вычислить среднюю величину дополнительных искажений

$$\bar{Z} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{ij} z_{ij}, \quad (3)$$

что явится количественной оценкой при поиске способа биекции пространств, обеспечивающего минимизацию средней величины искажений в сигнале $s(t)$.

Рассматривая дальнейшие преобразования сигналов согласно рис. 1, аналогичным образом можно характеризовать возникающие ошибки и искажения с учетом трансформации соответствующих пространств. Например, при преобразовании цифрового сигнала в линейный с его последующей передачей по каналу или линии связи в сравнении с тем, что было рассмотрено выше, происходят противоположные преобразования пространств, а именно, цифровой сигнал, описываемый в пространстве Хэмминга, преобразуется в линейный

сигнал, который зачастую отображается в пространстве Евклида. В результате на приемной стороне следует рассматривать искаженный, по причине действия помех, линейный сигнал, который трансформируется в цифровой. В цифровом сигнале в результате искажений линейного сигнала могут появиться ошибки.

Цифровой сигнал $s_{Ц}(t)$ представим в виде элементов $b_i \in B$, где $i = \{1, N\}$, а $N = 2^n$. Множество B определяет множество цифровых кодовых комбинаций, биективно связанных с элементами $a_i \in A$ сигнала $s(t)$.

Далее согласно рис.1 элементы $b_i \in B$ цифрового сигнала $s_{Ц}(t)$ преобразуются в элементы $c_i \in C$, где $i = \{1, N\}$, а множество C определяет элементы цифрового помехоустойчивого сигнала $s_{Ц-П}(t)$.

Затем цифровой сигнал $s_{Ц-П}(t)$ преобразуется в линейный $s_{Ц-П-Л}(t)$. Причем в цифровом сигнале выбираются M кодовых комбинаций цифрового сигнала, которые ставятся в соответствие элементам линейного сигнала согласно его размерности, например, размерности выбранного метода модуляции, содержащего элементы $d_i \in D$, где $i = \{1, M\}$, а множество D определяет элементы линейного сигнала $s_{Ц-П-Л}(t)$.

Следует отметить, что размерность множества M , как правило, не совпадает с размерностью множества N , поскольку определяется выбранным методом многократной декретной модуляции, тогда как множество N характеризуется количеством сообщений, порождаемых источником.

Для расчета среднего числа ошибок в $s_{Ц-П}(t)$ на приемной стороне, возникающих из-за искажений в линейном сигнале $s_{Ц-П-Л}(t)$, после его прохождения по каналу или линии связи, необходимо аналогично (2) определить вероятности трансформации d_i в d_j , что будет приводить к ошибкам в цифровом сигнале. При этом следует также определить матрицу кодовых расстояний в пространстве Хэмминга между цифровыми кодовыми комбинациями, которые будут соответствовать M элементам линейного сигнала.

Для двоичного взвешенного (натурального) кода матрица кодовых расстояний будет согласно [14] иметь вид:

$$\mathbf{D}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_{m-1} & \mathbf{D}_{m-1} + \mathbf{J}_{m-1} \\ \mathbf{D}_{m-1} + \mathbf{J}_{m-1} & \mathbf{D}_{m-1} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где m – количество символов в кодовой комбинации цифрового сигнала, соответствующей элементу линейного сигнала, \mathbf{J}_{m-1} – квадратная матрица соответствующей размерности, состоящая из единиц, при этом $D_0 = (0)$, $\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и т.д.

Как уже отмечалось при передаче по каналу или линии связи каждому значению модулированного сигнала ставят в соответствие определенную кодовую комбинацию из m двоичных символов, согласно кратности метода модуляции [19, 21].

В [4, 5] описано определенное количество различных методов модуляции, проведено их сравнение и обоснован вы-

бор, исходя из требований по помехоустойчивости, сложности реализации и т.д. При этом, однако, не в полной мере были исследованы возможности уменьшения вероятности битовой ошибки на приеме при демодуляции за счет оптимизации сопоставления пространств Хэмминга и Евклида с учетом действующих помех, приводящим к различным распределениям ошибок в демодулированном сигнале.

Наиболее часто используемым методом кодирования перед процедурой модуляции является представление двоичной последовательности с помощью кода Грея [6]. В этом случае каждому информационному символу из созвездия многопозиционного сигнала, передаваемого по каналу или линии связи, ставится в соответствие кодовая комбинация, которая отличается на один бит от соседней, с помощью которой кодируется наиболее близко расположенный символ. Объясняется такой подход уменьшением вероятности ошибки на бит при приеме сигнала, т.к. перепутываются из-за действия помех чаще всего символы, расстояние между которыми минимально. Однако данное предположение справедливо только при этом допущении, да и то требует более детального обоснования с точным учетом того или иного распределения вероятностей возникновения искажений различной величины.

Отметим также, что преобразование натурального (взвешенного) кода в код Грея с установлением последующего соответствия с элементами созвездия модулированного сигнала может быть реализовано и иным способом. Тот же результат может быть достигнут и при использовании непосредственно натурального (взвешенного) кода или любого другого, однако с измененным правилом установления соответствия между кодовыми комбинациями и соответствующими значениями модулированного сигнала [7], что позволяет упростить практическую реализацию формируемого созвездия модулированного сигнала.

