

ТЕОРИЯ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА ДЛЯ СХЕМОТЕХНИЧЕСКОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ

DOI: 10.36724/2072-8735-2020-14-11-21-32

Manuscript received 06 July 2020

Accepted 28 September 2020

Горгадзе Светлана Феликсовна,
Московский технический университет связи
и информатики, Москва, Россия,
svetlana-gorgadze@yandex.ru

Максимов Антон Алексеевич,
Московский технический университет связи
и информатики, Москва, Россия,
mash2525@yandex.ru

Ключевые слова: метод Ньютона-Рафсона,
матрица Якоби, проекционные методы,
подпространства Крылова, ортогонализация
Арнольди, матрица Хессенберга, вращения Гивенса,
согласование усилителя мощности

Приводится анализ и обобщение основных публикаций по методам синтеза и анализа нелинейных активных РЧ/СВЧ схем, основанным на использовании метода гармонического баланса. В результате некоторой классификации математических подходов и приемов, применяющихся в контексте этого метода, произведен выбор и обзор базовых алгоритмов, последовательное применение которых позволяет получить конечный результат для схемы любой сложности. Рассмотрены принципы составления исходной системы дифференциальных уравнений для электронных схем и сведения ее к системе линейных алгебраических уравнений. Приводится подробная и вместе с тем упрощенная трактовка подходов, предполагающих использование проекционных методов и подпространств Крылова, с целью более простого их понимания. Рассмотрен как полный, так и рестартный обобщенный метод минимальных невязок, при котором искомое решение получается в ходе итерационного процесса, на каждом этапе которого строятся подпространства меньшей размерности. Рассматриваются возможности симуляторов и пакетов прикладных программ, предназначенных для схемотехнического проектирования электронных схем. Обсуждается задача согласования усилителя мощности в режиме большого сигнала с использованием симулятора APLAC, являющегося технологией NI AWR для проектирования высокочастотных схем.

Информация об авторах:

Горгадзе Светлана Феликсовна, профессор, д.т.н., Московский технический университет связи и информатики, кафедра "Радиооборудование и схематехника", Москва, Россия

Максимов Антон Алексеевич, аспирант, Московский технический университет связи и информатики, кафедра "Радиооборудование и схематехника", Москва, Россия

Для цитирования:

Горгадзе С.Ф., Максимов А.А. Теория гармонического баланса для схемотехнического проектирования // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Том 14. №11. С. 21-32.

For citation:

Gorgadze S.F., Maximov A.A. (2020) Harmonic balance theory for scheme technical design. T-Comm, vol. 14, no.11, pp. 21-32. (in Russian)

Введение

Для успешного внедрения современных технологий связи – сетей LTE-A/5G, новых систем аэрокосмического и военного назначения, а также беспроводных устройств следующего поколения - требуется дальнейшее развитие и совершенствование методов разработки радиочастотных устройств, что обусловлено новыми требованиями к характеристикам последних – таким как ширина рабочей полоса частот, линейность и эффективность. Следствием этого является повышенное внимание к мощным математическим методам разработки электронных схем, одним из которых является теория гармонического баланса, являющаяся базовым (ключевым) инструментом исследования и разработки нелинейных РЧ/СВЧ схем с транзисторами с начала 80-х годов [1,2].

В контексте теории гармонического баланса применяются весьма разнообразны и зачастую сложные для понимания математические методы, реализованные в системах автоматизированного проектирования (САПР) электронных схем систем связи – таких как Microwave Office фирмы Applied Wave Research (AWR) [3], Advanced Design System (ADS) фирмы Agilent Technologies [4], SCEPTRE фирмы CADENCE [5] и др. Но непонимание математических основ теории гармонического баланса может приводить к неточностям при использовании таких САПР, результатом чего является получение некорректных, а зачастую и совершенно не реальных результатов. Вместе с тем, в обзорные статьи по теории гармонического баланса для САПР как правило не включаются систематические описания применяющихся математических методов и алгоритмов, а лишь классификация и общее описание огромного их многообразия, что делает эти обзоры полезными в основном для расширения общего кругозора широкого круга специалистов, уже имеющих базовые и глубокие знания в данной области [6,7]. В других случаях рассматриваются только алгоритмы, описанные сугубо математическим языком и трудно понимаемые специалистами технического профиля.

Целью работы является обзор и описание математических методов, применяющихся в теории гармонического баланса и включенных в один из самых эффективных и универсальных подходов, основу которого составляют проекционные методы и подпространства Крылова – обобщенный метод минимальных невязок (Generalized Minimal Residual Method (GMRES)).

1. Составление исходной системы уравнений

Традиционный подход предполагает составление эквивалентной схемы разрабатываемого прибора, которая может состоять из двухполюсных элементов таких как резисторы, конденсаторы, индуктивности, независимые и зависимые источники тока и напряжения. В минимальный базовый набор могут включаться вышеперечисленные элементы как с линейными, так и нелинейными характеристиками. Затем необходимо любым способом составить систему интегрально-дифференциальных уравнений, описывающих электрическое равновесие схемы. Для этого имеется широкий спектр хорошо разработанных подходов, таких как: матрично-топологический метод на основе теории графов [8], метод узловых потенциалов [9,10], метод контурных токов [11,12], уравнения переменных состояния [13].

Метод гармонического баланса основывается на предположении, что для заданного гармонического сигнала, возбуждающего схему, существуют стационарные решения системы интегрально-дифференциальных уравнений, описывающих ее, причем эти решения с приемлемой точностью могут быть аппроксимированы конечным числом гармоник с помощью ряда Фурье, поэтому напряжения и токи в схеме могут быть представлены как сумма конечного числа таких гармоник с неизвестными амплитудами. Тогда приравнявая амплитуды одинаковых гармоник в правых и левых частях интегрально-дифференциальных уравнений, получим систему нелинейных алгебраических уравнений (СНАУ) размерностью $(2N+1)P$, где N – число учитываемых гармоник, P – размерность исходной системы дифференциальных уравнений. Таким образом, размерность системы уравнений увеличивается в $(2N+1)$ раз, но интегрально-дифференциальная система преобразуется в СНАУ. Такой подход, основанный на максимальной детализации схемы, применяется в основном для разработки интегральных схем, включающих большое число нелинейных элементов (НЭ). При этом размерность полученной СНАУ может составлять десятки-сотни тысяч, поэтому требования к памяти и вычислительные затраты при моделировании сложных схем методом гармонического баланса могут быть значительными [14].

В последнее время разрабатываются методы измерения -параметров при большом уровне входного сигнала, что очевидно позволит в значительной степени понизить сложность уравнений гармонического баланса прежде всего для микросборок, печатных плат и многокристальных модулей. Для измерения -параметров в режиме большого сигнала в настоящее время могут использоваться различные методы, такие как «горячие» измерения -параметра [15], метод переменной нагрузки [16], способ, основанный на измерении X-параметров [17], метод Cardiff Lite (компания Mesuro), метод удаленной переменной нагрузки [18].

При анализе ВЧ-схемы, число НЭ в которой не велико, целесообразно разбить ее на линейную и нелинейную части, в результате чего в ней удастся выделить линейный многополюсник и некоторое количество НЭ, связанных с ним портами, как это показано на рис. 1.

Предположим, что напряжение, снимаемое с k -го НЭ схемы, описывается выражением:

$$U_k(t) = U_{k0} + \sum_{n=1}^N (U_{kn}^I \cos(\omega_n t) + U_{kn}^Q \sin(\omega_n t)), \tag{1}$$

где U_{k0} , U_{kn}^I , U_{kn}^Q – постоянная составляющая напряжения, а также синфазная и квадратурная составляющие его n -ой гармоники с частотой ω_n соответственно, N – заранее выбранное число учитываемых гармоник.



