

МИНИМИЗАЦИЯ ИСКАЖЕНИЙ СИГНАЛА ПРИ ЛОКАЛЬНО-ОПТИМАЛЬНОМ СПОСОБЕ ЦИФРОВОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

DOI: 10.36724/2072-8735-2020-14-5-27-34

Кудряшова Анастасия Юрьевна,
МТУСИ, Москва, Россия, asykka@bk.ru

Ключевые слова: цифровой сигнал, матрица искажений, матрица погрешностей, кодовое расстояние, суммарные искажения

При преобразовании различных сигналов в цифровой вид в них появляются определенные искажения (погрешности), связанные с проводимыми дискретизацией и квантованием. Данное обстоятельство учитывается при разработке соответствующих методов аналого-цифрового преобразования с целью обеспечения установленных требований по качеству. Как правило, это либо максимально допустимая абсолютная погрешность, либо среднеквадратичная погрешность. Помимо этого, искажения возникают также из-за случайного влияния помех, вносящих ошибки в цифровой сигнал. В результате качество полученного в процессе передачи и в процессе дальнейшего восстановления сигнала может не соответствовать изначально установленным требованиям. Чтобы минимизировать искажения, возникающие из-за ошибок в цифровом сигнале, необходимо исследовать влияние этих случайных факторов на передаваемый сигнал. Одним из факторов, влияющих на помехоустойчивость, является метод рационального выбора способов цифрового представления исходного сигнала в виде последовательности кодовых комбинаций двоичного кода. Этот метод учитывает трансформации из одного метрического пространства (в котором был представлен исходный сигнал) в другое (пространство Хемминга, используемое для описания двоичного сигнала). Предложено для описания возникающих искажений в восстанавливаемом сигнале (в результате имеющихся в двоичном цифровом сигнале ошибок) использовать матрицу погрешностей, элементами которой будут значения искажений для всех возможных случаев неверного восстановления двоичных кодовых комбинаций. Проведен анализ матрицы погрешностей и матрицы кодовых расстояний двоичного кода, рассчитано суммарное число искажений при преобразованиях различных метрических пространств. Рассчитаны значения, определяющие расстояние между исходными сообщениями и заданной метрикой пространства Евклида. Эти расстояния позволят установить соответствие между данными сообщениями и кодовыми комбинациями двоичного кода, для которых расстояние задается уже в другом пространстве (пространстве Хэмминга). Предложена минимизация искажений, если минимальным расстояниям одного метрического пространства ставить в соответствие минимальные расстояния другого метрического пространства. Выявлены ограничения по данной минимизации.

Информация об авторе:

Кудряшова Анастасия Юрьевна, аспирант, Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Для цитирования:

Кудряшова А.Ю. Минимизация искажений сигнала при локально-оптимальном способе цифрового преобразования // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Том 14. №5. С. 27-34.

For citation:

Kudryashova A.Yu. (2020) Minimizing signal distortions at the most optimal choice of digital conversion method. *T-Comm*, vol. 14, no.5, pp. 27-34. (in Russian)

Введение

При аналого-цифровых преобразованиях проводится расчет параметров этих преобразований, при которых обеспечивается нормированная величина вносимых искажений, которые являются объективным следствием преобразования аналоговой (непрерывной) величины в дискретную. При этом эти искажения рассматриваются как некие допустимые исходные данные такого преобразования, которые не должны быть превышены, с целью обеспечения заявленного качества передачи сообщений. При аналого-цифровом преобразовании каждому значению преобразуемого сигнала ставится в соответствие определенная кодовая комбинация. В значительном числе случаев выбирается двоичная кодовая комбинация, в результате чего происходит преобразование исходного сигнала, описываемого в некотором метрическом пространстве, в двоичные сигналы пространства Хемминга. Из-за помех в канале связи возможны ошибки, приводящие к тому, что одна двоичная кодовая комбинация будет принята как некая другая, а, следовательно, в восстанавливаемом исходном сигнале одно значение будет заменено на другое. Поскольку в пространстве Хемминга и в пространстве, в котором описывался исходный сигнал, расстояние задается по-разному, то возникает проблема оптимизации способа двоичного отображения исходного сигнала с учетом влияния помех и возникающих ошибок [1]. Принятая для оценки качества приема-передачи двоичного цифрового сигнала методика, использующая количественный параметр вероятности ошибки, оказывается не вполне применима для оценки качества исходного сигнала, который не является двоичным и оценивается не в пространстве Хемминга, а в некотором другом пространстве, отвечающем физическому смыслу описания данного сигнала, порождаемого источником. Например, речевые сигналы или сигналы цветного изображения.