Постановка задачи. Рассмотрим прием сигнала М-позиционной квадратурной амплитудной модуляции (М-QAM) на фоне аддитивного шума. Предположим, что в некоторый момент времени найдены мягкие решения r_I, r_Q следующего вида:

$$\begin{cases} r_I = I + \mu_I, \\ r_Q = Q + \mu_Q, \end{cases} \quad (5)$$

где μ_I, μ_Q – отсчеты шума, который представляет собой стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и дисперсией $E(\mu_I^2) = E(\mu_Q^2) = \sigma_\mu^2$ ($E(\cdot)$ – оператор математического ожидания), I, Q – передаваемые квадратуры информационных символов М-QAM – сигнала, выбираемые из множеств: $I \in \{I(m)\}, Q \in \{Q(l)\}, I(m) = (2m-1-\sqrt{M})d, Q(l) = (2l-1-\sqrt{M})d, m, l = 1, 2, \dots, \sqrt{M}, 2d$ – расстояние между соседними символами I или Q , дисперсия квадратур равна $E(I^2) = E(Q^2) = \sigma^2 = \frac{d^2(M-1)}{3}$.

Обозначим точки созвездия сигнала через $A_s, s = 0, 1, 2, \dots, M-1$. Координатами $a_{s,1}, a_{s,2}$ точки A_s ($s = (l-1)\sqrt{M} + m - 1$) являются значения квадратур $I(m), Q(l)$ информационных символов:

$$A_s = (a_{s,1} \ a_{s,2}) = \begin{cases} (I(m) \ Q(l)), \ l = 1, 3, \dots, \sqrt{M}-1, \\ (I(\sqrt{M}-m+1) \ Q(l)), \ l = 2, 4, \dots, \sqrt{M}. \end{cases} \quad (6)$$

Пусть H_s – гипотеза, γ_j – решение, $s, j = 0, 1, \dots, M-1$. Требуется по наблюдаемым мягким решениям найти матрицу переходных вероятностей $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{00} & \dots & P_{0M-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{M-10} & \dots & P_{M-1M-1} \end{pmatrix}_{M \times M}$, где $P_{sj} = P(\gamma_j / H_s)$ – вероятность принять решение γ_j при верности гипотезы H_s , т.е. вероятность вынести решение о том, что передавался информационный символ с квадратурами $a_{j,1}, a_{j,2}$, а на самом деле присутствуют квадратуры $a_{s,1}, a_{s,2}$.

Решение задачи. Пусть известна функция плотности вероятности (ФПВ) шума μ . Процедуру детектирования сигнала будем проводить по критерию наименьшего расстояния, который, используя (5) и (6), можно записать в следующем виде:

$$(r_I - a_{s,1})^2 + (r_Q - a_{s,2})^2 = \min_{a_{s,1}, a_{s,2}} \cdot$$

$$\text{Обозначим} \quad \xi_{s,1} = r_I - a_{s,1}, \quad \xi_{s,2} = r_Q - a_{s,2},$$

$$c_{sj,1} = a_{j,1} - a_{s,1} - d, \quad c_{sj,2} = a_{j,2} - a_{s,2} - d,$$

$$b_{sj,1} = a_{j,1} - a_{s,1} + d, \quad b_{sj,2} = a_{j,2} - a_{s,2} + d.$$

Пусть максимальные и минимальные значения координат $a_{j,1}, a_{j,2}$ равны $a_{1\max} = a_{2\max} = (\sqrt{M}-1)d, a_{1\min} = a_{2\min} = (1-\sqrt{M})d$ соответственно. Тогда условные вероятности перехода P_{sj} можно представить как

$$P_{sj} = \begin{cases} P(c_{sj,1} < \xi_{s1} < b_{sj,1}, c_{sj,2} < \xi_{s2} < b_{sj,2}), \text{ если } a_{j1,2} \neq a_{1,2\max}, a_{j1,2} \neq a_{1,2\min}; \\ P(c_{sj,1} < \xi_{s1} < b_{sj,1}, \xi_{s2} < b_{sj,2}), \text{ если } a_{j2} = a_{2\min}, a_{j1} \neq a_{1\min}, a_{j1} \neq a_{1\max}; \\ P(c_{sj,1} < \xi_{s1} < b_{sj,1}, c_{sj,2} < \xi_{s2}), \text{ если } a_{j2} = a_{2\max}, a_{j1} \neq a_{1\min}, a_{j1} \neq a_{1\max}; \\ P(\xi_{s1} < b_{sj,1}, c_{sj,2} < \xi_{s2} < b_{sj,2}), \text{ если } a_{j1} = a_{1\min}, a_{j2} \neq a_{2\min}, a_{j2} \neq a_{2\max}; \\ P(c_{sj,1} < \xi_{s1}, c_{sj,2} < \xi_{s2} < b_{sj,2}), \text{ если } a_{j1} = a_{1\max}, a_{j2} \neq a_{2\min}, a_{j2} \neq a_{2\max}; \\ P(\xi_{s1} < b_{sj,1}, \xi_{s2} < b_{sj,2}), \text{ если } a_{j1,2} = a_{1,2\min}; \\ P(c_{sj,1} < \xi_{s1}, c_{sj,2} < \xi_{s2}), \text{ если } a_{j1,2} = a_{1,2\max}; \\ P(\xi_{s1} < b_{sj,1}, c_{sj,2} < \xi_{s2}), \text{ если } a_{j1} = a_{1\min}, a_{j2} = a_{2\max}; \\ P(c_{sj,1} < \xi_{s1}, \xi_{s2} < b_{sj,2}), \text{ если } a_{j1} = a_{1\max}, a_{j2} = a_{2\min}. \end{cases} \quad (7)$$