Рис. 1. Представление исследуемой схемы в методе гармонического баланса при малом числе НЭ

Аналогично можно записать ток через k -ый нелинейный элемент:

$$I_k(t) = I_{k0} + \sum_{n=1}^N (I_{kn}^I \cos(\omega_n t) + I_{kn}^O \sin(\omega_n t)). \quad (2)$$

Тогда полный состав неизвестных можно описать как $\bar{U} = [\bar{U}_1, \bar{U}_2, \dots, \bar{U}_K]$, где K – число НЭ схемы, $\bar{U}_K = [U_{k0}, U_{k1}^I, U_{k1}^O, \dots, U_{kN}^I, U_{kN}^O]^T$ – вектор, описывающий состав неизвестных амплитуд гармоник напряжения для k -го НЭ, $k=1, \dots, K$, а $[\cdot]^T$ – обозначение операции транспонирования матрицы. Аналогично можно записать и вектор, описывающий состав неизвестных амплитуд гармоник токов: $\bar{I} = [\bar{I}_1, \bar{I}_2, \dots, \bar{I}_K]$. Погрешность аппроксимации для каждого НЭ описывается как сумма амплитуд спектральных составляющих токов, неучтенных тригонометрической суммой:

$$\sigma_k = \sum_{m=1}^M \sqrt{(I_{km}^I)^2 + (I_{km}^O)^2}, \quad (3)$$

где M – число неучтенных гармоник. Очевидно, что $M \gg N$. Таким образом, в методе гармонического баланса используется линейная комбинация синусоид и косинусоид для формирования решения системы дифференциальных уравнений, описывающих нелинейную систему, а временные характеристики представляются коэффициентами гармоник.

Уравнения модели нелинейной системы формируются в частотной области и соответствуют исходным временным уравнениям при подстановке в них напряжений и токов в узлах схемы, представленных в виде рядов Фурье. При приравнивании коэффициентов отдельно при синусах и косинусах одной и той же частоты в правой и левой частях исходной системы нелинейных дифференциальных уравнений получаем СНАУ размерности $(2N+1)K$ относительно амплитуд напряжений и токов в узлах схемы, то есть

$$(\bar{Y}\bar{U} - \bar{I}_{BH}) + \bar{I} = 0, \quad (4)$$

где \bar{Y} – матрица проводимостей линейного многополюсника относительно портов, \bar{I}_{BH} – вектор коэффициентов токов внешних источников, приведенных к нелинейным элементам.

2. Метод Ньютона-Рафсона

Базовый способ решения полученной системы нелинейных алгебраических уравнений основывается на методе Ньютона-Рафсона, при котором осуществляется ее линеаризация, что позволяет свести исходную задачу к многократному решению системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) той же размерности [19]. С целью пояснения данного метода и упрощения нижеследующих выкладок введем единый способ обозначения неизвестных и их нумерации для системы (4). Пусть $X_l (l=1, 2, \dots, L)$ – набор ее искомого решения относительно напряжений и токов, причем $L = (2N+1)K$. Тогда систему уравнений (4) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} F_1(X_1, X_2, \dots, X_L) = 0, \\ F_2(X_1, X_2, \dots, X_L) = 0, \\ \dots \\ F_L(X_1, X_2, \dots, X_L) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Пусть известно приближенное решение системы (5) $X_l^i (l=1, 2, \dots, L)$, где i – номер итерации. Далее, для каждого l введем поправку ΔX_l^i между решением X_l и его приближением на i -ой итерации, то есть $\Delta X_l^i = X_l - X_l^i$. Следовательно, $X_l = X_l^i + \Delta X_l^i$, ($l=1, 2, \dots, L$). Подставив X_l в (5), получим:

$$\begin{cases} F_1(X_1^i + \Delta X_1^i, X_2^i + \Delta X_2^i, \dots, X_L^i + \Delta X_L^i) = 0, \\ F_2(X_1^i + \Delta X_1^i, X_2^i + \Delta X_2^i, \dots, X_L^i + \Delta X_L^i) = 0, \\ \dots \\ F_L(X_1^i + \Delta X_1^i, X_2^i + \Delta X_2^i, \dots, X_L^i + \Delta X_L^i) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

В системе уравнений (6) неизвестными являются поправки $\Delta X_l^i (l=1, 2, \dots, L)$. Считая их малыми, а также функции $F_l(X_1, X_2, \dots, X_L)$ непрерывными и дифференцируемыми в точках $X_l^i (l=1, 2, \dots, L)$, разложим их в ряд Тейлора в окрестностях приближенных решений и ограничимся первыми дифференциалами. Тогда получим СЛАУ относительно поправок $\Delta X_l^i (l=1, 2, \dots, L)$ вида:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^L \frac{\partial F_1(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_j^i} \Delta X_j^i = -F_1(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i), \\ \sum_{j=1}^L \frac{\partial F_2(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_j^i} \Delta X_j^i = -F_2(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i), \\ \dots \\ \sum_{j=1}^L \frac{\partial F_L(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_j^i} \Delta X_j^i = -F_L(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i). \end{cases} \quad (7)$$

Все ее коэффициенты можно вычислить, если известны $X_l^i (l=1, 2, \dots, L)$. В результате решения (7) получим набор поправок $\Delta X_l^i (l=1, 2, \dots, L)$ и новое приближенное решение искомой системы $X_l^{i+1} = X_l^i + \Delta X_l^i (l=1, 2, \dots, L)$. Далее, процедура повторяется и вычисляются новые поправки $\Delta X_l^{i+1} (l=1, 2, \dots, L)$ для следующей итерации. Значения поправок используются для оценки достигнутой точности решения, которая может оцениваться по-разному – так, что условия завершения расчета могут быть нижеследующие:

$$\begin{aligned} \delta_{\min} &= \|\Delta X^i\|_{\min} = \max_{l=1, \dots, L} |\Delta X_l^i| \leq \varepsilon, \text{ либо} \\ \delta_{\text{bsi}} &= \|\Delta X^i\|_{\text{bsi}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L |\Delta X_l^i| \leq \varepsilon, \text{ либо} \\ \delta_{\text{ei}} &= \|\Delta X^i\|_{\text{ei}} = \frac{1}{L} \sqrt{\sum_{l=1}^L |\Delta X_l^i|^2} \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (8)$$

где δ_{\min} , δ_{l_1} , δ_{e_1} – соответственно l_1 -норма, l_2 -норма и евклидова (квадратичная) норма вектора $\Delta X^i = [\Delta X_1^i, \Delta X_2^i, \dots, \Delta X_L^i]^T$.

Заметим, что в матричной форме систему уравнений (7) можно записать в следующем виде:

$$Q(X^i)\Delta X^i = -F^i, \quad (9)$$

где

$$Q(X^i) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_1^i} & \frac{\partial F_1(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_2^i} & \dots & \frac{\partial F_1(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_L^i} \\ \frac{\partial F_2(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_1^i} & \frac{\partial F_2(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_2^i} & \dots & \frac{\partial F_2(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_L^i} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_L(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_1^i} & \frac{\partial F_L(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_2^i} & \dots & \frac{\partial F_L(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)}{\partial X_L^i} \end{bmatrix} \quad (10)$$

матрица Якоби, вычисленная на i -ой итерации,

$$\Delta X^i = [\Delta X_1^i, \Delta X_2^i, \dots, \Delta X_L^i]^T \quad (11)$$

вектор поправок на i -ой итерации,

$$F^i = [F_1(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i), F_2(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i), \dots, F_L(X_1^i, X_2^i, \dots, X_L^i)]^T \quad (12)$$

вектор-функция, вычисленная на i -ой итерации.

Если из (9) выразить искомый вектор поправок, то окажется, что для его определения необходимо на каждой итерации обращать матрицу Якоби, так как

$$\Delta X^i = -Q^{-1}(X^i)F^i \quad (13)$$

где $Q^{-1}(X^i)$ – матрица, обратная матрице Якоби. Тогда в окончательном виде формула последовательных приближений метода Ньютона-Рафсона решения системы нелинейных алгебраических уравнений в матричной форме имеет вид:

$$X^{i+1} = X^i - Q^{-1}(X^i)F^i. \quad (14)$$

Условия сходимости решения (14) довольно сложны, поэтому на практике они, как правило, не проверяются. Выбор достаточно точного начального приближения X^0 (каждое X_i^0 отличается от истинного значения не более чем на 10%) не гарантирует сходимость метода [19,31,32]. Полученное решение (14) подвергается процедуре обратного преобразования Фурье для получения зависимостей от времени токов и напряжений в схеме.

Весьма трудоемкой операцией при решении системы нелинейных уравнений методом Ньютона-Рафсона является очевидно вычисление матрицы Якоби на каждой итерации. С целью увеличения скорости алгоритма может использоваться метод Самарского, заключающийся в том, что на ряде итераций разрешается использовать одну и ту же матрицу Якоби – до тех пор, пока увеличивается достигнутая точность решения (см. (8)), определяемая на каждой итерации [19].

