АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ЧАСТНО-ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПИЛООБРАЗНЫХ СИГНАЛОВ

DOI: 10.36724/2072-8735-2026-20-10-34-42

Шевгунов Тимофей Яковлевич,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия,
shevgunov@gmail.com

Ефимов Евгений Николаевич,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия,
omegatype@gmail.com

Гущина Оксана Александровна,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия,
guschinaoksana@gmail.com

Вавилова Жанна Александровна,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия,
zhanke@bk.ru

Manuscript received 27 July 2026;
Accepted 30 September 2026

Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского научного фонда № 25-21-00281, https://rscf.ru/project/25-21-00281/ "Развитие теории и методов обработки нестационарных случайных процессов на основе частно-временного анализа"

Ключевые слова: *циклостационарность, частно-временной анализ, распределение время-значение, переменная индикаторная функция, пилообразный сигнал, треугольный сигнал, широтно-импульсная модуляция*

Работа продолжает развитие частно-временного (fraction-of-time) подхода к описанию статистических свойств сигналов по их единственной реализации без привлечения гипотезы эргодичности. Ранее для гармонического сигнала были получены явные выражения коэффициентов рядов Фурье распределения "время-значение" (РВЗ) и переменной индикаторной функции (ПИФ). В настоящей статье аналогичная задача решена для однопараметрического семейства периодических пилообразных сигналов с конечной длительностью обратного хода, включающего в качестве частных случаев пилообразный сигнал с мгновенным обратным ходом и симметричный треугольный сигнал. Параметром семейства служит доля периода, приходящаяся на прямой ход. Получены явные выражения компонент РВЗ и ПИФ как функций пороговой переменной. Показано, что частно-временная плотность всех сигналов семейства равномерна и не зависит от параметра, тогда как форма сигнала определяется компонентами на ненулевых циклических частотах. Установлено, что модули компонент ПИФ инвариантны к параметру семейства, который входит только в их фазовые множители. Компоненты РВЗ интерпретированы как результат интерференции вкладов прямого и обратного хода; для пилообразного сигнала с мгновенным обратным ходом мажорантное неравенство, связывающее нестационарные компоненты со стационарной, обращается в равенство. Предельный переход по параметру семейства обосновывает правило учёта точки разрыва сигнала в явной форме частно-временной плотности вероятности. Корректность полученных выражений подтверждена сравнением с результатами прямого численного усреднения по периоду сигнала. Проведено сопоставление с результатами для гармонического сигнала и дана интерпретация ПИФ как сигнала широтно-импульсной модуляции, формируемого компаратором.

Информация об авторах:

Шевгунов Тимофей Яковлевич, *к.т.н., доцент кафедры "Теоретическая радиотехника" Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия, ORCID: 0000-0003-1444-983X*

Ефимов Евгений Николаевич, *к.т.н., ведущий инженер НПЦ РИМ Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия, ORCID: 0000-0001-5975-6513*

Гущина Оксана Александровна, *инженер НПЦ РИМ Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия, ORCID: 0000-0002-6349-332X*

Вавилова Жанна Александровна, *к.т.н., доцент кафедры "Теоретическая радиотехника" Московского авиационного института (национального исследовательского университета), Москва, Россия, ORCID: 0000-0003-0958-421X*

Для цитирования:
Шевгунов Т. Я., Ефимов Е. Н., Гущина О. А., Вавилова Ж. А. Аналитические выражения частно-временных характеристик пилообразных сигналов // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2026. Том 20. №10. С. 34-42.

For citation:
T. Ya. Shevgunov, E. N. Efimov, O. A. Guschina, Zh. A. Vavilova, "Analytical expressions of fraction-of-time characteristics of sawtooth waveforms," *T-Comm*, 2026, vol. 20, no.10, pp. 34-42. (*in Russian*)

Введение

Частно-временной (fraction-of-time, FOT) подход к анализу сигналов позволяет вводить вероятностные характеристики, такие как функция распределения и плотность, по единственной наблюдаемой реализации, не опираясь на ансамбль реализаций и не требуя выполнения условий стационарности и эргодичности [1-3]. Понятие относительной меры, лежащее в строгом математическом основании этого подхода, было формализовано в работе [4], а современное состояние направления и его отличия от классического вероятностного описания обсуждаются в работах [5, 6]. Особый интерес частно-временной подход представляет для анализа циклостационарных сигналов, статистические свойства которых изменяются во времени периодически или почти-периодически [1, 3].

В работе [7] было получено представление сингулярной функции, лежащей в основе частно-временной плотности (ЧВП), в форме явной функции двух переменных: текущего времени и порога. Это позволило перейти от формальной записи к явному интегрированию и получить для гармонического сигнала аналитические выражения коэффициентов рядов Фурье двух нестационарных характеристик: распределения «время-значение» (РВЗ) и переменной индикаторной функции (ПИФ). Компоненты РВЗ гармонического сигнала оказались выражены через полиномы Чебышёва первого рода, а компоненты ПИФ через тригонометрические функции арккосинуса порога. На основе того же аппарата разработан метод оценивания ЧВП по отсчётам цифрового сигнала с использованием кусочно-линейной интерполяции [8, 9], а также методы обнаружения характерных циклических частот [10].

Гармонический сигнал является естественным первым примером, однако он обладает рядом особенностей, которые затрудняют разделение общих свойств компонент РВЗ и ПИФ и свойств, присущих именно этому сигналу. В частности, производная гармонического сигнала естественно обращается в нуль в точках его экстремумов, что приводит к неограниченному возрастанию ЧВП на краях её носителя. Поэтому представляет интерес рассмотреть сигналы иной формы, для которых пороговое уравнение решается столь же просто, но производная сигнала не обращается в нуль. При этом важно отметить, что присутствие в сигналах скачков (разрывов первого рода) и изломов (нарушения непрерывности производной) не препятствует применению явной формы ЧВП, хотя точки разрыва требуют отдельного исследования.

В качестве таких сигналов в настоящей статье выбраны периодические пилообразные сигналы, широко используемые в радиотехнике. Генераторы линейно изменяющегося напряжения применяются в системах развёртки индикаторных устройств, в аналого-цифровых преобразователях с линейно нарастающим опорным напряжением и в модуляторах широтно-импульсной модуляции (ШИМ), где пилообразный или треугольный опорный сигнал сравнивается компаратором с модулирующим напряжением [11]. Спектральный состав пилообразных и треугольных сигналов детально описан, например, в [12]. Пилообразный и симметричный треугольный законы используются также для изменения мгновенной частоты в радиолокационных системах с непрерывным излучением и линейной частотной модуляцией; частно-временное описание сигналов с линейной частотной модуляцией рассматривалось, например, в [13].

Частно-временное описание сигналов на основе РВЗ систематизировано авторами в [14], аналитические выражения частно-временных характеристик получены также для циклостационарного сигнала с амплитудно-импульсной модуляцией [15], а результаты для гармонического сигнала развиты в [16]. Частно-временной подход дополняет развиваемые авторами методы моделирования циклостационарных процессов [17] и оценивания их спектральных корреляционных функций [18, 19]. Кроме того, авторами рассмотрены несимметричные формы переменной во времени автокорреляционной функции циклостационарных процессов [20], применение двумерного преобразования Фурье для оценки спектральной корреляционной функции [21], циклостационарный подход к анализу мощности в электрических цепях при периодических воздействиях [22] и обнаружение сигналов по их циклическим признакам [23].