Выражения (7) позволяют количественно оценить процедуру детектирования линейного модулированного сигнала $s_{II-П-Л}(t)$, подвергнутого влиянию помех в канале или линии связи, и восстановление цифрового сигнала $s_{II-П}(t)$, в котором могут в результате этого появиться битовые ошибки.

Исследуем более подробно этот вопрос, исходя из предположения, что в канале связи действует белый гауссовский шум (БГШ), что в отдельных случаях достаточно хорошо согласуется с реальной ситуацией при малом отношении сигнал/шум, когда преобладающим мешающим фактором становится тепловой шум. Проведем также аналогичные исследования и в предположении, что действующие помехи приводят

к равномерному распределению μ . Возможны конечно и любые другие распределения, что можно учесть при необходимости. В данном случае основной целью является разработка метода оптимизации биекции пространств с целью минимизации либо искажений сообщений от источника, либо минимизация битовых ошибок при восстановлении цифрового сигнала после его передачи по каналу или линии связи. Кроме того, важно оценить на сколько в количественном отношении полезна оптимизация биекции пространств.

Предположим, что μ – белый гауссовский шум (БГШ). В этом случае в выражении (7) совместные вероятности представляют собой произведение вероятностей по каждому событию, например,

$$P(c_{sj,1} < \xi_{s1} < b_{sj,1}, c_{sj,2} < \xi_{s2} < b_{sj,2}) = \text{и т.д.} \\ = P(c_{sj,1} < \xi_{s1} < b_{sj,1})P(c_{sj,2} < \xi_{s2} < b_{sj,2}) = P_{sj,1}P_{sj,2}$$

В результате для гауссовской плотности распределения шума с дисперсией σ_μ^2 формула (7) приобретает следующий вид:

$$P_{sj,k} = \begin{cases} P(c_{sj,k} < \xi_{sk} < b_{sj,k}) = \frac{1}{2} \left(\operatorname{erf} \left(\frac{b_{sj,k}}{\sqrt{2}\sigma_\mu} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{c_{sj,k}}{\sqrt{2}\sigma_\mu} \right) \right), & \text{если } a_{jk} \neq a_{k \max}, a_{jk} \neq a_{k \min}; \\ P(\xi_{sk} < b_{sj,k}) = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{b_{sj,k}}{\sqrt{2}\sigma_\mu} \right) \right), & \text{если } a_{jk} = a_{k \min}; \\ P(c_{sj,k} < \xi_{sk}) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf} \left(\frac{c_{sj,k}}{\sqrt{2}\sigma_\mu} \right) \right), & \text{если } a_{jk} = a_{k \max}; \end{cases} \quad (8)$$

$$P_{sj} = P_{sj,1}P_{sj,2}, \text{ где } \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Теперь рассмотрим случай, когда шум μ распределен равномерно в интервале от $-B$ до B ($\sigma_\mu^2 = \frac{B^2}{3}$). Тогда условные вероятности перехода P_{sj} принимают следующий вид:

$$P_{sj,k} = \begin{cases} P(c_{sj,k} < \xi_{sk} < b_{sj,k}) = \begin{cases} \frac{b_{sj,k} - c_{sj,k}}{2B}, & \text{если } c_{sj,k} \geq -B, b_{sj,k} \leq B, \\ 1, & \text{если } c_{sj,k} < -B, b_{sj,k} > B, \\ 0, & \text{если } c_{sj,k} < -B, b_{sj,k} < -B \\ & \text{или } c_{sj,k} > B, b_{sj,k} > B \end{cases}; \\ a_{jk} \neq a_{k \max}, a_{jk} \neq a_{k \min}; \\ P(\xi_{sk} < b_{sj,k}) = \begin{cases} \frac{b_{sj,k} + B}{2B}, & \text{если } b_{sj,k} \leq B, \\ 1, & \text{если } b_{sj,k} > B, \\ 0, & \text{если } b_{sj,k} < -B \end{cases}; & a_{jk} = a_{k \min}; \\ P(c_{sj,k} < \xi_{sk}) = \begin{cases} \frac{B - c_{sj,k}}{2B}, & \text{если } c_{sj,k} \geq -B, \\ 1, & \text{если } c_{sj,k} < -B, \\ 0, & \text{если } c_{sj,k} > B \end{cases}; & a_{jk} = a_{k \max}; \end{cases} \quad (9)$$

Вычислительный эксперимент. На рисунке 2 показано созвездие сигнала с точками A_s и квадратурами (6) $a_{s,1}, a_{s,2}$, $s = 0, 1, \dots, 15$, $m, l = 1, 2, 3, 4$ при $d \approx 0.24$, $\sigma^2 = 0.288$.