Матрица кодовых расстояний

Поскольку исходные сигналы от источника преобразуются в цифровой двоичный сигнал, то вполне оправданным является способ матричного представления всех возможных вариантов искажений, возникающих по причине различных ошибок в двоичном сигнале, что соответствует ложному восстановлению некой двоичной кодовой комбинации, тогда как была передана другая кодовая комбинация. Используемое без избыточное кодирование источника не позволяет каким-либо способом обнаружить возникающие ошибки. Однако, как будет показано ниже, выбор способа соответствия элементов исходного сигнала двоичным кодовым комбинациям, имеет влияние и достаточно заметное, на то к каким результатам приведет, в смысле величины искажений, тот или иной способ установления соответствия двоичных кодовых комбинаций элементам исходного сигнала [2].

Рассмотрим пространства (X, d_x) и (Y, d_y) . Будем полагать, что пространство (X, d_x) отражает исходные сообщения, создаваемые источником, а пространство (Y, d_y) соответствует двоичному цифровому сигналу.

В этом случае элементами множества Y являются двоичные кодовые комбинации, состоящие из n двоичных символов. При этом расстояние между ними определяется соглас-

но метрике Хемминга. Количество двоичных символов n очевидным образом зависит от числа элементов исходного сигнала, как его логарифмическая мера по основанию 2.

Расстояние между любой парой кодовых комбинаций, как показано в [1], определяется матрицей D_n , обладающей определенными рекуррентными свойствами и симметрией, вытекающей из природы элементов, входящих в данную матрицу:

$$D_n = \begin{vmatrix} D_{n-1} & D_{n-1} + J_{n-1} \\ D_{n-1} + J_{n-1} & D_{n-1} \end{vmatrix} \quad (1)$$

где, $D_0 = 0$, а J_{n-1} – квадратная матрица размерностью $(n-1) \times (n-1)$, состоящая из единиц.

Применяя (1), можно получить при:

$$D_0 = 0; \quad D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & \dots \end{vmatrix} \quad (2)$$

Очевидно, что с ростом n размеры матрицы быстро увеличиваются. Однако определенные ее свойства позволяют «уменьшить» разнообразие возможных вариантов.

Как уже отмечалось в матрицах кодовых расстояний D_n при различных n присутствует очевидная симметрия. Главная диагональ состоит из нулей, а побочная из максимальных значений, равных n . Обратим также внимание на то, что первая строчка матрицы кодовых расстояний или первый столбик, что эквивалентно, полностью определяют все остальные элементы матрицы кодовых расстояний. А это означает, в частности, что по отношению к любой кодовой комбинации существует ровно C_n^d кодовых комбинаций, отличающихся от нее ровно на d элементов или, другими словами имеющих кодовое расстояние равно d [3].

Можно показать, что в матрице кодовых расстояний имеется следующее число кодовых комбинаций:

$$N_n(0) = N_n(n), N_n(1) = N_n(n-1), \dots \quad (3)$$

$$N_n(d) = 2[N_{n-1}(d) + N_{n-1}(d-1)] \quad (4)$$

$$N_n(d) = \binom{n}{d} \cdot 2^d \quad (5)$$

При цифровом представлении сообщений от источника происходит преобразование пространства (X, d_x) в пространство (Y, d_y) .

При однозначном преобразовании, чаще взаимно однозначном преобразовании, одного пространства в другое, ко-

гда каждому элементу пространства (X, d_x) ставится в соответствие ровно один элемент пространства (Y, d_y) . При этом не сложно установить, что при таком соответствии возможно всего $M = (2^n)!$ вариантов преобразования [4].

Каждый из этих возможных вариантов преобразования не изменяет числа символов двоичного сигнала, затрачиваемых для кодирования (отображения) одного элемента исходного сообщения от источника, и, следовательно, скорость кодирования сообщений источника остается неизменной. Однако изменяются условия восстановления исходных сообщений на приеме при наличии помех в канале связи и возникающих в результате этого ошибок в цифровом сигнале. Покажем это на примере.

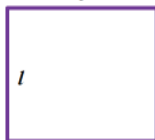
Пусть сообщения соответствуют элементам A, B, C, D, расположенных геометрически в углах квадрата и пусть расстояние между этими точками определяется геометрическими размерами квадрата со стороной равной l . Это наглядно показано на рис. 1.

Очевидно, что матрица, отражающая попарные расстояния между точками A, B, C, D, заданных в пространстве Евклида, будет иметь вид матрицы L_4 :

$$L_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & l & l\sqrt{2} & l \\ l & 0 & l & l\sqrt{2} \\ l\sqrt{2} & l & 0 & l \\ l & l\sqrt{2} & l & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (6)$$

Эта матрица также имеет определенные свойства симметрии и ее элементы для данной модели определяются элементами первой строки или первого столбца, что эквивалентно. В общем случае эти условия могут не выполняться, но для данной модели – это справедливо [5].

$$A = (00) \quad B = (01) \quad C = (11) \quad D = (10)$$



$$D = (10) \quad C = (11) \quad B = (01) \quad A = (00)$$

Рис. 1. Расположение элементов A, B, C, D

В примере, показанном на рис. 1, изображены два возможных варианта кодирования точек A, B, C, D. Они показаны черным и красным цветом. В первом варианте использовано соответствие: A = 00, B = 01, C = 11 и D = 10. А во втором варианте – A = 00, B = 11, C = 01 и D = 10. Всего же, как следует из приведенной выше формулы число вариантов соответствия равно: $M = (2^n)!$ = 24.