Целью настоящей работы является получение явных аналитических выражений для компонент рядов Фурье РВЗ и ПИФ однопараметрического семейства пилообразных сигналов с конечной длительностью обратного хода, проверка этих выражений, их интерпретация и сопоставление с результатами, полученными ранее для гармонического сигнала [7]. Семейство включает два сигнала, анализируемые в качестве примеров, представляющих отдельный исследовательский интерес: пилообразный сигнал с мгновенным обратным ходом, содержащий разрыв, и симметричный треугольный сигнал, имеющий изломы. Это позволяет в рамках единого описания проследить, как особенности формы сигнала проявляются в его частно-временных характеристиках.

1 Основные соотношения частно-временного описания

Рассмотрим вещественный сигнал $x(t)$, наблюдаемый на конечном интервале $[0, T)$. Его частно-временное распределение (ЧВР) и частно-временная плотность задаются выражениями [7]:

$$F_{x|[0,T)}(\xi) = \frac{1}{T}\int_0^T u\left(\xi - x(t)\right)dt\,, \tag{1}$$

$$f_{x|[0,T)}(\xi) = \frac{dF_{x|[0,T)}(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{T}\int_0^T \delta\left(\xi - x(t)\right)dt\,, \tag{2}$$

где $u(\bullet)$ обозначает функцию Хевисайда, $\delta(\bullet)$ – дельта-функцию Дирака, ξ – пороговую переменную, с которой сравниваются значения сигнала.

Подынтегральное выражение в (2) является дельта-функцией сложного аргумента. В работе [7] показано, что на интервале наблюдения она может быть эквивалентно представлена в явном виде:

$$\delta_{[0,T)}\left(\xi - x(t)\right) = \sum_m \frac{\delta\left(t - t_{m|[0,T)}(\xi)\right)}{\left|x'\left(t_{m|[0,T)}(\xi)\right)\right|} + \\ + \sum_l I\left[t \in Ru_{x|[0,T)}\left(x_{l|[0,T)}\right)\right]\delta\left(\xi - x_{l|[0,T)}\right), \tag{3}$$

где $t_{m|[0,\,T)}$ обозначает m-й изолированный корень порогового уравнения $x(t) = \xi$ на интервале $[0, T)$, $x'(t)$ – производную сигнала, а вторая сумма описывает горизонтальные участки сигнала ненулевой протяжённости, на которых сигнал $x(t)$

принимает постоянные значения $x_{|[0,\,T)}$. Рассматриваемые в настоящей работе сигналы горизонтальных участков не содержат, поэтому вторая сумма в (3) далее не используется.

Нестационарные свойства сигнала описываются переменной индикаторной функцией (ПИФ) и распределением «время-значение» (РВЗ):

$$\mathcal{I}_x(t,\xi) = u\big(\xi - x(t)\big), \tag{4}$$

$$TVD_x(t,\xi) = \frac{\partial \mathcal{I}_x(t,\xi)}{\partial \xi} = \delta\big(\xi - x(t)\big). \tag{5}$$

Для периодического сигнала с периодом $T_x = 1/\nu_x$ обе функции при фиксированном пороге ξ периодичны по t и допускают разложение в ряд Фурье:

$$TVD_x(t,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f_x^k(\xi) e^{j2\pi k\nu_x t}, \tag{6}$$

$$\mathcal{I}_x(t,\xi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_x^k(\xi) e^{j2\pi k\nu_x t}, \tag{7}$$

где компоненты определяются усреднением по периоду:

$$f_x^k(\xi) = \frac{1}{T_x}\int_0^{T_x} TVD_x(t,\xi) e^{-j2\pi k\nu_x t}\,dt, \tag{8а}$$

$$F_x^k(\xi) = \frac{1}{T_x}\int_0^{T_x} \mathcal{I}_x(t,\xi) e^{-j2\pi k\nu_x t}\,dt \tag{8б}$$

и связаны соотношением

$$F_x^k(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} f_x^k(\gamma)\,d\gamma. \tag{9}$$

Компоненты с номером $k = 0$ являются стационарными: $f_x^0(\xi)$ совпадает с ЧВП сигнала (2), а $F_x^0(\xi)$ с его ЧВР (1). Компоненты с $k \neq 0$ описывают периодическое изменение частно-временных характеристик во времени.

Подстановка первой суммы из (3) в (5) и далее в (8) позволяет выполнить интегрирование по времени в явном виде и получить выражение для компонент РВЗ:

$$f_x^k(\xi) = \frac{1}{T_x}\sum_m \frac{\exp\big(-j2\pi k\nu_x t_m(\xi)\big)}{\big|x'\big(t_m(\xi)\big)\big|}, \tag{10}$$

где суммирование выполняется по не более чем счётному множеству лежащих в пределах периода $[0, T_x)$ простых корней $t_m(\xi)$ порогового уравнения, то есть корней, в которых производная $x'(t)$ существует и отлична от нуля. Если в некоторой точке сигнал имеет разрыв, производная в классическом смысле в ней не существует, и величина $1/|x'(t_m)|$ требует отдельного истолкования [7]. В разделе 3 будет показано, что для разрыва естественным является нулевое значение этой величины; этот вывод обоснован предельным переходом.

При сдвиге сигнала во времени $y(t) = x(t-\tau)$ компоненты получают фазовый множитель:

$$f_y^k(\xi) = f_x^k(\xi) e^{-j2\pi k\nu_x\tau}, \quad F_y^k(\xi) = F_x^k(\xi) e^{-j2\pi k\nu_x\tau}, \tag{11}$$

а стационарные компоненты (1) и (2) при этом не изменяются.

Для сравнения приведём результаты [7] для гармонического сигнала $x(t) = A_x\cos(2\pi\nu_x t)$ с началом отсчёта времени в точке максимума. Компоненты его ПИФ и РВЗ записываются через нормированные функции нормированной пороговой переменной $\psi = \xi/A_x$:

$$f_x^k(\xi) = \frac{1}{A_x} f_{\cos}^k\left(\frac{\xi}{A_x}\right), \quad f_{\cos}^k(\psi) = \frac{T_k(\psi)}{\pi\sqrt{1-\psi^2}}\,\mathrm{rect}\left(\frac{\psi}{2}\right), \tag{12}$$

$$F_x^k(\xi) = F_{\cos}^k\left(\frac{\xi}{A_x}\right), \tag{13а}$$

$$F_{\cos}^k(\psi) = \begin{cases} \left[1 - \dfrac{1}{\pi}\arccos(\psi)\right]\mathrm{rect}\big(\psi/2\big) + u(\psi-1), & k = 0, \\ -\dfrac{1}{\pi k}\sin\big(k\arccos(\psi)\big)\,\mathrm{rect}\big(\psi/2\big), & |k| \geq 1, \end{cases} \tag{13б}$$

где $T_k(\psi)$ обозначает полином Чебышёва первого рода k-го порядка [24].