На скорость вычислений влияет также необходимость многократного решения СЛАУ большой размерности, при котором требуется обращение матрицы Якоби. Метод, который может использоваться в этом случае, полностью зави-

сит от структуры этой матрицы. Например, при слабой нелинейности она может иметь диагональную структуру, что значительно упрощает процедуру ее обращения. Но в общем случае – это невырожденная плотно-заполненная матрица. Наиболее эффективным методом решения СЛАУ в этом случае считается обобщенный метод минимальных невязок (Generalized Minimal Residual Method (GMRES)) [21,24-27], относящийся к методам проекционного типа на основе подпространств Крылова. Большинство других методов сокращения размерности исходной задачи могут рассматриваться в его контексте.

3. Методы решения СЛАУ проекционного типа

Рассмотрим общую постановку задачи решения СЛАУ, характерную для всех методов проекционного типа, к которым относятся GMRES. С этой целью для i -ой итерации процедуры Ньютона-Рафсона введем обозначения: $Q(X^i) = A$, $\Delta X^i = X$, $-F^i = B$, после чего будем рассматривать решение СЛАУ $AX = B$ порядка L , с невырожденной плотно-заполненной матрицей A , состоящей из вещественных чисел, и ненулевым вектором B . Далее, выберем приближенное решение системы $AX = B$, соответствующее вектору X_0 , и введем нулевую (начальную) невязку между ее правой и левой частями: $R_0 = B - AX_0 = AU$. Тогда точное решение искомой СЛАУ описывается формулой $X = X_0 + U$. Для его получения необходимо найти U , решив систему $B - AX_0 = AU$, что не проще, чем решить систему $AX = B$.

Предлагается приближенное решение искомой СЛАУ, уточняемое с помощью последовательных итераций. На первой итерации приближенное решение искомой системы описывается как $X_1 = X_0 + Y_1$, а невязка – как $R_1 = B - AX_0 + AY_1 = R_0 - AY_1$. При этом $Y_1 \in K_{L1}$ должно быть таким, чтобы вектор R_1 имел минимальную длину (квадратичную норму δ_e), где K_{L1} – некоторое подпространство размерности L , в котором уточняется решение искомой системы уравнений. При этом $AY_1 \in AK_{L1}$, а AK_{L1} – это подпространство поправок к невязке для данной итерации, причем $R_1 \notin AK_{L1}$. Очевидно, что в силу теоремы Пифагора квадратичная норма вектора R_1 минимальна в том и только в том случае, если вектор R_1 перпендикулярен подпространству AK_{L1} , то есть из конца вектора R_0 восстановлен перпендикуляр к AK_{L1} – вектор R_1 . Геометрическая интерпретация вышесказанного может быть записана в виде: $R_1 \perp AK_{L1}$.

Тогда на m -ой итерации $X_m = X_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m$, а $R_m = B - AX_0 - AY_0 - \dots - AY_m = B - A(X_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m) = R_{m-1} - AY_m$, где $Y_1 \in K_{L1}, Y_2 \in K_{L2}, \dots, Y_m \in K_{Lm}, AY_1 \in AK_{L1}, \dots, AY_m \in AK_{Lm}$, и $R_m \perp AK_{Lm}$. (15)

Таким образом, данную задачу можно сформулировать следующим образом: для исходной СЛАУ $AX = B$ размерности L при известном ее приближенном решении X_0 требуется уточнять его поправкой Y_m на каждой m -ой итерации, принадлежащей подпространству K_{Lm} , так, чтобы выполнялось условие (15), то есть $R_m = (B - A(X_0 + Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m)) \perp AK_{Lm}$. Эта формулировка искомого проекционного задачи, очевидно являющаяся ее геометрической интерпретацией, имеется, например, в [20]. Алгебраическая интерпретация данной задачи предполагает рассмотрение ортогональных базисов подпространств K_{Lm} и AK_{Lm} , где $m = 1, 2, \dots$, – номер итерации [21].

Допустим, матрица $Q_{Lm} = [q_{1m} q_{2m} \dots q_{Lm}]$ состоит из векторов $q_{1m}, q_{2m}, \dots, q_{Lm}$, образующих ортогональный базис в подпространстве K_{Lm} , которое является подпространством поправок к решению искомого СЛАУ на m -ой итерации.

Тогда Y_m является линейной комбинацией q_1, q_2, \dots, q_m , где $m = 1, 2, \dots$, и для любого m существует матрица $P_{Lm} = [p_{1m} p_{2m} \dots p_{Lm}]$, где $p_{1m} = Aq_{1m}, p_{2m} = Aq_{2m}, \dots, p_{Lm} = Aq_{Lm}$, состоящая из векторов, образующих ортогональный базис подпространства AK_{Lm} . Далее, учитываем, что

- для первой итерации $R_1 = B - A(X_0 + Y_1), Y_1 = Q_{L1}Z_1$, то есть вектор $R_1 = R_0 - AQ_{L1}Z_1$ должен быть ортогонален подпространству, в котором существует поправка к невязке AY_1 , где Z_1 – вектор-столбец коэффициентов, соответствующих разложению Y_1 в ортогональном базисе подпространства Q_{L1} ; тогда согласно (15) $p_{L1}^T(R_0 - AQ_{L1}Z_1) = 0$, следовательно, $Z_1 = (P_{L1}^T AQ_{L1})^{-1} P_{L1}^T R_0$, $Y_1 = Q_{L1}(P_{L1}^T AQ_{L1})^{-1} P_{L1}^T R_0$, и $X_1 = X_0 + Q_{L1}(P_{L1}^T AQ_{L1})^{-1} P_{L1}^T R_0$, а $R_1 = R_0 - AY_1$;

- для второй итерации $R_2 = R_1 - AY_2$, где $Y_2 = Q_{L2}Z_2$, $p_{L2}^T(R_1 - AQ_{L2}Z_2) = 0$, следовательно, $Z_2 = (P_{L2}^T AQ_{L2})^{-1} P_{L2}^T R_1, Y_2 = Q_{L2}(P_{L2}^T AQ_{L2})^{-1} P_{L2}^T R_1$, и $X_2 = X_0 + Q_{L1}(P_{L1}^T AQ_{L1})^{-1} P_{L1}^T R_0 + Q_{L2}(P_{L2}^T AQ_{L2})^{-1} P_{L2}^T R_1$.

Таким образом, на m -ой итерации X_0 должно уточняться в соответствии с формулой:

$$X_m = X_0 + Q_{L1}(P_{L1}^T AQ_{L1})^{-1} P_{L1}^T R_0 + Q_{L2}(P_{L2}^T AQ_{L2})^{-1} P_{L2}^T R_1 + \dots + Q_{Lm}(P_{Lm}^T AQ_{Lm})^{-1} P_{Lm}^T R_{m-1}$$

а невязка $R_m = R_{m-1} - AQ_{Lm}(P_{Lm}^T AQ_{Lm})^{-1} P_{Lm}^T R_{m-1}$. На каждой итерации необходимо также вычислять квадратичную норму невязки δ_{em} и сравнивать ее заранее заданным допустимым минимальным значением невязки δ_{emin} [22].

Таким образом, любой алгоритм проекционного типа выглядит следующим образом:

1. Ввод $L, A, B, X_0, \delta_{emin}$
2. Вычисление $R_0 = B - AX_0$

3. $Y_0 = 0$
4. $m = 1, 2, \dots$, (начало цикла)
5. Построение ортогональных базисов Q_{Lm} и P_{Lm}
6. Вычисление $Z_m = (P_{Lm}^T AQ_{Lm})^{-1} P_{Lm}^T R_{m-1}$
7. Вычисление $Y_m = Y_{m-1} + Q_{Lm}Z_m$
8. Вычисление $R_m = R_{m-1} - AZ_m$
9. Вычисление квадратичной нормы R_m , то есть δ_{em}
10. Если $\delta_{em} > \delta_{emin}$, то вернуться к 4 при $m = m + 1$
11. $X_m = X_0 + Y_m$
12. Конец

4. Подпространства Крылова и ортогонализация Арнольди

При построении и реализации проекционных методов важную роль играют подпространства Крылова [23,28,30]. В общем случае такое подпространство размерности L , порожаемое вектором V_1 и матрицей A , представляет собой линейную оболочку векторов $v_1, Av_1, A^2v_1, \dots, A^{L-1}v_1$, то есть $K_L(A, v_1) = span(v_1, Av_1, A^2v_1, \dots, A^{L-1}v_1)$, где $v_1 = V_1 / \delta_{eV}$, $\delta_{eV} = \|V_1\|_e$ – квадратичная норма вектора V_1 . Таким образом, данное подпространство задается набором базисных векторов: $v_l = A^{l-1}v_1, l = 1, \dots, L$. Переход от базиса v_l к ортогональному ортонормированному базису $q_l = 1, \dots, L$ в этом подпространстве обычно осуществляется с помощью ортогонализации Арнольди – так, что каждый следующий вектор базиса вычисляется через предыдущий по формуле [21]:

$$q_{l+1} = v_{l+1} - \sum_{i=1}^l h_{il} q_i = Aq_l - \sum_{i=1}^l h_{il} q_i, q_1 = v_1. \quad (16)$$

Полученные векторы нормируются к их квадратичным нормам.