В общем случае матрицу расстояний между сообщениями можно записать в следующем виде:

$$L_N = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{1N} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{N1} & l_{N2} & \dots & l_{NN} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Очевидно, что в главной диагонали должны располагаться нули, а значения других элементов будут определяться соответствующим множеством X и заданной на нем метрикой d_x .

Если расстояние между сообщениями l_{ij} отождествить с потерями n_{ij} , которые возникнут, если вместо i -ого сообщения будет принято j -ое, то матрицу кодовых расстояний между сообщениями L_N можно принять за матрицу потерь Π_N . Однако в общем случае это может быть и не так. Хотя именно такое предположение представляется наиболее естественным, когда мерой погрешности явится мера расстояния между элементами множества.

Продолжим рассматриваемый выше пример. Мы имеем матрицу L_4 определяющую расстояния между сообщениями согласно введенной метрике. Положим, что эти расстояния будут эквивалентны потерям. Тогда, сопоставляя эту матрицу с матрицей кодовых расстояний D_2 , можно увидеть отличия между вариантами сопоставления.

В первом случае матрице L_4 ставится в соответствие матрица $D_2 = D_2^1$:

$$L_4 = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & l & l\sqrt{2} & l \\ l & 0 & l & l\sqrt{2} \\ l\sqrt{2} & l & 0 & l \\ l & l\sqrt{2} & l & 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (8)$$

$$D_2^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9)$$

а во втором случае матрице L_4 будет поставлена в соответствие иная матрица $D_2 = D_2^2$, а именно:

$$D_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Сопоставляя элементы матрицы L_4 и D_2^1 , а также L_4 и D_2^2 , видим что в первом случае наибольшее расстояние в матрице L_4 а именно, $l\sqrt{2}$ совпадает с наибольшим расстоянием в матрице D_2^1 , а именно, 2, а наименьшее расстояние, а именно, l совпадает с наименьшим расстоянием равным 1. Во втором случае это не так. Если предположить, что в результате помех в канале связи, приводящих к искажениям и затем к ошибкам в цифровом сигнале произойдет трансформация одной кодовой комбинации в другую, то вполне резонно полагать, что такое переход будет более вероятен, когда расстояние между соответствующими элементами матриц D_2^i наименьшее. Очевидно, что первый вариант будет иметь определенные преимущества.

Представленный пример в качественном отношении демонстрирует, что выбор способа соответствия между матри-

цей D_2^i и L_4 имеет существенное значение. Для точного расчета необходимы конкретные численные значения этих матриц, а также знание вероятностей преобразований одних комбинаций в другие из-за влияния помех.

С ростом числа сообщений и учетом случайного влияния помех данная задача становится весьма сложной, оставаясь при этом и весьма важной, поскольку позволяет при правильном учете всех факторов без дополнительных затрат, уменьшающих пропускную способность системы, повысить качество передаваемых сообщений.

Матрица погрешностей

Для точного расчета и определения наилучшего варианта сопоставления матрицы кодовых расстояний цифрового сигнала с матрицей погрешностей необходимо ее знать, а также необходимо знать статистическую модель ошибок, трансформирующих одну цифровую комбинацию в другую [6]. Вместе с тем есть ряд часто встречающихся конструкций, которые находят широкое применение и для которых можно провести в общем виде оценки погрешностей. Исследуем возможные матрицы погрешностей [7].

Рассмотрим случаи, когда матрица погрешностей совпадает с матрицей расстояний между сообщениями в установленном метрическом пространстве (X, d_x) . Это означает, что соответствующие погрешности $n_{ij} = l_{ij}$ и отвечают условиям метрического пространства.

При цифровой передаче речевых сообщений происходит аналого-цифровое преобразование. В простейшем случае осуществляется дискретизация во времени, согласно теореме Котельникова, а затем дискретизация по уровню. В итоге двоичные кодовые комбинации несут информацию о значении отсчетов с максимальной погрешностью равной по модулю половине уровня квантования [8].

Рассмотрим пример, когда имеется 8 уровней квантования и каждый уровень кодируется кодовой комбинацией их трех символов, что представлено на рис. 2. Такое преобразование принято называть импульсно-кодовой модуляцией (ИКМ). Условимся для определенности дальнейших рассуждений, что уровни квантования кодируются от нижнего к верхнему через комбинации 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111 [9]. В общем случае возможно, $N = (2^n)! = (2^3)! = 40320$ вариантов сопоставления матрицы погрешностей $P_N = P_8$ с матрицей кодовых расстояний двоичного кода $D_n^i = D_3^i$.