2 Формирование частно-временных характеристик пилообразного сигнала

Рассмотрим периодический сигнал с периодом T_x, который на каждом периоде линейно возрастает от минимального значения $-A_x$ до максимального A_x (прямой ход), а затем линейно убывает до $-A_x$ (обратный ход). Совместим нулевой момент времени с точкой минимума и обозначим через $\beta \in (0,1]$ долю периода, приходящуюся на прямой ход. На интервале $[0, T_x)$ сигнал задаётся выражением

$$x(t) = \begin{cases} -A_x + \dfrac{2A_x}{\beta T_x}t, & 0 \leq t < \beta T_x; \\ A_x - \dfrac{2A_x}{(1-\beta)T_x}(t - \beta T_x), & \beta T_x \leq t < T_x, \end{cases} \tag{14}$$

и продолжается периодически: $x(t + T_x) = x(t)$. При $\beta = 1$ вторая строка в (14) отсутствует, и сигнал представляет собой пилообразный сигнал с мгновенным обратным ходом, имеющий разрыв в точках $t = nT_x,\ n \in \mathbb{Z}$.

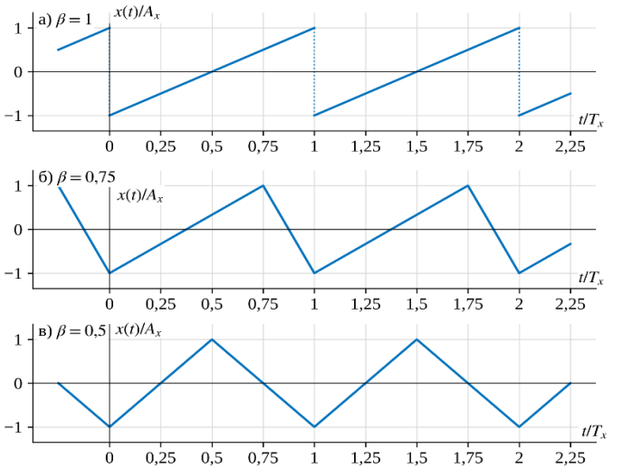


Рис. 1. Пилообразные сигналы с различной долей прямого хода: а) β = 1; б) β = 0,75; в) β = 0,5

При $\beta = 1/2$ сигнал является симметричным треугольным, а при промежуточных значениях β несимметричным треугольным, или пилообразным с конечной длительностью обратного хода. Значения $\beta \in (0,1/2)$ соответствуют сигналам с быстрым нарастанием и медленным спадом; как будет показано в разделе 3, их компоненты выражаются через компоненты сигналов с $\beta \in (1/2,1)$. Временные диаграммы сигнала (14) для трёх значений β представлены на рисунке 1.

2.1 Компоненты распределения "время-значение"

Как и для гармонического сигнала, введём нормированную пороговую переменную $\psi=\xi/A_x$, а также величину

$$D(\psi) = 0,5(1+\psi), \ |\psi|\le 1, \qquad (15)$$

которая имеет смысл доли периода, в течение которой значения сигнала не превышают порога.

Для $|\psi| > 1$ пороговое уравнение $x(t) = \xi$ корней не имеет, поэтому все компоненты РВЗ равны нулю, и носитель компонент по переменной ψ ограничен отрезком $[-1, 1]$. Для $|\psi| < 1$ и $0 < \beta < 1$ на периоде $[0, T_x)$ существуют ровно два корня: один на прямом ходе, другой – на обратном:

$$t_1(\xi) = \beta T_x D(\psi), \qquad t_2(\xi) = T_x\left[1-(1-\beta)D(\psi)\right]. \qquad (16)$$

Модули производной сигнала в этих точках постоянны и не зависят от порога:

$$\left|x'(t_1)\right| = \frac{2A_x}{\beta T_x}, \qquad \left|x'(t_2)\right| = \frac{2A_x}{(1-\beta)T_x}. \qquad (17)$$

Подстановка (16) и (17) в рабочую формулу (10) даёт компоненты РВЗ, которые, как и для гармонического сигнала (12), удобно записать через нормированные функции:

$$f_x^k(\xi) = \frac{1}{A_x} f_\beta^k\left(\frac{\xi}{A_x}\right), \qquad (18)$$

$$f_\beta^k(\psi) = \frac{\left[\beta e^{-j2\pi k\beta D(\psi)} + (1-\beta)e^{j2\pi k(1-\beta)D(\psi)}\right]}{2}\operatorname{rect}\left(\frac{\psi}{2}\right). \qquad (19)$$

При записи второго слагаемого учтено, что $e^{-j2\pi k} = 1$. Нормированные функции (19) не содержат амплитуды и частоты сигнала и зависят только от параметра формы β и номера компоненты k. В граничных точках $\psi = \pm 1$, где два корня сливаются в одну точку излома, значения (19) определяются односторонними пределами и остаются конечными.

Стационарная компонента, получаемая из (19) при $k = 0$, имеет вид

$$f_\beta^0(\psi) = 0,5\operatorname{rect}\left(0,5\psi\right), \qquad (20)$$

то есть ЧВП любого сигнала семейства является равномерной на отрезке $[-A_x, A_x]$ и не зависит от β. Следовательно, по стационарной компоненте сигналы семейства неразличимы, а их форма проявляется только в компонентах с $k \ne 0$.

Для пилообразного сигнала с мгновенным обратным ходом ($\beta = 1$) в (19) остаётся одно слагаемое, и с учётом (15)

$$f_1^k(\psi) = 0,5(-1)^k e^{-j\pi k\psi}\operatorname{rect}\left(0,5\psi\right). \qquad (21)$$

Компоненты (21) являются комплекснозначными функциями, причём их модуль постоянен на всём носителе и равен модулю стационарной компоненты. По переменной ψ они представляют собой отрезки комплексных экспонент, так что роль, которую для гармонического сигнала играли полиномы Чебышёва, для пилообразного сигнала играет тригонометрическая система функций.

Для симметричного треугольного сигнала ($\beta = 1/2$) оба слагаемых в (19) являются комплексно-сопряжёнными и имеют равные веса, и поэтому компоненты вещественны:

$$f_{1/2}^k(\psi) = 0,5\cos\left(\pi kD(\psi)\right)\operatorname{rect}\left(0,5\psi\right). \qquad (22)$$

В общем случае модули компонент (19) зависят от порога и определяются разностью фаз двух слагаемых, равной $2\pi kD(\psi)$:

$$\left|f_\beta^k(\psi)\right| = 0,5\operatorname{rect}(0,5\psi)\times \\ \times\sqrt{\beta^2+(1-\beta)^2+2\beta(1-\beta)\cos\left(2\pi kD(\psi)\right)}. \qquad (23)$$

Из (23) следуют двусторонние оценки модуля:

$$\frac{|2\beta-1|}{2} \le \left|f_\beta^k(\psi)\right| \le \frac{1}{2} = f_\beta^0(\psi), \qquad |\psi|\le 1, \qquad (24)$$

причём при $k \ne 0$ и $0 < \beta < 1$ верхняя граница достигается в точках $D(\psi) = n/k$, а нижняя – в точках $D(\psi) = (n + 0,5)/k$, $n \in \mathbb{Z}$. При $\beta = 1$ обе границы совпадают. Правое неравенство в (24) является аналогом мажорантного свойства стационарной компоненты, установленного в [7] для ЧВП гармонического сигнала.