Допустим, предыдущие l векторов ортогонального базиса построены, тогда

$$\forall i, j (i \geq 1, j \leq l) \Rightarrow (q_i, q_j) = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j. \end{cases} \quad (17)$$

Следовательно, для нахождения коэффициентов h_{il} можно умножить (16) скалярно на вектор q_j ($j \leq l$) и приравнять результат к нулю:

$$(Aq_l, q_j) - \sum_{i=1}^l h_{il} (q_i, q_j) = 0. \quad (18)$$

Из (16) и (17) следует выражение для вычисления коэффициентов h_{il} , то есть

$$h_{il} = (Aq_l, q_i). \quad (19)$$

Таким образом, метод ортогонализации Арнольди можно представить в виде нижеследующего алгоритма:

1. Ввод $L, A, v_1 (\|v_1\|_e = 1)$
2. $q_1 = v_1$
3. $l = 1, \dots, L$ (начало цикла 1)
4. $v_{l+1} = A^l v_1 / \|A^l v_1\|_e$

5. $q_{l+1} = 0$
6. $i = 1, \dots, l$ (начало цикла 2)
7. $h_{il} = (v_{i+1}, q_i)$
8. $q_{l+1} = q_{l+1} + h_{il}q_i$
9. $i = i + 1$ (возврат к 6)
10. $q_{l+1} = v_{l+1} - q_{l+1}$
11. $\delta_{l+1} = \|q_{l+1}\|_e$
12. $q_{l+1} = q_{l+1} / \delta_{l+1}$
13. $l = l + 1$ (возврат к 3)

С целью иллюстрации алгоритма Арнольди рассмотрим пример с предельно простыми и очевидными вычислениями.

Допустим, что $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, и $v_1 = \frac{V_1}{\delta_e V_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$, а

$$V_2 = Av_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, $v_2 = \frac{V_2}{\delta_e V_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Тогда ортонормированный базис в данном подпространстве Крылова $K_2(A, v_1) = \text{span}(v_1, Av_1)$ соответствует двум векторам:

$$q_1 = v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{ и } q_2 = (v_2 - h_{11}q_1) / \|q_2\|_e,$$

где $h_{11} = \frac{(Av_1, v_1)}{\|Av_1\|_e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, то есть

$$q_2 = \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}{\|q_2\|_e} = \frac{1}{\|q_2\|_e} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $(q_1, q_2) = 0$, где (\bullet, \bullet) – обозначение скалярного произведения векторов. Заметим, что на точность вычислений в данном случае существенно влияют ошибки округления при нормировке векторов к их нормам.

Возвращаясь к исходной задаче решения СЛАУ, отметим, что нас интересует не столько построение ортонормированного базиса в подпространстве Крылова, сколько способ выражения произведения матриц через легко обратимую матрицу. С целью получения необходимого результата перепишем выражение (16) в виде:

$$Aq_l = \sum_{i=1}^l h_{il}q_i + q_{l+1}. \quad (20)$$

Тогда

$$AQ_l = Q_l H_l + Q_{cl}, \quad (21)$$

где Q_l и Q_{cl} – прямоугольные матрицы размером $L \times l$, столбцы первой из которых состоят из векторов q_1, \dots, q_l , а столбцы второй – из векторов q_2, \dots, q_{l+1} , а H_l – квадратная матрица в верхней Хессенберговой (треугольной) форме размерности $l \times l$, то есть

$$H_l = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & \dots & h_{1l} \\ 0 & h_{22} & \dots & \dots & h_{2l} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & h_{3l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & h_{ll} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Очевидно, что (21) можно переписать как

$$AQ_{l+1} = Q_{l+1} H_{l,l+1}, \quad (23)$$

где Q_{l+1} – прямоугольная матрица размером $L \times (l+1)$, столбцы которой состоят из векторов q_1, \dots, q_{l+1} , а $H_{l,l+1}$ – прямоугольная матрица в верхней Хессенберговой форме размера $(l+1) \times l$, имеющая вид:

$$H_l = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1l} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2l} \\ 0 & h_{23} & \dots & h_{3l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & h_{ll} \\ 0 & 0 & \dots & h_{(l+1)l} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

5. GMRES

В данном методе v_1 на каждой i -ой итерации выбирается равным $r_{m-1} = R_{m-1} / \delta_{eR_{m-1}}$ (например, на первой итерации $v_1 = r_0 = R_0 / \delta_{eR_0}$), а проекционная задача (15) заменяется на задачу минимизации функционала невязки на каждой итерации, который определяется как

$$\|R_m\|_e = \|R_{m-1} - AQ_{Lm}Z_m\|_e = \|\delta_{eR_{m-1}}r_{m-1} - AQ_{Lm}Z_m\|_e, \quad (25)$$

где Q_{Lm} – матрица размера $L \times L$, соответствующая полному ортонормированному базису, построенному на m -ой итерации.

Заметим, что первым вектором при построении ортонормированного базиса Q_{Lm} был вектор r_{m-1} , в результате чего справедливым является нижеследующее выражение:

$$\|R_m\|_e = \|\delta_{eR_{m-1}}Q_{(L+1)m}e_1 - Q_{(L+1)m}H_{L+1,L(m)}Z_m\|_e = \|Q_{(L+1)m}(\delta_{eR_{m-1}}e_1 - H_{L+1,L(m)}Z_m)\|_e \quad (26)$$

Где $e_1 = [100\dots 0]^T$, а индекс m в Q_{Lm} и $H_{L+1,L(m)}$ означает принадлежность базиса и Хессенберговой матрицы к m -ой итерации. Очевидно, что норма невязки $\|R_m\|_e$ минимальна, если $\delta_{eR_{m-1}}e_1 - H_{L+1,L(m)}Z_m = 0$, то есть искомая за-

дача сводится к решению относительно Z_m системы уравнений

$$H_{L+1,L(m)}Z_m = \delta_{eR_{m-1}}e_1 \quad (27)$$

на каждой итерации, а также расчету начального вектора невязки для следующей итерации и его нормы с целью решения вопроса о необходимости продолжения итераций. Кроме того, необходимо рассчитать приближенное решение искомой СЛАУ $X_m = X_0 + Y_1 + \dots + Y_m$, где $Y_m = Q_{Lm}Z_m$.

6. Вращения Гивенса

Система уравнений (27) очевидно является переопределенной, так как в ней число уравнений превышает число переменных, поэтому она не имеет точного решения. Стандартным способом ее приближенного решения является метод наименьших квадратов [30], но, в силу структуры матрицы $H_{L+1,L(m)}$, существенного сокращения вычислительных затрат можно добиться с помощью вращений Гивенса этой матрицы [33,34]. Учитывая, что искомая система является прямоугольной, а не квадратной, первое вращение можно задать не квадратной, а прямоугольной матрицей Гивенса размера $L \times (L+1)$, соответствующей стандартной квадратной матрице вращения размером $L \times L$, дополненной столбцом, состоящим из нулей. Тогда следующему вращению будет подвергаться уже квадратная матрица. Это эквивалентно тому, что последняя строка матрицы $H_{L+1,L(m)}$ будет отброшена. В результате этого точное решение полученной системы будет соответствовать приближенному решению переопределенной СЛАУ.