При любом варианте сопоставления матрицы погрешностей P_N с матрицей кодовых расстояний двоичного кода D_n^i суммарная величина искажений при рассмотрении всех возможных ошибок (сбоев) двоичных символов остается одной и той же величиной [10]. Исследуем это обстоятельство и покажем, что данное утверждение справедливо для всех вариантов сопоставления двоичных кодовых комбинаций и элементов исходного сигнала от источника.

Исследуем причину возникновения искажений при восстановлении исходных элементов из двоичных комбинаций, оказавшихся подвергнутых влиянию помех, и, имеющих, в результате этого, определенные ошибки, преобразующие их в иные кодовые комбинации [11].

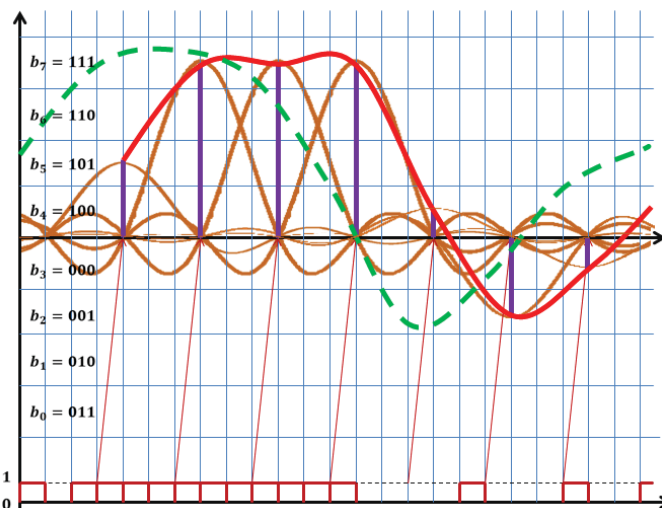


Рис. 2. Кодирование по 8 уровням квантования

Рассматривая различные варианты ошибок (сбоев), число которых равно, $C_N^1 + C_N^2 + \dots + C_N^N = 2^N - 1$, мы рассматриваем все без исключения варианты перехода одной кодовой комбинации в другие. При этом все эти переходы являются взаимно однозначными, что следует из определений биекции метрических пространств. Следовательно, при любом n , суммарная величина искажений будет оставаться неизменной [12]. Все возможные варианты сопоставления кодовых комбинаций и элементов исходного сигнала будут влиять на то, каким ложным переходам, из-за неверного восстановления исходного сигнала, будут соответствовать те или иные трансформации.

Например, при некотором варианте установления соответствия, ошибка в одном символе в двоичной кодовой комбинации приведет к ее трансформации в другую двоичную кодовую комбинацию, которая соответствует элементу исходного сигнала от источника, а этот элемент, согласно метрике того пространства, будет удален от истинного положения на самое большое расстояние, тогда как при другом варианте соответствия это расстояние могло бы быть наименьшим [13].

Очевидно, что возникнут и противоположные ситуации при сравнении различных вариантов соответствия. Однако суммарный выигрыш или проигрыш будет определяться тем какова вероятность тех или иных ошибок, что и будет являться оптимизирующим фактором при выборе того или иного метода соответствия между исходным сигналом и кодовыми комбинациями двоичного кода [14].

Суммарная величина искажений зависит от конфигурации пространства сообщений, задаваемых элементами $n_{ij} = l_{ij}$. Поскольку элементы $n_{ij} = l_{ij}$ определяют все возможные расстояния между любыми парами, то их сумма и определит величину суммарных искажений при всех возможных сбоях.

Для рассматриваемого примера простейшего ИКМ преобразования имеем матрицу расстояний, полагая, что шаг квантования по уровню остается неизменным.

$$L_8 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

Согласно сделанному допущению, матрица погрешностей (искажений) равна матрице расстояний между сообщениями, т.е. $\Pi_8 = L_8$. Отсюда для данного примера суммарная величина искажений $\sum_{i=0}^7 n_{ij} = 168$.

В общем виде сумма искажений $\{d(a_1)\}$ первого элемента a_1 равна искажениям от этого элемента до последнего a_N и очевидно равна сумме:

$$\{d(a_1)\} = \sum_{i=2}^N a_i \quad (12)$$

От второго элемента a_2 следует учитывать расстояние до последнего a_N и расстояние до первого a_1 . Имеем:

$$\{d(a_2)\} = (\sum_{i=3}^N a_i) + a_1 \quad (13)$$

Для j -ого элемента суммарное расстояние определяется расстоянием до последнего a_N и расстоянием до первого a_1 .

$$\{d(a_j)\} = (\sum_{i=j+1}^N a_i) + (\sum_{i=1}^{j-1} a_i) \quad (14)$$

Итоговая сумма будет равна:

$$\sum_{j=1}^N n_{ij} = \sum_{j=1}^N [(\sum_{i=j+1}^N a_i) + (\sum_{i=1}^{j-1} a_i)] \quad (15)$$

Таким образом, можно сделать вывод о том, что в заданном метрическом пространстве исходного сообщения сумма всех искажений величина постоянная и определяется матрицей расстояний.