Модули компонент РВЗ для $k = 0, \ldots, 4$ представлены на рисунке 2.

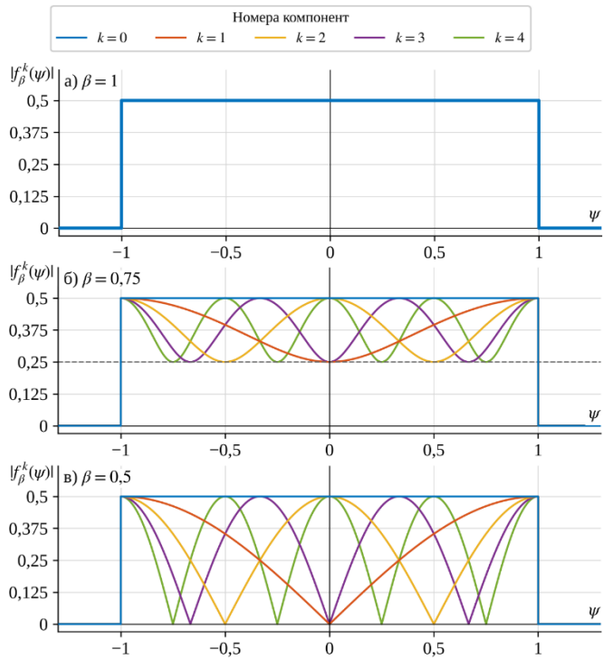


Рис. 2. Модули компонент ряда Фурье распределения «время-значение»: а) $\beta = 1$; б) $\beta = 0,75$; в) $\beta = 0,5$

Для $\beta = 1$ модули всех компонент совпадают со стационарной компонентой, и на графике видна одна линия. Для $\beta = 0{,}75$ модули осциллируют между границами (24); нижняя граница $|2\beta-1|/2 = 0{,}25$ отмечена штриховой линией. Для $\beta = 0{,}5$ нижняя граница равна нулю, и модули компонент обращаются в нуль в точках $\cos(\pi k D(\psi)) = 0$.

2.2 Компоненты переменной индикаторной функции

Компоненты в разложении ПИФ в ряд Фурье (7) могут быть найдены интегрированием компонент РВЗ (19) согласно (9). Однако для рассматриваемого семейства более наглядным оказывается прямое вычисление по определению (8). При фиксированном пороге $|\psi| < 1$ множество моментов времени, в которые сигнал не превышает порога, представляет собой на оси времени периодическую последовательность интервалов:

$$\{t : x(t) \le \xi\} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \left[t_2(\xi) - T_x + nT_x,\, t_1(\xi) + nT_x \right]. \quad (25)$$

Длительность каждого такого интервала составляет $t_1 - t_2 + T_x = T_x D(\psi)$, что и поясняет смысл величины (15), а его центр расположен в точке

$$\tau(\psi) = 0{,}5\left(t_1(\xi) + t_2(\xi) - T_x\right) = 0{,}5(2\beta-1)T_x D(\psi). \quad (26)$$

Таким образом, при фиксированном пороге ПИФ (4) является периодической последовательностью прямоугольных импульсов единичной амплитуды с относительной длительностью $D(\psi)$, центры которых смещены на $\tau(\psi)$. Коэффициенты ряда Фурье (7) такой последовательности хорошо известны [12], и с учётом свойства сдвига (11) компоненты ПИФ принимают вид

$$F_x^k(\xi) = F_\beta^k\left(\frac{\xi}{A_x}\right), \quad (27а)$$

$$F_\beta^k(\psi) = D(\psi)\operatorname{sinc}\left(\pi k D(\psi)\right) e^{-j\pi k(2\beta-1)D(\psi)} \operatorname{rect}\left(\frac{\psi}{2}\right), k \ne 0, \quad (27б)$$

где $\operatorname{sinc}(z) = \sin(z)/z$. Стационарная компонента равна

$$F_\beta^0(\psi) = D(\psi)\operatorname{rect}\left(0{,}5\psi\right) + u(\psi - 1), \quad (28)$$

то есть совпадает с функцией распределения равномерного закона на отрезке $[-1, 1]$. Непосредственное интегрирование (19) приводит к эквивалентной записи компонент (27) через комплексные экспоненты:

$$F_\beta^k(\psi) = \frac{j\left[e^{-j2\pi k\beta D(\psi)} - e^{j2\pi k(1-\beta)D(\psi)}\right]}{2\pi k} \operatorname{rect}\left(0{,}5\psi\right), k \ne 0, \quad (29)$$

совпадение которой с (27) подтверждает согласованность выражений (19) и (27). Из (29) непосредственно следует, что все компоненты с $k \ne 0$ обращаются в нуль на обеих границах носителя $\psi = \pm 1$.

Для пилообразного сигнала с мгновенным обратным ходом и для симметричного треугольного сигнала из (29) и (27) получаем соответственно

$$F_1^k(\psi) = \frac{j}{2\pi k}\left[(-1)^k e^{-j\pi k\psi} - 1\right] \operatorname{rect}\left(0{,}5\psi\right), \quad (30)$$

$$F_{1/2}^k(\psi) = \frac{\sin\left(\pi k D(\psi)\right)}{\pi k} \operatorname{rect}\left(0{,}5\psi\right). \quad (31)$$

Модули компонент ПИФ для $k = 0, \ldots, 4$ представлены на рисунке 3.

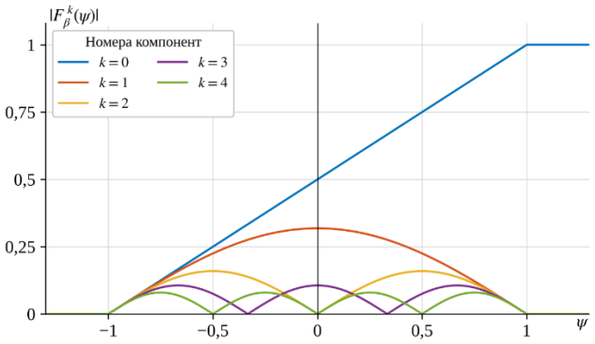


Рис. 3. Модули компонент ряда Фурье переменной индикаторной функции, одинаковые для всех $\beta \in (0, 1]$

Важным следствием (27) является то, что параметр β входит в компоненты ПИФ только через фазовый множитель, а их модуль от β не зависит:

$$\left|F_\beta^k(\psi)\right| = D(\psi)\left|\operatorname{sinc}(\pi k D(\psi))\operatorname{rect}\left(0{,}5\psi\right)\right|, k \ne 0. \quad (32)$$

Отсюда следует оценка

$$\left|F_\beta^k(\psi)\right| \le \frac{1}{\pi|k|}, \quad k \ne 0, \quad (33)$$

которая достигается при любом $k \ne 0$ и совпадает с оценкой, полученной в [7] для гармонического сигнала. Модуль k-й компоненты обращается в нуль внутри носителя в $|k| - 1$ точках $\psi = 2n/|k| - 1$, $n = 1, \ldots, |k| - 1$.