Вращения Гивенса позволяют реализовать QR -разложение любой квадратной матрицы C , то есть представить ее в виде: $C = QR$, где Q – унитарная матрица, а $R = H_{L,L}$ – верхняя Хессенбергова матрица. При этом Q является обратной матрицей относительно произведения матриц вращения Гивенса, каждая из которых позволяет обнулить элемент матрицы C , расположенный в ее j -ой строке и i -ом столбце ниже главной диагонали ($j > i$).

Элементарные матрицы вращения имеют следующий вид:

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{ii} & 0 & \dots & 0 & a_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{ji} & 0 & \dots & 0 & a_{jj} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (28)$$

где $a_{ii} = a_{jj} = c, a_{ij} = -a_{ji} = -s, j > i$.

Для минимизации влияния ошибок округления вычисляется $z = \max(|a_{ii}|, |a_{ij}|)$. Далее, если $z = 0$, то вращение не требуется, и $c = 1, s = 0$. В случае, если $z = |a_{ii}|$, то

$$c = \frac{1}{\sqrt{1 + (a_{ij}/a_{ii})^2}}, s = -c(a_{ij}/a_{ii}).$$

В позиции (i, i) после поворота будет число $c = \frac{1}{\sqrt{1 + (a_{ij}/a_{ii})^2}}$.

Для случая, когда $z = |a_{ij}|$ справедливы формулы:

$$s = \frac{\text{sign}(a_{ii}/a_{ij})}{\sqrt{1 + (a_{ij}/a_{ii})^2}}, c = s(a_{ii}/a_{ij}),$$

а в позиции (i, i) после поворота будет число $a_{ij}\sqrt{1 + (a_{ij}/a_{ii})^2}\text{sign}(a_{ii})$. После получения значений c и s матрицы вращения запись преобразований для k -го столбца искомой матрицы выглядит следующим образом: если в k -ом столбце в позиции i стоит a_{ik} , а в позиции с номером j стоит a_{jk} , то их новые значения будут равны $ca_{ik} - sa_{jk}$ и $sa_{ik} + ca_{jk}$ соответственно. Заметим также, что для хранения матриц вращения достаточно запомнить только позицию обнуляемого символа (j и i) и параметр t , связанный с c и s при помощи простых «ударных формул тригонометрии»: $c = (1-t^2)/(1+t^2), s = 2t/(1+t^2)$, причем t можно трактовать как тангенс половинного угла, а c и s как косинус и синус этого угла соответственно.

Таким образом, алгоритм GMRES описывается нижеследующей последовательностью действий:

1. Ввод $L, A, B, X_0, \delta_{e\min}$
 2. Вычисление $R_0 = B - AX_0$
 3. Вычисление $\delta_{eR_0} = \|R_0\|_e$ и $r_0 = R_0 / \|R_0\|_e$
 4. $Y_0 = 0$
 5. $m = 1, 2, \dots$, (начало цикла)
 6. Вычисление полного ортогонального базиса Q_{Lm} подпространства Крылова с помощью ортогонализации Арнольди с $v_1 = r_{m-1}$
 7. Для построенной в ходе ортогонализации матрицы $H_{L+1,L(m)}$ выполнить L вращений Гивенса (реализуется при построении базиса)
 8. Решить треугольную СЛАУ $H_{L,L(m)}Z_m = \delta_{eR_{m-1}}e_1$
 9. Вычислить невязку $R_m = R_{m-1} - AQ_{Lm}Z_m, \delta_{em} = \|R_m\|_e$
- и r_m
10. Вычислить $Y_m = Y_{m-1} + Q_{Lm}Z_m$
 11. Если $\delta_{em} > \delta_{e\min}$, то вернуться к 5 при $m = m + 1$
 12. $X_m = X_0 + Y_m$

7. Перезапускаемая (рестартовая) версия GMRES

Отметим, что сложность алгоритма линейно возрастает с увеличением размерности подпространства Крылова. Так, для вычисления j -го вектора ортонормированного базиса $Q_{L,m}$ требуется $N + (2j + 1)L$ мультипликативных операций, где N – число ненулевых символов матрицы A , а для вычисления последнего вектора – $(L + 1)L$ операций. Кроме того, вычисление X_m на каждой итерации требует L^2 мультипликативных операций. При этом требуются значительные ресурсы памяти, так как необходимо хранить все вектора базиса. Поэтому при больших размерностях СЛАУ используется перезапускаемая версия GMRES, при которой число вычисляемых векторов ортонормированного базиса ограничивается выбором максимального их числа $M < L$. Соответствующий алгоритм обозначается как GMRES(M) и описывается следующим образом:

1. Ввод $L, A, B, X_0, \delta_{e_{\min}}, M$
 2. Вычисление $R_0 = B - AX_0$
 3. Вычисление $\delta_{e_{R_0}} = \|R_0\|_e$ и $r_0 = R_0 / \|R_0\|_e$
 4. $Y_0 = 0$
 5. $m = 1, 2 \dots M$ (начало цикла)
 6. Вычисление m векторов ортогонального базиса Q_m подпространства Крылова с помощью ортогонализации Арнольди с $v_1 = r_{m-1}$
 7. Для построенной в ходе ортогонализации матрицы $H_{m+1,m}$ выполнить m вращений Гивенса (реализуется при построении базиса)
 8. Решить треугольную СЛАУ $H_{m,m}Z_m = \delta_{e_{R_{m-1}}}e_1$
 9. Вычислить невязку $R_m = R_{m-1} - AQ_mZ_m, \delta_{em} = \|R_m\|_e$
- и r_m
10. Вычислить $Y_m = Y_{m-1} + Q_mZ_m$
 11. Если $\delta_{em} > \delta_{e_{\min}}$, то вернуться к 5 при $m = m + 1$
 12. $X_m = X_0 + Y_m$
 13. Перезапуск
 14. $X_0 = X_m$
 15. $r_0 = r_m$
 16. Возврат к 5

В данном случае ортонормированный базис Q_m имеет размерность $L \times m$, матрица Хессенберга $H_{m,m}$ – размерность $m \times m$, длина вектора Z_m равна m .

Таким образом, в алгоритме GMRES(M) при отсутствии сходимости осуществляется перезапуск (рестарт), перед которым очищаются ресурсы памяти. Промежуточные результаты используются в качестве входных данных для последующих итераций. Таким образом, необходимо хранить только m векторов на каждой итерации. Эта процедура повторяется до тех пор, пока сходимость не будет достигнута. При этом основной проблемой является выбор значения M . Если выбрать его слишком малым, алгоритм может сходить-

ся слишком медленно или не сходиться совсем, а если переключиться на большее, то потребуется большой объем памяти и вычислений. Правила, определяющие выбор M , отсутствуют. Необходимо также отметить, что использование GMRES(M) может привести к «стагнации» итераций – процессу, при котором с каждой следующей итерацией норма невязки уменьшается незначительно, либо не уменьшается вовсе из-за уменьшения размерности подпространства Крылова. Но существуют механизмы для устранения эффекта стагнации, то есть улучшения сходимости перезапускаемой версии [29].

Очевидно, что самой сложной операцией в алгоритме GMRES(M) является умножение матрицы на вектор, но можно выделить и еще ряд подзадач, которые выполняются многократно – это вычисление скалярного произведения векторов, нормирование вектора, вычисление нормы вектора. При реализации таких алгоритмов обычно применяются параллельные вычисления.

Метод решения СЛАУ с помощью GMRES реализован во многих пакетах прикладных программ, таких как ATLAS, BLAS, AZTEC, CAPSS, IOMDRV, JAMA/C++, LAPACK, MET, SPARCS, MATLAB и многих других.

8. Симуляторы и пакеты схемотехнического проектирования СВЧ-схем

Последняя версия симуляторов данного типа – это APLAC, являющийся технологией NI AWR для проектирования высокочастотных схем [35]. Этот симулятор, разработанный для минимизации времени моделирования и используемой памяти при высокой надежности и точности работы, интегрирован в средства проектирования схем Microwave Office и Analog Office. APLAC включает гибридную версию частотно-временного анализа с переходом на огибающую сигнала, позволяющую анализировать модулированные радиочастотные сигналы, причем имеется возможность определять напряжения и токи во временной области и соответствующий спектр сигнала, а также вводить IQ-параметры цифровой модуляции. В новой версии также можно выбрать тип расчета – точный или быстрый.