Воспользовавшись выражениями (8), (9) для расчета переходных вероятностей проведено определение переходной матрицы \mathbf{P} для сигнала 16-QAM [13, 20]. Аддитивный шум предполагался белым гауссовским и равномерным [22, 25]. В результате были получены соответствующие матрицы приведенные в (2). Далее, рассматривая в качестве исходного способа установления соответствия между элементами созвездия модулированного сигнала и восстанавливаемыми двоичными кодовыми комбинациями, число которых в данном случае равно 16, были рассмотрены все возможные варианты биекции пространств и для них рассчитано среднее число возникающих битовых ошибок по формуле (3) с учетом матрицу кодовых расстояний, приведенной в (4).

Проведенный компьютерный поиск по полученным матрицам \mathbf{P} позволил из $\sim 2,09 \cdot 10^{13}$ вариантов биекции пространств выбрать те, при которых среднее число битовых ошибок будет минимальным и для сравнения выигрыша – максимальным. Кроме того, были выделены наиболее часто используемые способы кодирования, а именно, код Грэя и натуральный (взвешенный) код. Другими словами, был реализован полный перебор компьютерного поиска способа соответствия двоичных кодовых комбинаций определенным значениям A_0, \dots, A_{15} .

Начало расчетов бралось от натурального кода, для которого индекс при соответствующем элементе A_0, \dots будет соответствовать двоичной кодовой комбинации, т.е. $A_0 = (0000), \dots, A_{15} = (1111)$.

Результаты расчетов приведены в таблицах 1 и 2. Способ кодирования указан в виде последовательности десятичных чисел, каждая из которых соответствует двоичной кодовой комбинации из четырех символов. Помимо этого, в таблицах в столбцах, обозначенных А, В, С, D, ..., I, J приведены полученное значение количества ошибок при определенной интенсивности действующей помехи.

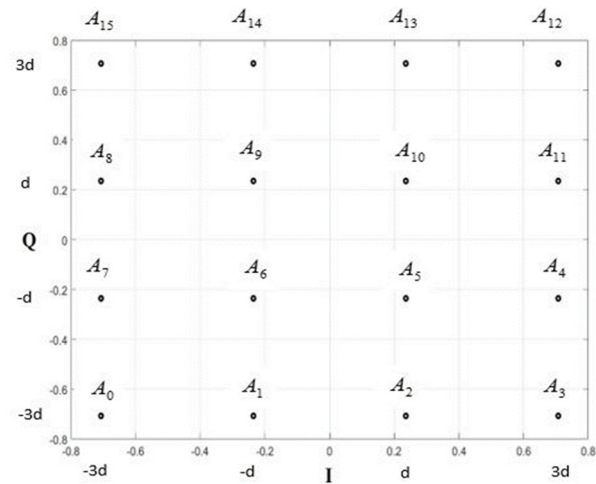


Рис. 2. Созвездие сигнала 16-QAM

$$A_s(a_{s,1}, a_{s,2}): \\ A_0(-3d, -3d); A_1(-d, -3d); A_2(d, -3d); A_3(3d, -3d); \\ A_4(3d, -d); A_5(d, -d); A_6(-d, -d); A_7(-3d, -d); \\ A_8(-3d, d); A_9(-d, d); A_{10}(d, d); A_{11}(3d, d); \\ A_{12}(3d, 3d); A_{13}(d, 3d); A_{14}(-d, 3d); A_{15}(-3d, 3d).$$

Таблица 1

Результаты расчета числа ошибок при оптимальном кодировании для различных соотношений сигнал/шум и гауссовском распределении шума

	Варианты	σ_μ^2 (ОСШ, дБ)			
		10^{-2} (14.6)	10^1 (4.59)	1 (-5.4)	10 (-15.4)
		A	B	C	D
натур	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16	10136	201784	275008	305128
Min A Грей	1,2,4,3,7,8,6,5,13,14,16,15,11,12,10,9	4344	113344	252888	300672
Max A 1	1,8,13,12,5,4,9,16,3,6,15,10,7,2,11,14	14400	260776	312972	319148
Min B Грей	1,2,4,3,7,8,6,5,13,14,16,15,11,12,10,9	4344	113344	252888	300672
Max B	1,8,10,15,2,7,9,16,5,4,14,11,6,3,13,12	14400	260776	312972	319148
Min C 2	1,2,3,4,8,7,6,5,9,10,11,12,16,15,14,13	5792	143808	241064	291880
Max C 3	1,8,12,5,4,11,15,16,6,13,9,10,7,2,14,3	9432	208752	317676	323396
Min D 2	1,2,3,4,8,7,6,5,9,10,11,12,16,15,14,13	5792	143808	241064	291880
Max D 3	1,8,12,5,4,11,15,16,6,13,9,10,7,2,14,3	9432	208752	317676	323396
4	1,8,9,4,13,6,11,16,2,5,12,3,14,7,10,15	13764	258488	310356	315772
5	1,2,3,4,8,6,7,5,9,10,11,12,16,14,15,13	7952	161112	242384	291928
6	1,8,4,5,11,12,16,15,13,14,10,9,7,2,6,3	7256	175968	310184	323080