Рассмотрим частный случай, когда все уровни квантования выстроены в одну линию и отстоят друг от друга на одну и ту же величину. Подобная структура характерна для аналого-цифрового преобразования аудио сигнала, в частности речевого, в цифровую последовательность [15].

В этом случае первая строка матрицы расстояний, когда элементами строки будет количество уровней, на которые имеются отличия, представляет собой арифметическую прогрессию с коэффициентом прогрессии $d = 1$. Сообразно этому сформированы и остальные строки матрицы расстояний.

Исходя из структуры образованной матрицы расстояний, можно записать формулу для итоговой суммы:

$$\sum_{j=1}^N n_{ij} = \sum_{j=1}^N [(\sum_{i=0}^{N-j} i) + (\sum_{i=0}^{j-1} i)] \quad (16)$$

Имея в виду, что сумма арифметической прогрессии определяется по формуле:

$$S_a = \frac{2 \cdot a_1 + d \cdot (n-1) \cdot n}{2} \quad (17)$$

и, учитывая, что $a_1 = 0$, а $d = 1$, окончательно получаем:

$$\sum_{j=1}^N n_{ij} = \sum_{j=1}^N \left[\frac{(N-j) \cdot (N-j+1)}{2} + \frac{j \cdot (j-1)}{2} \right] \quad (18)$$

После определенных преобразований и упрощений имеем:

$$\sum_{j=1}^N n_{ij} = \frac{N^2 \cdot (N+1)}{2} - \sum_{j=1}^N j \cdot (N+1-j) \quad (19)$$

Упростим второе слагаемое.

$$\sum_{j=1}^N j \cdot (N+1-j) = 2 \cdot \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}} j \cdot (N+1-j) = \frac{N(N+1)(N+2)}{6} \quad (20)$$

Тогда окончательно имеем:

$$\sum_{j=1}^N \Pi_{ij} = \frac{N^2 \cdot (N+1)}{2} - \frac{N(N+1)(N+2)}{6} = \frac{N \cdot (N^2 - 1)}{3} \quad (21)$$

Подставив в это выражение значение $N = 8$, взятое для рассматриваемого примера, убеждаемся в истинности этой формулы.

Если эту формулу записать в следующем виде:

$$\frac{N \cdot (N^2 - 1)}{3} = \frac{(N-1) \cdot N \cdot (N+1)}{3} \quad (22)$$

то это доказывает, что данное число всегда будет натуральным при любом натуральном N .

Довольно часто при передаче сигналов используются квадратичные формы сигнально-кодовых конструкций. В простейшем случае это можно проиллюстрировать рис. 1, на котором изображены четыре сообщения А, В, С, D, размещенные в четырех углах квадрата.

Рассмотрим более общий случай, когда квадратичные формы могут иметь вид, показанный на рис. 2.

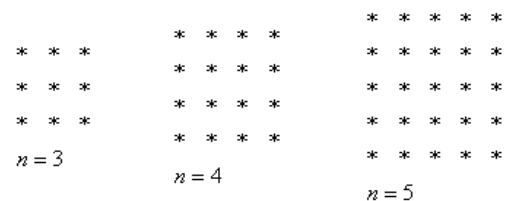


Рис. 3. Виды квадратичных форм

Очевидно, что матрицу (3) для случая, показанного на рис. 3, можно записать в следующем виде:

$$L_9 = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \dots & l_{19} \\ l_{21} & l_{22} & \dots & l_{29} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{91} & l_{92} & \dots & l_{99} \end{pmatrix} \quad (23)$$

Переходя к очевидным геометрическим представлениям заданного метрического пространства, имеем:

$$L_9 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} & 2 & \sqrt{5} & \sqrt{8} \\ 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} & 2 & \sqrt{5} \\ 2 & 1 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{8} & \sqrt{5} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} & 0 & 1 & 2 & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{5} & \sqrt{2} & 1 & 2 & 1 & 0 & \sqrt{5} & \sqrt{2} & 1 \\ 2 & \sqrt{5} & \sqrt{8} & 1 & \sqrt{2} & \sqrt{5} & 0 & 1 & 2 \\ \sqrt{5} & 2 & \sqrt{5} & \sqrt{2} & 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & 1 \\ \sqrt{8} & \sqrt{5} & 2 & \sqrt{5} & \sqrt{2} & 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

Данная матрица имеет заметные свойства симметрии, а все ее члены, благодаря этим свойствам, могут быть построены, исходя из одной первой строки или из одного первого столбца.