NI AWR Design Environment версии 13 обеспечивает простую в применении и надежную процедуру разработку усилителей мощности при известной модели транзистора на основе так называемого load-pull анализа, который заключается в следующем: в нелинейную модель активного элемента (в данном случае используется модель на основе гармонического баланса) инкорпорируется импеданс нагрузки, значение которого может меняться. Выходная мощность определяется путем последовательности итераций при решении соответствующей системы нелинейных дифференциальных уравнений при заданном сигнале возбуждения для каждого импеданса нагрузки, то есть выходом является активная мощность на импедансе нагрузки.

Можно представить поверхность выходной мощности, построенную над диаграммой Смита, причем при проведении плоскостей через эту поверхность, параллельных диаграмме, можно получить контуры импеданса для постоянных значений выходной мощности. Эти контуры можно нанести на диаграмму Смита с указанием выходной мощности рядом с каждым контуром. Затем при оптимальном импе-

дансе нагрузки можно провести source-pull анализ, что повторяет вышеописанную процедуру при увеличении уровня сигнала возбуждения. Можно также инкорпорировать в схему входную цепь согласования. Очевидно, что любое изменение импеданса нагрузки можно сразу отобразить в виде контуров постоянных значений выходной мощности на диаграмме Смита, и не требуется новая инициация симуляции согласования, предполагающая возобновление трудоемкой итеративной процедуры. Это объясняется тем, что в методе гармонического баланса на каждой итерации вычисляются поправки к токам и напряжениям в узлах схемы, то есть легко определить градиент импеданса, показывающий направление на максимальное значение выходной мощности. Перпендикуляр к градиенту импеданса показывает направление линии постоянной выходной мощности. При выявлении экстремума поверхности мощности могут использоваться методы адаптивного управления, особенно удобен метод градиента.

9. Согласование усилителя мощности

Рассмотрим проектирование цепи согласования усилителя мощности на транзисторе с высокой подвижностью электронов – ТВПЭ (в англоязычной литературе НЕМТ - High Electron Mobility Transistors) в режиме большого сигнала. Одной из наиболее простых моделей такого транзистора является модель Кертиса-Этгенберга [36]. Соответствующая схема приведена на рис. 2. Она содержит три нелинейных источника тока, первый из которых моделирует ток между стоком и истоком транзистора:

$$i_{cu}(U_{ex}, U_{вых}) = (a_0 + a_1 U_1 + a_2 U_1^2 + a_3 U_1^3) th(\gamma U_{вых}(t)), \quad (29)$$

где коэффициенты a_0, a_1, a_2, a_3 подбираются по результатам измерения зависимости выходного тока транзистора i_{cu} от входного напряжения U_{ex} (напряжение между затвором и истоком) при фиксированном выходном напряжении $U_{вых}^0$ (напряжение между стоком и истоком) в состоянии насыщения. Очевидно, что в случае линейной модели транзистора i_{cu} не зависит от значения $U_{вых}^0$, но при разработке нелинейной модели в режиме большого сигнала необходимо учитывать зависимость напряжения отсечки i_{cu} от выходного напряжения, поэтому в (29) подставляется

$$U_1 = U_{ex}(t - \tau) \left[1 + \gamma(U_{вых}^0 - U_{вых}(t)) \right] - \quad (30)$$

- функция зависимости i_{cu} от $U_{ex}(t - \tau)$ и выходного $U_{вых}(t)$ напряжений; τ – задержка входного сигнала в транзисторе, которая моделируется с помощью выражения:

$$\tau = a_4 U_{вых}(t); \quad (31)$$

функция $\gamma(U_{вых}^0 - U_{вых}(t))$ учитывает изменение напряжения отсечки в зависимости от напряжения между стоком и истоком. Заметим, что положение точки пересечения функции $i_{cu}(U_{ex}, U_{вых})$, построенной в системе координат (i_{cu}, U_{ex}) , с осью абсцисс, будет зависеть от значения $U_{вых}(t)$.

Координата этой точки, находящейся на оси абсцисс, соответствует напряжению отсечки выходного тока.

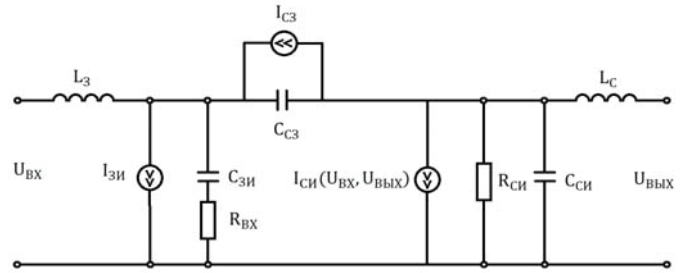


Рис. 2. Эквивалентная схема НЕМТ в режиме больших сигналов

В (29) входит функция гиперболического тангенса $th(\gamma U_{вых}(t))$, где γ – крутизна тока стока в линейной области. Эта функция была впервые использована для описания тока стока в режиме большого сигнала в модели JFET, предложенной Таки [37], поскольку она хорошо описывает зависимости, первоначально линейные, но затем вступающие в область насыщения. Таким образом, в данном случае насыщение выходной мощности транзистора описывается зависимостью тока стока от $U_{ex}, U_{вых}$, и объясняется насыщением этого тока.

Для описания насыщения тока в данной модели рассматривается нелинейный источник тока

$$i_{c3} = \begin{cases} (U_{c3}(t) - U_{np}) / R_{np}, & \text{если } U_{c3}(t) > U_{np}, \\ 0, & \text{если } U_{c3}(t) < U_{np}, \end{cases} \quad (32)$$

где U_{np} – напряжение пробоя затвора, R_{np} – сопротивление канала при пробое.

Третий нелинейный источник тока в данной модели описывает проводимость затвора в прямом направлении

$$i_{3i} = \begin{cases} (U_{ex}(t) - U_{вс.н.}) / R_{np.смещ}, & \text{если } U_{ex}(t) > U_{вс.н.}, \\ 0, & \text{если } U_{ex}(t) < U_{вс.н.}, \end{cases} \quad (33)$$

где $U_{вс.н.}$ – потенциал встроенного поля, $R_{np.смещ}$ – сопротивление при прямом смещении. Остальные параметры схемы определяются при измерении S-параметров на малом сигнале и являются постоянными, то есть не зависящими от $U_{ex}, U_{вых}$.

Известны и другие модели НЕМТ в режиме больших сигналов [38-40]. Они могут отличаться от базовой модели, рассмотренной выше, тем, как выбираются нелинейные элементы (например, дополнительно моделируются нелинейные конденсаторы), или как осуществляется экстракция параметров схемы. В данном случае конденсаторы остаются постоянными при изменении уровня входного сигнала, но нелинейно меняется протекающий ток.

Таким образом, данная схема вместе с инкорпорированным в нее импедансом нагрузки может быть представлена так, как это показано на рис. 3.

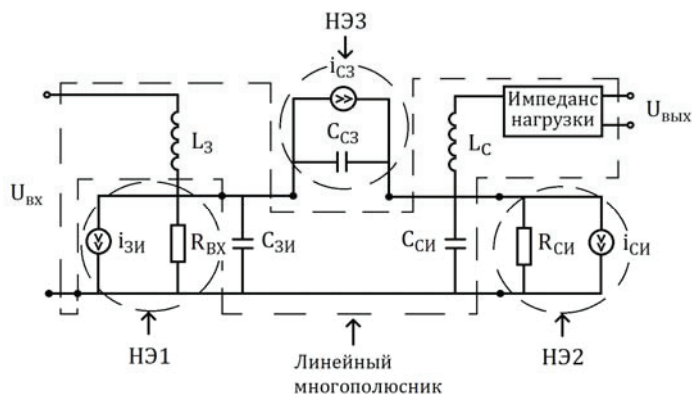


Рис. 3. Эквивалентная схема НЕМТ в режиме больших сигналов с инкорпорированным в нее импедансом нагрузки

Исходная система дифференциальных уравнений, описывающих схему на рис. 3, не приводится из-за ее очевидности, а СНАУ, соответствующая методу гармонического баланса – из-за ее громоздкости, так как учитывались 5 тонов. При этом рассматривался транзистор TGF2022-48, параметры которого приведены в [41]. При моделировании производилась единственная итерация метода Ньютона, а полученная СЛАУ решалась с помощью GMRES, реализованного в MATLAB. Результаты моделирования выходной мощности в зависимости от импеданса нагрузки вручную наносились на диаграмму Смита. Результаты представлены на рис. 4 а), б) и в) для частоты входного сигнала 0.8, 2.4 и 4 ГГц соответственно.