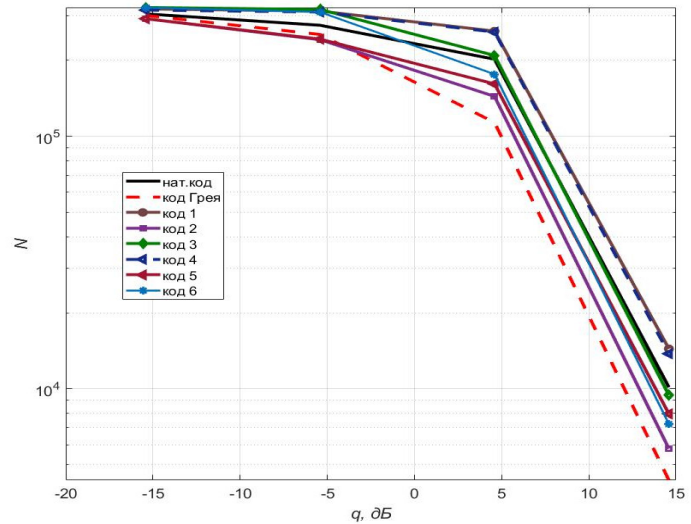
Таблица 2

Результаты расчета числа ошибок при оптимальном кодировании для различных соотношений сигнал/шум и равномерном распределении шума

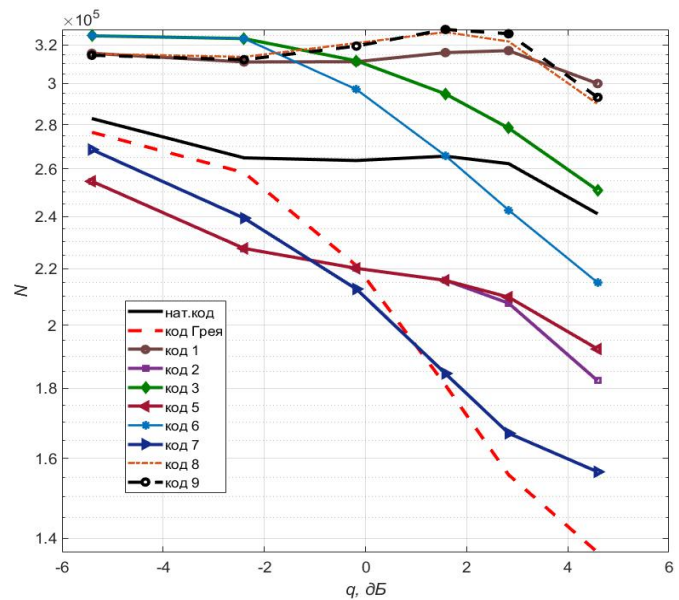
	Варианты	σ_μ^2 (ОСШ, дБ)					
		10^{-1} (4.59)	$5 \cdot 10^{-1}$ (-2.4)	1 (-5.41)	$3 \cdot 10^{-1}$ (-0.18)	$2 \cdot 10^{-1}$ (1.58)	$1.5 \cdot 10^{-1}$ (2.83)
		E	F	G	H	I	J
натур	1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16	241120	264840	282880	263664	265584	262280
Min E Грей	1,2,4,3,7,8,6,5,13,14,16,15,11,12,10,9	136704	258352	276448	221056	180968	155688
1	1,8,13,12,5,4,9,16,3,6,15,10,7,2,11,14	299968	311024	315548	311144	315932	316976
Min G 2	1,2,3,4,8,7,6,5,9,10,11,12,16,15,14,13	182272	227536	254648	220080	215688	207584
3	1,8,12,5,4,11,15,16,6,13,9,10,7,2,14,3	250776	323448	324956	311632	294804	278392
Min F 5	1,2,3,4,8,6,7,5,9,10,11,12,16,14,15,13	192232	227536	254648	220080	215688	209696
Max F 6	1,8,4,5,11,12,16,15,13,14,10,9,7,2,6,3	214864	323464	324968	297048	265800	242632
Max G 6	1,8,4,5,11,12,16,15,13,14,10,9,7,2,6,3	214864	323464	324968	297048	265800	242632
Min H 7	1,2,4,8,16,6,3,5,7,13,12,14,10,9,11,15	156472	239380	268548	212572	184504	166920
Max H 8	1,8,10,7,14,9,15,16,2,5,3,4,13,12,6,11	289856	313688	315292	321016	326980	321872
Min I Грей	1,2,3,4,8,7,6,5,9,10,11,12,16,15,14,13	136704	258352	276448	221056	180968	155688
Max I 9	1,8,9,4,5,13,16,15,10,2,3,12,6,11,14,7	293100	312204	314546	319410	328424	326080
Min J Грей	1,2,3,4,8,7,6,5,9,10,11,12,16,15,14,13	136704	258352	276448	221056	180968	155688
Max J 9	1,8,9,4,5,13,16,15,10,2,3,12,6,11,14,7	293100	312204	314546	319410	328424	326080

С целью большей наглядности полученных результатов приведенные в таблицах 1 и 2 данные были отображены на рисунке 3 в виде зависимости количества ошибок от отношения сигнал/шум (ОСШ) $q = 10 \lg \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_\mu^2} \right)$ при разных способах кодирования, отражающих разные способы биекции пространств.