Выражения (27) и (29) были сопоставлены с результатами прямого численного усреднения (8) по периоду сигнала, выполненного методом средних прямоугольников с $N = 2\times10^6$ узлами на период, для $\beta \in \{0{,}25; 0{,}5; 0{,}7; 1\}$, $k \in \{1, 2, 3, 5\}$ и случайно выбранных значений $\psi \in (-1, 1)$. Максимальное абсолютное расхождение не превысило 5×10^{-7}, что соответствует шагу сетки $1/N$. Согласованность выражения (19) с ними обеспечивается соотношением (9).

3 Обсуждение результатов

Для сопоставления с [7] перенесём начало отсчёта гармонического сигнала в точку минимума, то есть рассмотрим сигнал $y(t) = -A_x\cos(2\pi\nu_x t)$. Он получается из $x(t) = A_x\cos(2\pi\nu_x t)$ сдвигом на половину периода, поэтому согласно (11) его компоненты отличаются от (12) и (13) множителем $(-1)^k$. Стационарная компонента ПИФ гармонического сигнала и полиномы Чебышёва на отрезке $[-1, 1]$ связаны соотношениями

$$F_{\cos}^0(\psi) = 1 - \frac{\arccos\psi}{\pi}, \quad T_k(\psi) = (-1)^k \cos\left(\pi k F_{\cos}^0(\psi)\right), \; |\psi| \le 1. \quad (34)$$

С их учётом компоненты гармонического сигнала с началом отсчёта в минимуме и компоненты симметричного треугольного сигнала (22), (31) оказываются записаны в одной и той же форме:

$$F^k(\psi) = F^0(\psi)\operatorname{sinc}\left(\pi k F^0(\psi)\right), \quad |\psi| < 1, \qquad (35а)$$

$$f^k(\psi) = f^0(\psi)\cos\left(\pi k F^0(\psi)\right), \quad |\psi| < 1. \qquad (35б)$$

где для треугольного сигнала $F^0(\psi) = D(\psi)$, $f^0(\psi) = 1/2$, а для гармонического $F^0(\psi) = F^0\cos(\psi)$, $f^0(\psi) = \pi^{-1}(1-\psi^2)^{-1/2}$. Причина этого совпадения состоит в том, что оба сигнала симметричны относительно точки минимума и имеют на периоде по одному максимуму и минимуму. Поэтому при любом пороге множество $\{t: x(t) \le \xi\}$ на периоде является одним интервалом с центром в точке минимума, длительность которого определяется только стационарной компонентой F^0. Различие между двумя сигналами сводится к виду $F^0(\psi)$: линейному для треугольного сигнала и по закону арккосинуса для гармонического. Дальнейшее обобщение этого наблюдения на более широкие классы сигналов выходит за рамки настоящей работы.

Основные свойства компонент для трёх сигналов сведены в таблицу 1.

Выражение (19) имеет простой смысл: k-я компонента РВЗ складывается из двух слагаемых, соответствующих пересечению порога на прямом и на обратном ходе. Веса рассматриваемых слагаемых прямо пропорциональны длительностям соответствующих участков, то есть β и $1-\beta$, а их фазы определяются моментами пересечения порога (16). Разность фаз $2\pi k D(\psi)$ изменяется с порогом, и модуль компоненты (23) испытывает чередование максимумов и минимумов, аналогичное интерференции двух колебаний с неравными амплитудами.

Таблица 1

Свойства компонент РВЗ и ПИФ при выборе начала отсчёта времени в точке минимума сигнала

Свойство	**Гармонический сигнал**	**Треугольный сигнал, β =1/2**	**Пилообразный сигнал, β = 1**
ЧВП $f^0(\psi)$	$\pi^{-1}(1-\psi^2)^{-1/2}$	1/2	1/2
Поведение ЧВП при $\|\psi\|\to 1$	неограниченно возрастает	ограничена	ограничена
Особенность сигнала	$x'(t) = 0$ в экстремумах	изломы в экстремумах	разрыв
Компоненты РВЗ $f^k(\psi)$	$f^0(\psi)\times$ $\times\cos(\pi k F^0(\psi))$	$0{,}5\cos(\pi k D(\psi))$	$0{,}5(-1)^k e^{-j\pi k\psi}$
Значения компонент РВЗ	вещественные	вещественные	комплексные
Мажорантное свойство	$\|f^k\| \le f^0(\psi)$	$\|f^k\| \le f^0(\psi)$	$\|f^k\| = f^0(\psi)$
Компоненты ПИФ $F^k(\psi)$, $k\neq 0$	$F^0(\psi)\times$ $\times\operatorname{sinc}(\pi k F^0(\psi))$	$D(\psi)\times$ $\times\operatorname{sinc}(\pi k D(\psi))$	$j/(2\pi k)\times$ $\times[(-1)^k e^{-j\pi k\psi}-1]$
Верхняя граница $\|F^k(\psi)\|$	$1/(\pi\|k\|)$	$1/(\pi\|k\|)$	$1/(\pi\|k\|)$

С этой точки зрения становится понятным, почему мажорантное неравенство (24) для пилообразного сигнала с мгновенным обратным ходом обращается в равенство: каждое значение порога пересекается на периоде однократно, в однозначно определённый момент времени, и интерферировать нечему. Для симметричного треугольного сигнала, напротив, вклады равны по величине, и интерференция приводит к полному гашению компонент в точках $\cos(\pi k D(\psi)) = 0$. Гармонический сигнал также пересекает каждый уровень дважды за период, и осциллирующий характер полиномов Чебышёва в (12) отражает тот же механизм. Таким образом, согласно (10) отношение $|f_x^k(\xi)| \big/ f_x^0(\xi)$ равно модулю взвешенного среднего фазовых множителей $\exp(-j2\pi k \nu_x t_m(\xi))$ по всем моментам пересечения порога. Оно равно единице, когда k-кратные фазы этих моментов совпадают; для сигнала с единственным пересечением на периоде это выполняется при любом k.

Три рассматриваемых сигнала различаются поведением в особых точках. У гармонического сигнала производная обращается в нуль в точках экстремумов, вследствие чего его ЧВП неограниченно возрастает при $|\psi|\to 1$. У треугольного сигнала в точках экстремумов имеются изломы, но односторонние производные отличны от нуля, поэтому ЧВП (20) остаётся ограниченной на всём носителе, а при $\psi=\pm 1$ значения компонент (19) определяются односторонними пределами.