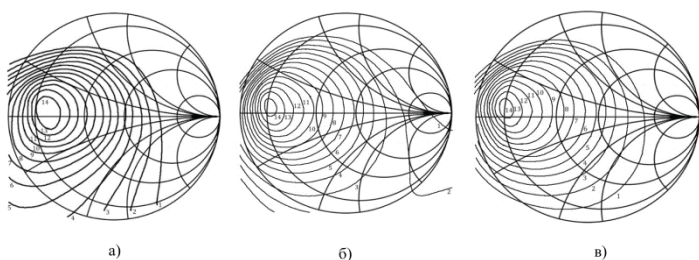


Рис. 4. Результаты моделирования выходной мощности в зависимости от импеданса нагрузки для частоты входного сигнала 0.8 ГГц, 2.4 ГГц и 4 ГГц

Как следует из полученных результатов, комплексно-сопряженное значение выходного импеданса транзистора будет соответствовать приблизительно 8 Ом с включенной параллельно емкостью 1,5 пФ практически независимо от частоты сигнала.

Заключение

Бытует мнение, что GMRES следует применять только для систем большой размерности. Для сравнительно простых и малоразмерных систем, к которым следует отнести и усилитель мощности со всеми вспомогательными цепями, входящими в его структуру, целесообразно применять вращения Гивенса непосредственно к матрице Якоби с целью получения ее QR-разложения и последующего обращения. Другой вариант основан на использовании LU-факторизации [42,43] матрицы Якоби, что не рассмотрено в данной работе,

так как этот вариант обращения матрицы непосредственно не связан с GMRES.

Но очевидно, что в том случае, если $GMRES(M)$ сходится, то он практически всегда выигрывает по вычислительной сложности всем другим алгоритмам, если матрица Якоби является плотно-заполненной и ассиметричной. В случае его плохой сходимости следует применять подходы, улучшающие сходимость метода при чередовании подпространств малой размерности и циклов $GMRES(M)$ [29]. Недостатком является приближенное значение результата вычислений, в то время как при прямом обращении матрицы Якоби получается более точное решение, хотя погрешности округления будут почти так же накапливаться, как и при $GMRES(M)$.

По мере увеличения размерности системы методы, связанные с непосредственным обращением матрицы Якоби вообще становятся неэффективными как по вычислительным затратам, так и по требующемуся объему памяти, по сравнению с итеративными подходами, то есть основанными на использовании подпространств Крылова – такими как GMRES или метод сопряженных градиентов ((Conjugate Gradient Method (CG)[30]. Последний не рассмотрен в этой статье, так как применим только к симметричным и положительно определенным матрицам Якоби, что практически никогда не выполняется для систем рассматриваемого типа.

Литература

1. Чуа Л.О. Пен-Мин Лин. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы. М.: Энергия, 1980. 641 с.
2. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем. М.: Радио и связь, 1988. 560 с.
3. URL: <http://www.awr.com>.
4. URL: <http://www.agilent.com/ads.html>.
5. URL: <http://www.cadence.com/products/sceptre>.
6. Ланцов В.Н. Состояние в области методов моделирования нелинейных ВЧ электронных устройств связи (обзор). Часть 1 // Проектирование и технология электронных средств. 2012. №4. С. 2-10.
7. Ланцов В.Н. Состояние в области методов моделирования нелинейных ВЧ электронных устройств связи (обзор). Часть 2 // Проектирование и технология электронных средств. 2013. №1. С. 16-22.
8. Харри Ф. Теория графов. М.: Едиториал УРСС. 2003. 296 с.
9. Лухов Г.Е. Методы анализа и синтеза квазианалоговых электронных цепей. Киев: Наукова думка. 1967. 568 с.
10. Бондаренко В.М. Вопросы анализа нелинейных цепей. Киев: Наукова думка. 1967. 159 с.
11. Данилов Л.В., Матханов П.Н., Филиппов Е.С. Теория нелинейных электрических цепей. Л.: Энергоатомиздат, 1990. 256 с.
12. Зевеке Г.В., Ионкин П.А., Нетушил А.В., Страхов С.В. Основы теории цепей. Учебник для вузов. Изд. 4-е, переработанное. М.: Энергия, 1975.
13. Кубицкий А.А., Волков М.А., Евстигнеев В.Е. Возможности метода переменных состояния при проектировании и анализе радиотехнических устройств // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2009. № S1. С. 122-123.
14. Gad, E., Khazaka, R., Nakhla, M.S., Griffith, R. A circuit reduction technique for finding the steady-state solution of nonlinear circuits // IEEE Trans. Microwave Theory & Techn., 2000. Vol. 48, no.12, p. 2389-23.
15. Хибель М. Основы векторного анализа цепей. Пер. с англ. М.: Издательский дом МЭИ, 2009. 500 с.

16. Измерение S22 в «горячем» режиме с импульсными сигналами на анализаторе цепей R&S ZVA – www.rohde-schwarz.ru/439/AN001rus_HotS22_pulse.pdf.
17. *Root, D.E., Horn, J., Betts, L., Gillease, Ch., Verspecht, J.* X-параметры: новый принцип измерений, моделирования и разработки нелинейных ВЧ и СВЧ компонентов // Контрольно-измерительные приборы и системы. Agilent Technologies. С. 20-24.
18. *Никулин С.М., Белова Ю.В.* Измерение и идентификация больше-сигнальных S-параметров нелинейных СВЧ-цепей // Датчики и системы. 2014. №12. С.62-65.
19. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные Методы. Учеб. пособие для вузов. М.: Наука, 1989. 432 с.
20. *Марчук Г.И., Кузнецов Ю.А.* Итерационные методы и квадратичные функционалы // Методы вычислительной математики. Новосибирск: 1975. С. 4-143.
21. *Saad Y., Schultz M.H.* GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:856-869, 1986. doi:10.1137/0907058.
22. *Баландин М.Ю., Шурина М.П.* Методы решения СЛАУ большой размерности. Новосибирск, РГГУ. 2000. 70 с.
23. *Крылов Н.И., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. Киев: Изд-во АН УССР, 1937. 177 с.
24. *Paige C.C., Saunders M.A.* Solution of sparse indefinite systems of linear equations, *SIAM J. Numerical Analysis* 12, pp. 617-629 (1975).
25. <https://arxiv.org/pdf/1606.08740.pdf>.
26. https://smartech.gatech.edu/bitstream/handle/1853/55635/PRA_TAPA-DISSERTATION-2016.pdf
27. <https://github.com/erdc-cm/petsc-dev/tree/master/src/ksp/ksp/impls/gmres>
28. *Гилл, Ф., Мюррей, У., Райт, М.* Практическая оптимизация. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 506 с.
29. *Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б.* Сдвиговая стратегия в обобщенном методе минимальных невязок // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, 2009, №71, 28с.:http://library_keldysh.ru/preprint_asp?ld=2009-71.
30. *Деммель Дж.* Вычислительная линейная алгебра: Теория и приложения. Пер. с англ. М.: Мир, 2001. 430 с.
31. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. М.: Наука, 1975. 630 с.
32. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. М.: Наука, 1983. 384 с.
33. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984. 320 с.
34. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 306 с.
35. Программный продукт Microwave Office (производитель AWR Corporation) [Официальный сайт]. URL: <http://www.awrcorp.com/products/microwave-office>.
36. *Curtice W.R., and Ettenberg M.* A Nonlinear GaAs FET Model for Use in the Design of Output Circuits for Power Amplifier // *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*– V.MTT-33. 1985, pp. 1383-1394.
37. *Taki T.* Approximation of Junction Field-Effect Transistor Characteristics by a Hyperbolic Function // *IEEE of Solid-State Circuits*. Vol. SC-13. October 1978. P. 724-726.
38. *Dortu J.M., et al.* Accurate Large-Signal GaAs MESFET and HEMT Modeling for Power MMIC Amplifier Design // *Int. J. of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Eng.* Vol.5. September 1995. P. 195-208.
39. *Schwiers F., Liou J.* Modern Microwave Transistors: Theory, Design and Performance. John Wiley & Sons. 2003.
40. *Schreurs D., et al.,* Straightforward and Accurate Nonlinear Device Model Estimation Method Based on Vector Large-Signal Measurements // *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*. Vol. 50. No . 2002. P. 2315-2319.
41. *Сечи Ф., Буджатти М.* Мощные твердотельные СВЧ-усилители. М.: Техносфера, 2016. 416 с.
42. *Ортега, Дж.* Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991. 376 с. ISBN 5-03-001941-3.
43. *Левитин А.В.* Алгоритмы. Введение в разработку и анализ. М.: Вильямс. 576 с. ISBN 978-5-8459-0987-9.