кодирования, отражающих разные способы биекции пространств.



а)



б)

Рис. 3. Зависимость количества ошибок от ОСШ при разных способах кодирования: а – гауссовский закон распределения; б – равномерный закон распределения

Из рисунка 3 видно, что код Грея оптимален в случае гауссовских шумов за исключением малых значений ОСШ. Для сигнала 16-QAM они составляют $q < -5$ дБ. В данных условиях наименьшее количество ошибок обеспечивает код 5. Если шумы имеют равномерный закон распределения, то картина меняется. Код Грея начинает проигрывать перед кодовыми конструкциями 5 и 7 уже при $q < 0$ дБ.

Выводы

1) Полученные результаты доказывают, что в зависимости от интенсивности и вида действующих помех можно осуществить оптимизацию биекции пространств при выборе способа построения сигнально-кодовой конструкции, что позволит уменьшить вероятность возникающих ошибок.

2) Учитывая возможную программную реализацию сигнально-кодовой конструкции, можно рекомендовать адаптивное построение способа биекции в зависимости от действующих помех и их интенсивности, предусматривая определенное количество вариантов кодирования.

Литература

1. Бондаренко В.А., Морозов А.Н., Николаев А.В. Метрические пространства, Ярославль: ЯрГУ, 2017, 109 с.
2. Попов А.И., Попов И.Ю. Пространство и операторы, СПб: Университет ИТМО, 2020. 85 с.
3. Олейник Б.В., Суцанский В.И. Группы изометрий пространств Хэмминга периодических последовательностей, Сибирский математический журнал январь – февраль 2013. Том 54, № 1.
4. Окунев Ю.Б. Теория фазоразностной модуляции. М.: Связь, 1979. 215 с.
5. Зюко А.Г. Помехоустойчивость и эффективность систем передачи информации. М.: Радио и Связь, 1985, 271 с.
6. Gray F. Pulse Code Communication, 1953. U. S. Patent No. 2632058.
7. Стародубцев В.Г. Алгоритм формирования не двоичных каскадированных последовательностей Гордона-Миллса-Велча // Радиотехника и электроника. 2025. Т. 70, № 11. С. 1102-1108.
8. Дегтярев А.Н., Афонин И.Л., Зеленкевич Д.Ю. Метод повышения помехоустойчивости систем передачи информации. // Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии. 2025. № 2. С. 265-280.
9. Назаров Л. Е. Помехоустойчивость оптимального посимвольного приема сигналов с корректирующим кодированием в полях Гаула для каналов с замираниями // Радиотехника и электроника. 2024. Т. 69, № 9. С. 887-893.
10. Когновицкий О.С., Рабин А.В., Кукунин Д.С. Множественный доступ с кодовым уплотнением каналов на основе рекуррентных последовательностей над полем с двойным расширением // Электросвязь. 2025. № 10. С. 28-43.
11. Меркутов А.С. Моделирование устройств приема и обработки 1024-QAM сигналов на основе адаптивных эквалайзеров // Динамика сложных систем. 2025. Т.19, № 2. С. 21-29.
12. Парамонов А.А., Чу В.В. Помехоустойчивость приема сигнала OFDM с использованием квадратурной амплитудной модуляции с мягкими решениями при наличии узкополосных помех // Russian Technological Journal. 2024. № 12(5). С. 17-32. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-17-32>. EDN: EBOWFT
13. Жарких С.А., Поборчая Н.Е. Расширенный фильтр Калмана, метод моментов и помехоустойчивость приема сигнала M-QAM // Электросвязь. 2025. № 11. С. 77-84.
14. Аджемов А.С., Аджемов С.А. Особенности и свойства двоичных последовательностей в информационных и телекоммуникационных системах. М.: ИД «Медиа Паблишер», 2024, 204 с.
15. Basyrov I.I., Adzhemov A.S. Binary Correcting Codes with Maximum Coding Rate // 2025 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), Tyumen, Russian Federation, 2025, pp. 1-4, doi: 10.1109/SYNCHROINFO65403.2025.11079361.
16. Adzhemov A.S., Adzhemov S.A., Kudryashova A.Y. Construction of a Primary Source Code with Given Code Distances Between Adjacent Code Combinations // 2024 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), Vyborg, Russian Federation, 2024, pp. 1-4, doi: 10.1109/SYNCHROINFO61835.2024.10617785.
17. Adzhemov S.A., Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. Features of Bijection of Spaces in Signal-Code Constructions // 2024 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), Vyborg, Russian Federation, 2024, pp. 1-5, doi: 10.1109/SYNCHROINFO61835.2024.10617880.
18. Adzhemov A.S., Basyrov I.I. Construction of a Linear Binary Code with Maximum Coding Rate // 2025 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), Tyumen, Russian Federation, 2025, pp. 1-5, doi: 10.1109/SYNCHROINFO65403.2025.11079368.
19. Poborchaya N.E., Kudryashova A.Y., Adzhemov A.S. Optimization of Signal-Code Design Taking into Account the Peculiarity of Bijection of Spaces During Modulation and Demodulation // 2025 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO), Tyumen, Russian Federation, 2025, pp. 1-6, doi: 10.1109/SYNCHROINFO65403.2025.11079324.
20. Поборчая Н. Е., Жарких С. А. Анализ влияния множителя лагранжа на сходимость алгоритма оценивания параметров сигнала M-QAM, основанного на методе моментов // Научные исследования в космических исследованиях Земли. 2025. Т. 17, № 3. С. 15-21. DOI 10.36724/2409-5419-2025-17-3-15-21. EDN KJFJCI.
21. Poborchaya N. E., Zharkikh S. A., Lobov E. M. The method of moments in the problem of estimating the parameters of a communication channel // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2024. Vol. 18, No. 11, pp. 45-52. DOI 10.36724/2072-8735-2024-18-11-45-52. EDN VCOOUS.
22. Поборчая Н. Е., Кудряшова А. Ю. Анализ не рекуррентных алгоритмов детектирования сигнала 4-QAM в системе с MIMO с разным количеством антенн в условиях Релеевского канала с доплеровским расширением спектра // Научные исследования в космических исследованиях Земли. 2024. Т. 16, № 5. С. 35-41. DOI 10.36724/2409-5419-2024-16-5-35-41. EDN JWYYLD.
23. Chirov D. S., Lobova E. O. Wideband HF signals dispersion distortion compensator based on digital filter banks. Theory and approbation // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Vol. 14, No. 4, pp. 57-65. DOI 10.36724/2072-8735-2020-14-4-57-65. EDN AWIQBK.
24. Чиров Д. С., Лобов Е. М. Выбор сигнально-кодовой конструкции для командно-телеметрической линии радиосвязи с беспилотными летательными аппаратами средней и большой дальности // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2017. Т. 11, № 10. С. 21-28. EDN ZTBQJL.
25. Поборчая Н. Е. Регуляризирующие алгоритмы детектирования сигнала M-QAM в системе с MIMO, основанные на фильтрации Калмана // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2022. Т. 16, № 12. С. 4-10. DOI 10.36724/2072-8735-2022-16-12-4-10. EDN KYPSSX.
26. Поборчая Н. Е., Лобова Е. О. Анализ использования фильтра Калмана в процедуре детектирования сигнала в системе с MIMO и приемником прямого преобразования // Научные исследования в космических исследованиях Земли. 2022. Т. 14, № 2. С. 4-9. DOI 10.36724/2409-5419-2022-14-2-4-9. EDN JDZLZU.