У пилообразного сигнала с мгновенным обратным ходом в точках $t = nT_x$ имеется разрыв, и рабочая формула (10) требует истолкования величины $1/|x'(t_m)|$ в точке разрыва. Семейство (14) позволяет получить это истолкование предельным переходом. Вклад обратного хода в (10) имеет вес $1/(T_x|x'(t_2)|) = (1-\beta)/(2A_x)$, который стремится к нулю при $\beta \to 1$, а выражение (19) при этом равномерно по ψ сходится к (21). Аналогично выражение (27) непрерывно зависит от β и в пределе даёт (30). Следовательно, в точке разрыва величину $1/|x'(t_m)|$ следует полагать равной нулю, то есть разрыв не вносит вклада в компоненты РВЗ и в ЧВП. Этот результат согласуется с тем, что время пребывания сигнала на вертикальном участке графика имеет нулевую меру Лебега.

Сигнал с параметром $1-\beta$ получается из сигнала с параметром β обращением времени: $x_{1-\beta}(t) = x_\beta(-t)$. Для вещественного сигнала обращение времени приводит к комплексному сопряжению коэффициентов Фурье, и непосредственно из (19) и (29) при $0 < \beta < 1$ следует

$$f_{1-\beta}^k(\psi) = \left[f_\beta^k(\psi)\right]^*, \quad F_{1-\beta}^k(\psi) = \left[F_\beta^k(\psi)\right]^*. \qquad (36)$$

Поэтому достаточно рассматривать значения $\beta \in [1/2, 1]$. Симметричный треугольный сигнал инвариантен к обращению времени, и вещественность его компонент (22) и (31) является прямым следствием (36).

Зафиксируем порог ξ и рассмотрим ПИФ (4) как функцию времени:

$$y_\xi(t) = \mathcal{I}_x(t,\xi) = u\left(\xi - x(t)\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} F_x^k(\xi) e^{j2\pi k \nu_x t}. \qquad (37)$$

Сигнал $y_\xi(t)$ является выходным сигналом идеального компаратора, сравнивающего опорный сигнал $x(t)$ с постоянным уровнем ξ. Именно так формируется сигнал широтно-импульсной модуляции: пилообразный или треугольный опорный сигнал сравнивается с модулирующим напряжением, а результатом является последовательность

прямоугольных импульсов, длительность которых зависит от уровня модулирующего напряжения [11]. Таким образом, компоненты ПИФ $F_x^k(\xi)$ представляют собой комплексные амплитуды гармоник сигнала ШИМ как функции уровня модулирующего напряжения.

В этой интерпретации стационарная компонента $F_x^0(\xi) = D(\xi/A_x)$, $|\xi| \le A_x$ есть постоянная составляющая сигнала ШИМ, равная его коэффициенту заполнения, то есть статическая модуляционная характеристика модулятора. Линейная зависимость коэффициента заполнения от уровня порога для всех сигналов семейства (14) объясняет, почему в модуляторах ШИМ используются именно пилообразные и треугольные опорные сигналы. Для гармонического опорного сигнала модуляционная характеристика $F_{\cos}^0(\psi)$ нелинейна.

Параметр β определяет вид модуляции. При β = 1 передний фронт импульса закреплён в начале периода, а изменяется положение только заднего фронта, что соответствует односторонней ШИМ. При β = 1/2 оба фронта смещаются симметрично, центр импульса неподвижен, что соответствует двусторонней симметричной ШИМ. При промежуточных значениях β фронты смещаются в отношении (1 − β)/β, и центр импульса перемещается согласно (26). Инвариантность модулей (32) к параметру β в этой интерпретации отражает известный факт: амплитуды гармоник периодической последовательности прямоугольных импульсов определяются только их относительной длительностью, а положение импульсов на периоде влияет лишь на фазы гармоник [11, 12]. Зависимость фазового множителя в (27) от порога при β ≠ 1/2 означает, что при медленном изменении модулирующего напряжения гармоники сигнала несимметричной (в частности, односторонней) ШИМ приобретают дополнительную фазовую модуляцию, отсутствующую при двусторонней симметричной ШИМ.

Компоненты РВЗ в этой интерпретации, согласно (9), являются производными комплексных амплитуд гармоник по уровню модулирующего напряжения, то есть характеризуют их чувствительность к этому уровню. В частности, стационарная компонента $f_x^0(\xi) = 1/(2A_x)$ равна крутизне модуляционной характеристики. Тем самым частно-временные характеристики пилообразного сигнала получают непосредственный радиотехнический смысл, а аппарат РВЗ и ПИФ может использоваться для анализа спектрального состава выходного сигнала компаратора при опорном сигнале произвольной формы.

4 Заключение

В работе получены явные аналитические выражения компонент рядов Фурье распределения «время-значение» и переменной индикаторной функции для однопараметрического семейства пилообразных сигналов с конечной длительностью обратного хода, включающего пилообразный сигнал с мгновенным обратным ходом и симметричный треугольный сигнал. Нормированные компоненты, как и для гармонического сигнала, не зависят от амплитуды и частоты сигнала и определяются только параметром формы, равным доле периода, приходящейся на прямой ход.

Показано, что частно-временная плотность всех сигналов семейства равномерна, и форма сигнала проявляется только в компонентах на ненулевых циклических частотах. Модули компонент переменной индикаторной функции не зависят от параметра формы, который входит лишь в их фазовые множители, а верхняя граница модулей совпадает с границей, найденной ранее для гармонического сигнала. Предложена интерпретация компонент распределения «время-значение» как результата интерференции вкладов прямого и обратного хода; для пилообразного сигнала с мгновенным обратным ходом их модули совпадают со стационарной компонентой при всех значениях порога. Предельный переход по параметру формы обосновывает правило, согласно которому точка разрыва сигнала не вносит вклада в частно-временную плотность и в компоненты распределения «время-значение».

Корректность полученных выражений подтверждена сравнением с результатами прямого численного усреднения по периоду сигнала. Сопоставление с гармоническим сигналом показало, что компоненты симметричного треугольного и гармонического сигналов при начале отсчёта в точке минимума выражаются через стационарную компоненту по одной и той же формуле. Предложена интерпретация переменной индикаторной функции как выходного сигнала компаратора, при которой её компоненты являются комплексными амплитудами гармоник сигнала широтно-импульсной модуляции, а стационарная компонента совпадает со статической модуляционной характеристикой.

Полученные выражения могут служить эталонными при исследовании точности методов оценивания частно-временных характеристик, в том числе метода, основанного на кусочно-линейной интерполяции [8], поскольку рассмотренные сигналы сами являются кусочно-линейными. Дальнейшее развитие работы может быть связано с анализом пилообразных сигналов со случайными искажениями формы и с переходом к частно-временным характеристикам второго порядка.

Финансовая поддержка

Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского научного фонда № 25-21-00281, https://rscf.ru/project/25-21-00281/ “Развитие теории и методов обработки нестационарных случайных процессов на основе частно-временного анализа”.

Литература

1. *Napolitano A.* Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. Academic Press, Elsevier, 2019. 626 p. DOI: 10.1016/C2017-0-04240-4.

2. *Gardner W. A.* Statistical spectral analysis: A non-probabilistic theory. Prentice Hall, 1988. 591 p.