Если сравнить матрицу (24), когда $n = 3$, с матрицей (6), когда $n = 2$, $a^l = 1a$, мы видим очевидное увеличение размерности матрицы (24) и появление новых значений ее членов. Если в матрице (6) члены l_{ij} принимали значение 0, 1, $\sqrt{2}$ то теперь к этим значениями добавляются значения 2, $\sqrt{5}$, $\sqrt{8}$.

Данное обстоятельство является отражением квадратичных форм с ростом величины n , и имеет определенную закономерность. Так, при $n = 1$ имеем одно значение l_{ij} , равное 0. При $n = 2$ добавляются еще два значения l_{ij} , равные 1 и $\sqrt{2}$. При $n = 3$ добавляется три новых значения l_{ij} , равных 2, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{8}$. При $n = 4$ добавятся еще четыре новых значения l_{ij} , равных 3, $\sqrt{10}$, $\sqrt{13}$, и $\sqrt{18}$. В общем случае можно констатировать, что с ростом n пропорционально увеличивается количество новых значений элементов l_{ij} .

Количество элементов l_{ij} растет, как n^4 . Это означает, что при $n = 1$ число элементов l_{ij} равно 1. При $n = 2$ – число элементов l_{ij} равно 16, при $n = 3$ число элементов l_{ij} равно 81 и т.д.

Исследуем более подробно этот вопрос.

В квадратичной форме, определяемой величиной n , существуют элементы l_{ij} , принимающие значения целых чисел от 0 до $(n - 1)$, что соответствует длинам сторон квадратов. Кроме этого имеются «диагональные» элементы l_{ij} , значение которых можно вычислить по известной формуле, связывающей размер гипотенузы прямоугольного треугольника с его катетами. В обобщенном виде для всех возможных значений l_{ij} и n , можно применить формулу, отражающую все разнообразие элементов l_{ij} , а именно: $\sqrt{q^2 + s^2}$, где q и s изменяются от 0 до $(n - 1)$.

В общем виде число элементов матрицы расстояний, принимающих значения

$$l_{ij} = 0, 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{18}, 4, \sqrt{17}, \sqrt{20}, \sqrt{25}, \sqrt{32}, \dots$$

можно рассчитать по формулам:

$$\begin{aligned} &0 : n \cdot n ; \\ &1 : 4 \cdot (n - 1) \cdot n ; \\ &\sqrt{2} : 4 \cdot (n - 1) \cdot (n - 1) ; \\ &2 : 4 \cdot (n - 2) \cdot n ; \\ &\sqrt{5} : 8 \cdot (n - 2) \cdot (n - 1) ; \\ &\sqrt{8} : 4 \cdot (n - 2) \cdot (n - 2) ; \\ &3 : 4 \cdot (n - 3) \cdot n ; \\ &\sqrt{10} : 8 \cdot (n - 3) \cdot (n - 1) ; \\ &\sqrt{13} : 8 \cdot (n - 3) \cdot (n - 2) ; \\ &\sqrt{18} : 4 \cdot (n - 3) \cdot (n - 3) ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &4 : 4 \cdot (n - 4) \cdot n ; \\ &\sqrt{17} : 8 \cdot (n - 4) \cdot (n - 1) ; \\ &\sqrt{20} : 8 \cdot (n - 4) \cdot (n - 2) ; \\ &\sqrt{25} : 8 \cdot (n - 4) \cdot (n - 3) ; \\ &\sqrt{32} : 4 \cdot (n - 4) \cdot (n - 4) . \end{aligned}$$

и т.д.

Этот общий вывод, продемонстрированный на примере, когда $n = 2, 3, 4$ и 5 дает основания вывести общие значения расстояний в квадратичных конструкциях любой размерности. Аналогично этому можно оценить расстояния и для других геометрических построений, например, для встречающейся достаточно часто «круговой конструкции».

Заключение

Полученные в данной статье результаты направлены на разработку метода оценки возникающих искажений при трансформации элементов исходного сигнала от источника, описываемых в одном метрическом пространстве, в двоичные сигналы, представляемые в пространстве Хемминга, и в условиях действия помех, приводящих к ошибкам в дискретном двоичном сигнале.

Разработанный метод был применен к достаточно часто встречающимся случаям описания сигналов от источника, когда погрешности (искажения) определяются расстоянием между исходными элементами сообщения от источника, представленными в виде точек на плоскости и заданной метрикой пространства Евклида. Исследуемые модели позволяют установить соответствие между ними и кодовыми комбинациями двоичного кода, для которых расстояние задается в пространстве Хэмминга. Доказано, что суммарные искажения матрицы погрешностей не зависят от вариантов установления соответствия. Вместе с тем, поскольку возникновение ошибок разной кратности имеет существенно отличающиеся вероятности, то выбор способа установления соответствия весьма важен, поскольку позволяет уменьшить возникающие искажения в восстанавливаемом сигнале из-за ошибок в двоичном цифровом сигнале.