OPTIMIZATION OF CODING IN A SIGNAL-CODE DESIGN FOR DIFFERENT BIT ERROR DISTRIBUTIONS DURING DEMODULATION

Artem S. Adzhemov, MTUCI, Moscow, Russia, evglushak@yandex.ru

Natalia E. Poborchaya, MTUCI, Moscow, Russia

Abstract

Modern communications are used in a wide variety of human activities, as well as in various automated and information systems. The messages they generate vary greatly in nature, and they also have different requirements for message delivery time, accuracy, and so on. Furthermore, it's important to consider that various transmission media, including physical wire pairs, optical communication lines, and radio waves, have significantly different characteristics to provide telecommunications capabilities for various sources. This must be taken into account when selecting the appropriate signal transmission method. Converting various messages from the source to digital form enables their efficient processing, such as primary and noise-immune coding, including the potential for software solutions in practical implementation. At the same time, matching the spectral characteristics of the digital signal to the frequency characteristics of the channel requires the use of discrete modulation methods, resulting in the signal becoming analog. Thus, at various stages, signals are transformed, which are considered in different metric spaces. Moreover, these transformations do not meet the conditions of isomorphic transformation, requiring separate study taking into account discrete modulation methods and the types of interference present. This makes it possible to find an optimal method for bijecting spaces during signal transformation, which, in particular for discrete modulation methods, allows for a reduction in the probability of bit errors during demodulation under interference.

Keywords: bijection of spaces, metric spaces, signal-code constructions, source coding, types (methods) of discrete modulation, code distance