3. *Gardner W. A., Brown W. A.* Fraction-of-time probability for time-series that exhibit cyclostationarity // Signal Processing. 1991. Vol. 23, no. 3. P. 273–292. DOI: 10.1016/0165-1684(91)90005-4.

4. *Leśkow J., Napolitano A.* Foundations of the functional approach for signal analysis // Signal Processing. 2006. Vol. 86, no. 12. P. 3796–3825. DOI: 10.1016/j.sigpro.2006.03.028.

5. *Napolitano A., Gardner W. A.* Fraction-of-Time Probability: Advancing Beyond the Need for Stationarity and Ergodicity Assumptions // IEEE Access. 2022. Vol. 10. P. 34591–34612. DOI: 10.1109/ACCESS.2022.3162620.

6. *Gardner W. A.* Transitioning away from stochastic process models // Journal of Sound and Vibration. 2023. Vol. 565. Article 117871. DOI: 10.1016/j.jsv.2023.117871.

7. *Шевгунов Т. Я.* Синтез явных аналитических формул вероятностных моделей сигналов при использовании частно-временного подхода // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2022. Т. 16, № 11. С. 21–29. DOI: 10.36724/2072-8735-2022-16-11-21-29.

8. *Шевгунов Т. Я.* Метод оценки частно-временной плотности вероятности цифрового сигнала с использованием линейной интерполяции // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2024. Т. 18, № 7. С. 4–12. DOI: 10.36724/2072-8735-2024-18-7-4-12.

9. *Shevgunov T., Napolitano A.* Fraction-of-Time Density Estimation Based on Linear Interpolation of Time Series // 2021 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. Moscow, 2021. P. 1–4. DOI: 10.1109/IEEECONF51389.2021.9415991.

10. *Dehay D., Leśkow J., Napolitano A., Shevgunov T.* Cyclic Detectors in the Fraction-of-Time Probability Framework // Inventions. 2023. Vol. 8, no. 6. Article 152. DOI: 10.3390/inventions8060152.

11. *Holmes D. G., Lipo T. A.* Pulse Width Modulation for Power Converters: Principles and Practice. Wiley-IEEE Press, 2003. 744 p. DOI: 10.1109/9780470546284.

12. *Lathi B. P., Green R. A.* Linear Systems and Signals. 3rd ed. New York: Oxford University Press, 2018. 988 p.

13. *Miao H., Zhang F., Tao R.* A general fraction-of-time probability framework for chirp cyclostationary signals // Signal Processing. 2021. Vol. 179. Article 107820. DOI: 10.1016/j.sigpro.2020.107820.

14. *Шевгунов Т. Я., Ефимов Е. Н., Гущина О. А., Вавилова Ж. А.* Частно-временное описание радиотехнических сигналов на основе распределения «время–значение» // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2026. № 2. С. 224–231.

15. *Шевгунов Т. Я., Ефимов Е. Н., Гущина О. А.* Аналитическое представление частно-временных характеристик циклостационарного сигнала с амплитудно-импульсной модуляцией // Радиотехника и электроника. 2026. № 10 (в печати).

16. *Shevgunov T.* Analytical Representation of Fraction-of-Time Density with Application to Harmonic Signals // 15th Computer Science On-line Conference 2026. Lecture Notes in Networks and Systems. Vol. 2229. Cham: Springer, 2026. P. 277–287. DOI: 10.1007/978-3-032-38812-4_23.

17. *Шевгунов Т. Я.* Метод формирующего оператора для моделирования циклостационарных случайных процессов // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2021. Т. 15, № 8. С. 4–12. DOI: 10.36724/2072-8735-2021-15-8-4-12.

18. *Шевгунов Т. Я.* Алгоритм оценки спектральной корреляционной функции с использованием двумерного быстрого преобразования Фурье // Радиотехника и электроника. 2023. Т. 68, № 8. С. 782–789. DOI: 10.31857/S0033849423080119.

19. *Shevgunov T., Efimov E., Guschina O.* Estimation of a Spectral Correlation Function Using a Time-Smoothing Cyclic Periodogram and FFT Interpolation – 2N-FFT Algorithm // Sensors. 2023. Vol. 23, no. 1. Article 215. DOI: 10.3390/s23010215.

20. *Shevgunov T.* On Non-Symmetric Forms of Time-Varying Autocorrelation Function in the Analysis of Cyclostationary Processes // 2024 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications. Moscow, 2024. P. 1–5. DOI: 10.1109/IEEECONF60226.2024.10496717.

21. *Шевгунов Т. Я., Гущина О. А.* Использование двумерного преобразования Фурье для оценки спектральной корреляционной функции // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2021. Т. 15, № 11. С. 54–60. DOI: 10.36724/2072-8735-2021-15-11-54-60.

22. *Shevgunov T., Guschina O., Kuznetsov Y.* Cyclostationary Approach to the Analysis of the Power in Electric Circuits under Periodic Excitations // Applied Sciences. 2021. Vol. 11, no. 20. Article 9711. DOI: 10.3390/app11209711.

23. *Шевгунов Т. Я.* Алгоритм обнаружения неподвижного человека на основе циклических признаков сигналов дыхания // Радиотехника. 2025. Т. 88, № 1. С. 61–74. DOI: 10.18127/j00338486-202501-05.

24. *Mason J. C., Handscomb D. C.* Chebyshev Polynomials. Boca Raton: Chapman and Hall/CRC, 2002. 360 p. DOI: 10.1201/9781420036114.

ANALYTICAL EXPRESSIONS OF FRACTION-OF-TIME CHARACTERISTICS OF SAWTOOTH WAVEFORMS

Timofey Ya. Shevgunov, *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia,* ***shevgunov@gmail.com***
Evgeny N. Efimov, *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia,* ***omegatype@gmail.com***
Oksana A. Guschina, *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia,* ***guschinaoksana@gmail.com***
Zhanna A. Vavilova, *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia,* ***zhanke@bk.ru***

Abstract

The paper continues the development of the fraction-of-time (FOT) approach, which describes the statistical properties of a signal on the basis of its single realization without invoking the ergodicity hypothesis. Explicit expressions for the Fourier series coefficients of the time-value distribution (TVD) and the time-varying indicator function (TVIF) were previously obtained for a harmonic signal. In the present paper, the same problem is solved for a one-parameter family of periodic sawtooth signals with finite flyback time, which includes the sawtooth signal with instantaneous flyback and the symmetric triangular signal as particular cases. The parameter of the family is the fraction of the period occupied by the forward sweep. Explicit expressions for the TVD and TVIF components are derived as functions of the threshold variable. It is shown that the FOT density of every signal in the family is uniform and does not depend on the parameter, whereas the signal shape is determined by the components at nonzero cyclic frequencies. The magnitudes of the TVIF components are shown to be invariant with respect to the family parameter, which enters only their phase factors. The TVD components are interpreted as the result of interference between the contributions of the forward sweep and the flyback; for the sawtooth signal with instantaneous flyback, the majorant inequality relating the nonstationary components to the stationary one turns into an equality. A passage to the limit in the family parameter justifies the rule for handling a signal discontinuity in the explicit form of the FOT density. The obtained expressions are validated by direct numerical averaging over the signal period. The results are compared with those for the harmonic signal, and the TVIF is interpreted as a pulse-width modulated signal produced by a comparator.