При установлении данного соответствия становятся понятными возможности минимизации искажений, если минимальным расстояниям по Хэммингу ставить в соответствие минимальные расстояния по Евклиду. Данное обстоятельство, приводящее к «хорошим» результатам по сравнению с противоположной стратегией, требует в общем случае более детального рассмотрения в плане выбора начальной точки, относительно которой будет выстраиваться названное соответствие, поскольку оптимизация на «первом шаге» может конфликтовать с последующим выбором соответствия по минимальному кодовому расстоянию. То есть «пошаговая» оптимизация не всегда может быть оптимизацией «в целом». Распределение вероятностей ошибок в цифровом двоичном сигнале, является оптимизирующим фактором, а значит, в случае изменения статистики ошибок выбранный вариант соответствия может оказаться не самым лучшим. Другими словами, оптимальный вариант соответствия определяется распределением вероятностей ошибок в цифровом сигнале.

Литература

1. *Аджемов А.С., Кудряшова А.Ю.* Особенности оценки качества передачи сигналов в различных метрических пространствах // *Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения*. 2017. Т. 17. № 4. С. 886-888.
2. *Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y.* About features of evaluation of the quality of generation and signal processing at stage transformations in wiring and optical communication systems // *IEEE International Scientific Conference Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications (ON BOARD)*. Moscow, 2018, pp.1-4.
3. *Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y.* Features rate estimation options binary codewords with the digitalization of the signal // *IEEE International Scientific Conference Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*. Minsk, 2018, pp.1-5.
4. *Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y.* Building an Algorithm for Estimating the Effective Coding of a Source when Converting Signals in Various Metric Spaces // *IEEE Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*. St.-Petersburg, 2018, pp.1-4.
5. *Аджемов А.С., Кудряшова А.Ю.* Об особенностях оценки качества преобразования сигналов при последовательных преобразованиях в различных метрических пространствах // *XII Международная научно-техническая конференция «Технологии информационного общества»*, 2018. С. 211-213.
6. *Аджемов А.С., Кудряшова А.Ю.* Особенности оценки мощности набора вариантов для комбинаций двоичного кода при оцифровке сигнала // *Системы синхронизации, генерация и обработка сигналов*. 2018. Том. 9. № 1. С. 5-8.
7. *Кудряшова А.Ю.* Особенности оценки кодирования в различных конфигурациях исходного пространства // *DSPA: проблемы применения цифровой обработки сигналов*, 2018. Т. 8. № 3 с. 228-232.
8. *Аджемов А.С., Кудряшова А.Ю.* Особенности оценки мощности множественного выбора комбинаций двоичных кодов // *Фундаментальные проблемы радиоэлектронного приборостроения*. 2018. Т. 18. № 4. С. 926-929.
9. *Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y.* Evaluation program of an efficient source coding algorithm under the condition of converting metric spaces // *IEEE Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*. St.-Petersburg, 2019, pp.1-5.
10. *Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y., Vlasjuk I.V.* Application of Weber-Fechner Law in Image Transmission in the Field of Onboard Communications // *IEEE International Scientific Conference Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications (ON BOARD)*. Moscow, 2019, pp.1-6.
11. *Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y.* Model of Effective Color Image Coding Taking into Account the Peculiarities of Colorimetry System // *IEEE International Scientific Conference Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*. Yaroslavl, 2019, pp. 1-4.
12. *Аджемов А.С., Кудряшова А.Ю., Долгопятова А.В.* Построение эффективного алгоритма оценки кодирования источника при преобразовании метрических пространств // *XIII Международная научно-техническая конференция «Технологии информационного общества»*, 2019. С.195-198.
13. *Kudryashova A.* A method of efficient coding of color images under the condition of permissible and forbidden values of color gamut // *T-Comm*. 2019. Vol.13. № 6, pp. 65-70.
14. *Аджемов А.С., Кудряшова А.Ю.* Модель эффективного кодирования цветного изображения с учетом особенностей систем колориметрии // *Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии*. 2019. Т.2. № 3. С. 349-360.
15. *Аджемов А.С., Кудряшова А.Ю.* Использование модели зрительной системы человека для оптимизации параметров передачи изображения // *Инфокоммуникационные и радиоэлектронные технологии*. 2019. Т.2. № 4. С. 489-502.