References

- [1] V.A. Bondarenko, A.N. Morozov, A.V. Nikolaev, "Metric spaces," Yaroslavl: Yaroslavl State University, 2017, 109 p.
- [2] A.I. Popov, I.Yu. Popov, "Space and Operators," St. Petersburg: ITMO University, 2020. 85 p.
- [3] B.V. Oliynyk, V.I. Sushchansky, "Isometry groups of Hamming spaces of periodic sequences," *Siberian Mathematical Journal*. January-February 2013. Vol. 54, No. 1.
- [4] Yu.B. Okunev, "Theory of phase-difference modulation," Moscow: Svyaz, 1979. 215 p.
- [5] A.G. Zyuko, "Noise immunity and efficiency of information transmission systems," Moscow: Radio and Communications, 1985, 271 p.
- [6] F. Gray, "Pulse Code Communication, 1953. U. S. Patent No. 2632058.
- [7] V.G. Starodubtsev, "Algorithm for generating non-binary cascaded Gordon-Mills-Welch sequences," *Radio Engineering and Electronics*. 2025. Vol. 70, No. 11, pp. 1102-1108.
- [8] A.N. Degtyarev, I.L. Afonin, D.Yu. Zelenkevich, "Method for increasing noise immunity of information transmission systems," *Infocommunication and radioelectronic technologies*. 2025. No. 2, pp. 265-280.
- [9] L. E. Nazarov, "Noise immunity of optimal symbol-by-symbol reception of signals with correction coding in Galois fields for channels with," *Radio Engineering and Electronics*. 2024. Vol. 69, No. 9, pp. 887-893.
- [10] O.S. Kognovitsky, A.V. Rabin, D.S. Kukunin, "Multiple access with code division multiplexing of channels based on recurrent sequences over a double-extension field," *Electrosvyaz*. 2025. No. 10, pp. 28-43.
- [11] A.S. Merkutov, "Modeling of devices for receiving and processing 1024-QAM signals based on adaptive equalizers," *Dynamics of complex systems*. 2025. Vol. 19, No. 2, pp. 21-29.
- [12] A.A. Paramonov, V.V. Chu, "Noise immunity of OFDM signal reception using quadrature amplitude modulation with soft decisions in the presence of narrowband interference," *Russian Technological Journal*. 2024., no. 12(5), pp. 17-32. <https://doi.org/10.32362/2500-316X-2024-12-5-17-32>.
- [13] S.A. Zharkikh, N.E. Poborchaya, "Extended Kalman filter, method of moments and noise immunity of M-QAM signal reception," *Electrosvyaz*. 2025. No. 11, pp. 77-84.
- [14] A.S. Adzhemov, S.A. Adzhemov, "Features and properties of binary sequences in information and telecommunication systems," Moscow: Media Publisher, 2024, 204 p.
- [15] I. I. Basyrov and A. S. Adzhemov, "Binary Correcting Codes with Maximum Coding Rate," *2025 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*, Tyumen, Russian Federation, 2025, pp. 1-4, doi: 10.1109/SYNCHROINFO65403.2025.11079361.
- [16] A. S. Adzhemov, S. A. Adzhemov and A. Y. Kudryashova, "Construction of a Primary Source Code with Given Code Distances Between Adjacent Code Combinations," *2024 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*, Vyborg, Russian Federation, 2024, pp. 1-4, doi: 10.1109/SYNCHROINFO61835.2024.10617785.
- [17] S. A. Adzhemov, A. S. Adzhemov and A. Y. Kudryashova, "Features of Bijection of Spaces in Signal-Code Constructions," *2024 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*, Vyborg, Russian Federation, 2024, pp. 1-5, doi: 10.1109/SYNCHROINFO61835.2024.10617880.
- [18] A. S. Adzhemov and I. I. Basyrov, "Construction of a Linear Binary Code with Maximum Coding Rate," *2025 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*, Tyumen, Russian Federation, 2025, pp. 1-5, doi: 10.1109/SYNCHROINFO65403.2025.11079368.
- [19] N. E. Poborchaya, A. Y. Kudryashova and A. S. Adzhemov, "Optimization of Signal-Code Design Taking Into Account the Peculiarity of Bijection of Spaces During Modulation and Demodulation," *2025 Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*, Tyumen, Russian Federation, 2025, pp. 1-6, doi: 10.1109/SYNCHROINFO65403.2025.11079324.
- [20] N.E. Poborchaya, S.A. Zharkikh, "Analysis of the effect of the lagrange multipliers on the estimation algorithm convergence of the parameters MQAM signal based on method of moments," *H&ES Reserch*. 20254. Vol. 17. No. 3, pp. 1521. doi: 10.36724/2409-5419-2025-1-7-3-15-21
- [21] N. E. Poborchaya, S. A. Zharkikh, E. M. Lobov, "The method of moments in the problem of estimating the parameters of a communication channel," *T-Comm*. 2024. Vol. 18, No. 11, pp. 45-52. DOI 10.36724/2072-8735-2024-18-11-45-52.
- [22] N.E. Poborchaya, A.Yu. Kudryashova, "Analysis of nonrecurrent algorithms for 4QAM signal detection in a MOIMO system with different number of antennas in Rayleigh channel conditions with Doppler spreading," *H&ES Reserch*. 2024. Vol. 16. No 5. P. 3541. doi: 10.36724/2409-5419-2024-16-5-35-41.
- [23] D. S. Chirov, E. O. Lobova, "Wideband HF signals dispersion distortion compensator based on digital filter banks. Theory and approbation," *T-Comm*. 2020. Vol. 14, No. 4, pp. 57-65. DOI 10.36724/2072-8735-2020-14-4-57-65.
- [24] D. S. Chirov, E.M. Lobov, "Choice of signal-code constructure for the command-telemetry radio communication line with medium and long range unmanned aerial vehicles," *T-Comm*, 2017, vol. 11, no.10, pp. 21-28.
- [25] N.E. Poborchaya, "Regularizing algorithms based on kalman filtering for M-QAM signal detection in MIMO." *T-Comm*, 2022, vol. 16, no.12, pp. 4-10.
- [26] N.E. Poborchaya, E.O. Lobova, "Kalman filter use analysis in signal detection procedure in system with MIMO and direct conversion receiver," *H&ES Reserch*. 2022. Vol. 14. No. 2. P. 49. doi: 10.36724/2409-5419-2021-1-42-49.