HARMONIC BALANCE THEORY FOR SCHEME TECHNICAL DESIGN

Svetlana F. Gorgadze, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia, svetlana-gorgadze@yandex.ru

Anton A. Maximov, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia, mash2525@yandex.ru

Abstract

The analysis and generalization of the main publications on the methods of synthesis and analysis of non-linear active microwave circuits based on the use of the harmonic balance method are presented. As a result of some classification of mathematical approaches and techniques used in the context of this method, a selection and review of basic algorithms was made, the sequential application of which makes it possible to obtain the final result for a scheme of any complexity. The principles of drawing up the initial system of differential equations for electronic circuits and reducing it to a system of linear algebraic equations are considered. A detailed and, at the same time, simplified interpretation of the approaches involving the use of projection methods and Krylov subspaces is given in order to make them easier to understand. Both the complete and the restart generalized method of minimal residuals are considered, in which the desired solution is obtained in the course of an iterative process, at each stage of which subspaces of lower dimension are constructed. The possibilities of simulators and application packages intended for circuit design of electronic circuits are considered. The problem of matching a power amplifier in large signal mode using the APLAC simulator, which is NI AWR technology for designing high-frequency circuits, is discussed.

Keywords: Newton-Raphson method, Jacobi matrix, projection methods, Krylov subspaces, Arnoldi orthogonalization, Hessenberg matrix, Givens rotation, matching power amplifier.

References

1. Chua L.O., Pen-Min Lin. Machine analysis of electronic circuits: Algorithms and computational methods. Moscow: Energy. 1980. 641 p.
2. Vlach I., Singhal K. Machine methods of analysis and design of electronic circuits. Moscow: Radio and communication. 1988. 560 p.
3. URL:<http://www.awr.com>.
4. URL:<http://www.agilent.com/ads.html>.
5. URL: <http://www.cadence.com/products/sceptre>.
6. Lantsov V.N. State in the field of methods for modeling nonlinear HF electronic communication devices (review). Part 1. Design and technology of electronic means. 2012. No. 4. P. 2-10.
7. Lantsov, V.N. State in the field of methods for modeling nonlinear HF electronic communication devices (review). Part 2. Design and technology of electronic means. 2013. No. 1. P. 16-22.
8. Harry F. Theory of graphs. Moscow: Editorial URSS. 2003. 296 p.
9. Pukhov G.E. Methods of analysis and synthesis of quasi-analog electronic circuits. Kiev: Naukova Dumka. 1967. 568 p.
10. Bondarenko V.M. Analysis of nonlinear circuits. Kiev: Naukova Dumka. 1967. 159 p.
11. Danilov L.V., Matkhanov P.N., Filippov E.S. Theory of nonlinear electrical circuits. L.: Energoatomizdat. 1990. 256 p.
12. Zeveke G.V., Ionkin P.A., Netushil A.V., Strakhov S.V. Fundamentals of circuit theory. Textbook for universities. Ed. 4th, revised. Moscow: Energy, 1975.
13. Kubitsky A.A., Volkov M.A., Evstigneev V.E. Possibilities of the method of state variables in the design and analysis of radio engineering devices. *T-Comm*. 2009. No.1. P. 122-123.
14. Gad E., Khazaka, R., Nakhla M.S., Griffith R. A circuit reduction technique for finding the steady-state solution of nonlinear circuits. *IEEE Trans. Microwave Theory & Techn.*, 2000. Vol. 48. No.12. P. 2389-2396.
15. Hibel M. Fundamentals of vector circuit analysis. Moscow: Publishing house of Moscow Energy Institute, 2009. 500 p.
16. Measurement of S22 in "hot" mode with pulse signals on the circuit analyzer R&S ZVA. www.rohde-schwarz.ru/439/AN001rus_HotS22_pulse.pdf.
17. Root DE, Horn J., Betts L., Gillease Ch., Verspecht J. X-parameters: a new principle of measurement, modeling and development of non-linear RF and microwave components. *Instrumentation and systems*. Agilent Technologies company. P. 20-24.
18. Nikulin S.M., Belova Yu.V. Measurement and identification of large-signal S-parameters of nonlinear microwave circuits. *Sensors and systems*. 2014. No. 12. P. 62-65.
19. Samarsky A.A., Gulín A.V. Numerical Methods. Textbook. manual for universities. Moscow: Nauka, 1989. 432 p.
20. Marchuk, G.I., Kuznetsov, Yu.A. Iterative methods and quadratic functionals. *Methods of computational mathematics*. Novosibirsk: 1975. P. 4-143.
21. Saad Y., Schultz M.H. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 7:856-869, 1986. doi:10.1137/0907058.
22. Balandin M.Yu., Shurina M.P. Methods for solving large-scale SLEs. Novosibirsk, Russian State Humanitarian University. 2000, 70 p.
23. Krylov N.I., Bogolyubov N.N. Introduction to nonlinear mechanics. Kiev: Publishing house of the Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, 1937, 177p.
24. Paige C.C., Saunders M.A. Solution of sparse indefinite systems of linear equations, *SIAM J. Numerical Analysis* 12, 617-629 (1975).
25. <https://arxiv.org/pdf/1606.08740.pdf>.
26. <https://smartech.gatech.edu/bitstream/handle/1853/55635/PRATAPA-DISSERTATION-2016.pdf>.
27. <https://github.com/erdc-cm/petsc-dev/tree/master/src/ksp/ksp/impls/gmres>
28. Gill F., Murray W., Wright M. Practical optimization. Moscow: Mir, 1985. 506 p.
29. Zhukov V.T., Novikova N.D., Feodoritova O.B. Shift strategy in the generalized method of minimal residuals. *Keldysh Institute preprints*. M.V. Keldysh, 2009. No. 71. 28 p. http://library_keldysh.ru/preprint_asp?Ld=2009-71.
30. Demmel J. Computational Linear Algebra: Theory and Applications. Moscow: Mir, 2001. 430 p.
31. Bakhvalov N.S., Zhidkov N.P., Kobelkov G.M. Numerical methods. Moscow: Nauka, 1975. 630 p.
32. Pole B.T. Introduction to optimization. Moscow: Nauka, 1983. 384 p.
33. Voevodin V.V. Matrixes and calculations. Moscow: Nauka, 1984. 320 p.
34. Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A. Computational foundations of linear algebra. Moscow: Nauka, 1977. 306 p.
35. Microwave Office software product (manufactured by AWR Corporation) [website]. URL: <http://www.awr.com/products/microwave-office>.
36. Curtice W.R., and Ettenberg M. A Nonlinear GaAs FET Model for Use in the Design of Output Circuits for Power Amplifier. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*- V. MTT-33. 1985. P. 1383-1394.
37. Taki T. Approximation of Junction Field-Effect Transistor Characteristics by a Hyperbolic Function. *IEEE of Solid-State Circuits*. Vol. SC-13. October 1978. P. 724-726.
38. Dortu J.M., et al. Accurate Large-Signal GaAs MESFET and HEMT Modeling for Power MMIC Amplifier Design. *Int. J. of Microwave and Millimeter-Wave Computer-Aided Eng.* Vol. 5. September 1995. P. 195-208.
39. Schwieters F., Liou J. Modern Microwave Transistors: Theory, Design and Performance. John Wiley & Sons. 2003.
40. Schreurs D., et al., Straightforward and Accurate Nonlinear Device Model Estimation Method Based on Vector Large-Signal Measurements. *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*. Vol. 50. No.10. 2002. P. 2315-2319.
41. Sich F., Budjatti M. Powerful solid-state microwave amplifiers/ F. Sechi. Moscow: Technosphere, 2016. 416 p.
42. Ortega J. Introduction to Parallel and Vector Methods for Solving Linear Systems. Moscow: Mir. 1991. 376 p. ISBN 5-03-001941-3.
43. Levitin A.V. Algorithms. Introduction to design and analysis. Moscow: Wilyams. 576 p. ISBN 978-5-8459-0987-9.