Keywords:. *cyclostationarity, fraction-of-time analysis, time-value distribution, time-varying indicator function, sawtooth signal, triangular signal, pulse-width modulation*

References

[1] A. Napolitano, Cyclostationary Processes and Time Series: Theory, Applications, and Generalizations. London, U.K.: Academic Press, 2019, doi: 10.1016/C2017-0-04240-4.
[2] W. A. Gardner, Statistical Spectral Analysis: A Nonprobabilistic Theory. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall, 1988.
[3] W. A. Gardner and W. A. Brown, "Fraction-of-time probability for time-series that exhibit cyclostationarity," *Signal Process*., 1991, vol. 23, no. 3, pp. 273-292, doi: 10.1016/0165-1684(91)90005-4.
[4] J. Le?kow and A. Napolitano, "Foundations of the functional approach for signal analysis," *Signal Process*., 2006, vol. 86, no. 12, pp. 3796-3825, doi: 10.1016/j.sigpro.2006.03.028.
[5] A. Napolitano and W. A. Gardner, "Fraction-of-time probability: Advancing beyond the need for stationarity and ergodicity assumptions," *IEEE Access,* 2022, vol. 10, pp. 34591-34612, doi: 10.1109/ACCESS.2022.3162620.
[6] W. A. Gardner, "Transitioning away from stochastic process models," *J. Sound Vib*., 2023, vol. 565, Art. no. 117871, doi: 10.1016/j.jsv.2023.117871.
[7] T. Ya. Shevgunov, "The synthesis of explicit analytical formulae for the probabilistic models of signals using fraction-of-time approach," *T-Comm*, 2022, vol. 16, no. 11, pp. 21-29, doi: 10.36724/2072-8735-2022-16-11-21-29. (in Russian)
[8] T. Ya. Shevgunov, "A method for estimating the fraction-of-time probability density of a digital signal using linear interpolation," *T-Comm*, 2024, vol. 18, no. 7, pp. 4-12, doi: 10.36724/2072-8735-2024-18-7-4-12. (in Russian)
[9] T. Shevgunov and A. Napolitano, "Fraction-of-time density estimation based on linear interpolation of time series," in *Proc. 2021 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications*, Moscow, Russia, 2021, pp. 1-4, doi: 10.1109/IEEECONF51389.2021.9415991.
[10] D. Dehay, J. Le?kow, A. Napolitano, and T. Shevgunov, "Cyclic detectors in the fraction-of-time probability framework," *Inventions*, 2023, vol. 8, no. 6, Art. no. 152, doi: 10.3390/inventions8060152.
[11] D. G. Holmes and T. A. Lipo, Pulse Width Modulation for Power Converters: Principles and Practice. Hoboken, NJ, USA: Wiley-IEEE Press, 2003, doi: 10.1109/9780470546284.
[12] B. P. Lathi and R. A. Green, Linear Systems and Signals, 3rd ed. New York, NY, USA: Oxford University Press, 2018.
[13] H. Miao, F. Zhang, and R. Tao, "A general fraction-of-time probability framework for chirp cyclostationary signals," *Signal Process*., 2021, vol. 179, Art. no. 107820, doi: 10.1016/j.sigpro.2020.107820.
[14] T. Ya. Shevgunov, E. N. Efimov, O. A. Guschina, and Zh. A. Vavilova, "Fraction-of-time description of radio engineering signals based on the time-value distribution," *Russ. Aeronaut*., 2026, vol. 69, pp. 512-519. doi: 10.3103/S1068799826020273
[15] T. Ya. Shevgunov, E. N. Efimov, and O. A. Guschina, "Analytical representation of fraction-of-time characteristics of a cyclostationary signal with pulse-amplitude modulation," *J. Commun. Technol. Electron*., 2026, no. 10, in press.
[16] T. Shevgunov, "Analytical representation of fraction-of-time density with application to harmonic signals," in *Proc. 15th Computer Science On-line Conf. (CSOC 2026), Lecture Notes in Networks and Systems*, vol. 2229. Cham, Switzerland: Springer, 2026, pp. 277-287, doi: 10.1007/978-3-032-38812-4_23.
[17] T. Ya. Shevgunov, "Shaping operator technique for modelling cyclostationary random processes," *T-Comm*, 2021, vol. 15, no. 8, pp. 4-12, doi: 10.36724/2072-8735-2021-15-8-4-12. (in Russian)
[18] T. Ya. Shevgunov, "Algorithm for estimating the spectral correlation function using the 2D fast Fourier transform," *J. Commun. Technol. Electron*., 2023, vol. 68, no. 8, pp. 867-874, doi: 10.1134/S1064226923080119.
[19] T. Shevgunov, E. Efimov, and O. Guschina, "Estimation of a spectral correlation function using a time-smoothing cyclic periodogram and FFT interpolation-2N-FFT algorithm," *Sensors*, 2023, vol. 23, no. 1, Art. no. 215, doi: 10.3390/s23010215.
[20] T. Shevgunov, "On non-symmetric forms of time-varying autocorrelation function in the analysis of cyclostationary processes," in *Proc. 2024 Systems of Signals Generating and Processing in the Field of on Board Communications*, Moscow, Russia, 2024, pp. 1-5, doi: 10.1109/IEEECONF60226.2024.10496717.
[21] T. Ya. Shevgunov and O. A. Gushchina, "Using two-dimensional fast Fourier transform for estimating spectral correlation function," *T-Comm*, 2021, vol. 15, no. 11, pp. 54-60, doi: 10.36724/2072-8735-2021-15-11-54-60.
[22] T. Shevgunov, O. Guschina, and Y. Kuznetsov, "Cyclostationary approach to the analysis of the power in electric circuits under periodic excitations," *Appl. Sci.*, 2021, vol. 11, no. 20, Art. no. 9711, doi: 10.3390/app11209711.
[23] T. Ya. Shevgunov, "Algorithm for detecting a motionless person based on cyclic features of respiration signals," *Radiotekhnika*, 2025, vol. 88, no. 1, pp. 61-74, doi: 10.18127/j00338486-202501-05. (in Russian)
[24] J. C. Mason and D. C. Handscomb, Chebyshev Polynomials. Boca Raton, FL, USA: Chapman and Hall/CRC, 2002, doi: 10.1201/9781420036114.

Information about authors:

Timofey Ya. Shevgunov, *Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Theoretical Radio Engineering, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, https://orcid.org/0000-0003-1444-983X*
Evgeny N. Efimov, *Candidate of Technical Sciences, Leading Engineer, Research and Production Center RIM, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, https://orcid.org/0000-0001-5975-6513*
Oksana A. Guschina, *Engineer, Research and Production Center RIM, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, https://orcid.org/0000-0002-6349-332X*
Zhanna A. Vavilova, *Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Department of Theoretical Radio Engineering, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia, https://orcid.org/0000-0003-0958-421X*