MINIMIZING SIGNAL DISTORTIONS AT THE MOST OPTIMAL CHOICE OF DIGITAL CONVERSION METHOD

Anastasiya Yu. Kudryashova, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia, asykka@bk.ru

Abstract

When converting various signals into digital form, certain distortions (errors) appear in them, associated with the discretization and quantization. This circumstance is taken into account when developing appropriate methods for analog-to-digital conversion in order to ensure established quality requirements. As a rule, this is either the maximum permissible absolute error or the standard error. However, in addition to this, distortion also occurs due to the random influence of interference introducing errors into the digital signal. As a result, the quality of the signal obtained during transmission and during further restoration of the signal may not correspond to the originally established requirements. To minimize distortion due to errors in the digital signal, it is necessary to study the influence of these random factors on the transmitted signal. As will be shown below, in this article, one of the factors affecting noise immunity is the method of rational choice of methods for digital representation of the original signal as a sequence of code combinations of a binary code. This method takes into account transformations from one metric space (in which the original signal was presented) to another (the Hamming space used to describe the binary signal). It is proposed to use the error matrix to describe the arising distortions in the reconstructed signal (as a result of errors in the binary digital signal), the elements of which will be the distortion values for all possible cases of incorrect recovery of binary code combinations. The article analyzes the error matrix and the code distance matrix of the binary code, calculates the total number of distortions in the transformations of various metric spaces. The values are calculated that determine the distance between the original messages and the given Euclidean space metric. This distance will allow you to establish a correspondence between these messages and code combinations of the binary code, for which the distance is already set in another space (Hamming space). Also, the article proposes minimization of distortions if the minimum distances of one metric space are associated with the minimum distances of another metric space. In addition, limitations on this minimization were identified.

Keywords: digital signal, distortion matrix, error matrix, code distance, total distortion.

References

1. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2017). Features of assessing the quality of signal transmission in various metric spaces. *Fundamental problems of radio-electronic instrument-making*. Vol. 17. No. 4, pp. 886-888. (in Russian)
2. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2018). About features of evaluation of the quality of generation and signal processing at stage transformations in wiring and optical communication systems. *IEEE International Scientific Conference Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications (ON BOARD)*. Moscow, pp.1-4.
3. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2018). Features rate estimation options binary codewords with the digitalization of the signal. *IEEE International Scientific Conference Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*. Minsk, pp.1-5.
4. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2018). Building an Algorithm for Estimating the Effective Coding of a Source when Converting Signals in Various Metric Spaces. *IEEE Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*. S.-Petersburg, pp.1-4.
5. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2018). On the peculiarities of the evaluation of the quality of signal conversion under successive transformations in various metric spaces. *Proceedings of the XII International Industrial Scientific and Technical Conference Information Society Technologies*, pp. 211-213. (in Russian)
6. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2018). Features of estimating the power of a set of choices for binary code combinations when digitizing a signal. *Synchronization systems, signal generation and processing*. Vol. 9. No. 1, pp. 5-8. (in Russian)
7. Kudryashova A.Y. (2018). Features of encoding evaluation in various source space configurations. *DSPA: Issues of application of digital signal processing*. Vol. 8. No. 3, pp. 228-232. (in Russian)
8. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2018). Features of estimating the power of multiple choice binary code combinations. *Fundamental problems of radio-electronic instrument-making*. Vol. 18. No. 4, pp. 926-929. (in Russian)
9. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2019). Evaluation program of an efficient source coding algorithm under the condition of converting metric spaces. *IEEE Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*. S.-Petersburg, pp.1-5.
10. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. Vlasjuk I.V. (2019). Application of Weber-Fechner Law in Image Transmission in the Field of Onboard Communications. *IEEE International Scientific Conference Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications (ON BOARD)*. Moscow, pp. 1-6.
11. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2019). Model of Effective Color Image Coding Taking into Account the Peculiarities of Colorimetry System. *IEEE International Scientific Conference Systems of Signal Synchronization, Generating and Processing in Telecommunications (SYNCHROINFO)*. Yaroslavl, pp. 1-4.
12. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y., Doldopyatova A.V. (2019). Building an effective algorithm for evaluating source coding in metric space transformation. *Proceedings of the XIII International Industrial Scientific and Technical Conference Information Society Technologies*, pp 195-198. (in Russian)
13. Kudryashova A.Y. (2019). A method of efficient coding of color images under the condition of permissible and forbidden values of color gamut. *T-Comm*. Vol. 13. No. 6, pp. 65-70.
14. Adzhemov A.S. (2018). Code distance table and its application. *IEEE Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*. S.-Petersburg, pp.1-5.
15. Adzhemov A.S., Adzhemov S.A. (2019). About some features of binary code combinations. *IEEE International Scientific Conference Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications (ON BOARD 2019)*. Moscow, pp. 1-7.
16. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2019). Effective coding model of color image based on features colorimetric systems. *Infocommunications and Radio Technologies*. Vol. 2. No. 3, pp. 349-360.
17. Adzhemov A.S., Kudryashova A.Y. (2019). Using the human visual system model to optimize image transmission parameters. *Infocommunications and Radio Technologies*. Vol. 2. No. 4, pp. 489-502.