

# МЕТОД ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ФИЛЬТРАЦИИ НА ОСНОВЕ РАЗЛОЖЕНИЯ ТАККЕРА

**Колесников Иван Николаевич,**  
Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет,  
МФТИ), Москва, Россия, [kolesnikov.in@phystech.edu](mailto:kolesnikov.in@phystech.edu)

DOI: 10.36724/2072-8735-2025-19-4-30-36

Manuscript received 06 March 2025;  
Accepted 10 April 2025

**Ляшев Владимир Александрович,**  
Московский физико-технический институт  
(национальный исследовательский университет,  
МФТИ), Москва, Россия, [lyashev.va@mipt.ru](mailto:lyashev.va@mipt.ru)

**Оседец Иван Валерьевич,**  
Российская Академия Наук;  
АНО "Институт Искусственного Интеллекта" (AIRI);  
Сколковский институт науки и технологий (Сколтех),  
Москва, Россия,  
[Oseledets@airi.net](mailto:Oseledets@airi.net), [i.oseledets@skoltech.ru](mailto:i.oseledets@skoltech.ru)

**Ключевые слова:** пространственный фильтр,  
тензор канала, мультиплексирование, разложение  
Таккера, SVD

В данной работе предложен инновационный алгоритм вычисления пространственного фильтра, основанный на использовании разложения Таккера. Узким местом, с точки зрения вычислений, в алгоритмах пространственной фильтрации традиционно является сингулярное разложение (SVD) матрицы канала, которое требует значительных ресурсов. Предложенный метод позволяет сократить вычислительные затраты за счет применения разложения Таккера, которое обеспечивает сжатие тензора канала. Благодаря этому, сингулярное разложение выполняется для матриц меньшей размерности, что существенно снижает сложность вычислений. В работе представлены аналитические оценки ранга разложения тензора, необходимые для сохранения высокой точности представления данных, а также сформулировано условие целесообразности применения предложенного подхода. Для проверки эффективности метода проведено имитационное моделирование процесса беспроводной передачи данных, результаты которого подтверждают высокую точность и надежность предложенного алгоритма. Ключевое отличие данного метода от существующих аналогов заключается в том, что все вычисления выполняются над сжатым ядром тензора, а конечный результат проецируется с использованием матриц факторизации. Это позволяет не только снизить вычислительную нагрузку, но и сохранить высокую точность обработки данных. Работа представляет значительный интерес для исследований в области обработки сигналов и беспроводной связи, предлагая новый подход к оптимизации пространственной фильтрации.

## Информация об авторах:

**Колесников Иван Николаевич**, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет, МФТИ), Московская область, г. Долгопрудный, Россия

**Ляшев Владимир Александрович**, к.т.н., доцент кафедры мультимедийных технологий и телекоммуникаций, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет, МФТИ), Московская область, г. Долгопрудный, Россия. ORCID: 0000-0002-6993-1589

**Оседец Иван Валерьевич**, д.ф.-м.н., профессор РАН, генеральный директор АО "Институт искусственного интеллекта" (AIRI), профессор, Сколковский институт науки и технологий (Сколтех), Москва, Россия. ORCID: 0000-0003-2071-2163

## Для цитирования:

Колесников И.Н., Ляшев В.А., Оседец И.В. Метод пространственной фильтрации на основе разложения Таккера // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2025. Том 19. №4. С. 30-36.

## For citation:

I.N. Kolesnikov, V.A. Lyashev, I.V. Oseledets, "Spatial filtering method based on the Tucker decomposition," T-Comm, 2025, vol. 19, no.4, pp. 30-36. (in Russian)

**Введение**

Задача увеличения пропускной способности систем связи не теряет своей актуальности [1]. Повысить скорость передачи возможно за счет переиспользования частотно-временных ресурсов и мультиплексирования пространственных потоков данных. Для реализации мультиплексирования необходим метод расчета пространственного формирующего фильтра (ПФ) [2]. Алгоритм расчета коэффициентов ПФ в большинстве случаев включает в себя сингулярное разложение (SVD). Сложность данного разложения –  $O(N^3)$  [3]. Существующие алгоритмы вычисления ПФ, можно условно разделить на две группы:

- Двумерные. Алгоритмы применяются к каждой поднесущей частоте или группе поднесущих частот независимо (удобно вычислять параллельно);
- Многомерные (тензорные). Используют свойства многомерности канала, в размерностях пространства, времени и частоты.

Обзор первой группы алгоритмов представлен в [2]. Авторы рассмотрели наиболее востребованные способы вычисления ПФ и произвели расчет вычислительной сложности каждого. Классическим алгоритмом пространственного мультиплексирования является метод Zero Forcing (ZF), в основе которого лежит вычисление псевдообратной матрицы канала, это существенный недостаток данного подхода с точки зрения вычислительной сложности. Наиболее производительные алгоритмы вычисления весовых коэффициентов ПФ - нелинейные алгоритмы, например алгоритм возбуждения векторов (vector-perturbation technique) [4].

Данный алгоритм превосходит ZF, но при этом трудно векторизуем и неприменим на векторных вычислителях. Сложность алгоритмов варьируется от  $O(N^2)$  до  $O(N^6)$ , причем все алгоритмы, сложность которых  $O(N^2)$ , являются итеративными [5], т.е. на самом деле количество вычислений минимум  $O(iN^2)$ , где  $i$  – количество итераций. При малом количестве итераций не удается в достаточной степени согласоваться с пространственным каналом, что снижает производительность системы связи из-за появления интерференции между пространственными каналами 5.

Главным недостатком двумерных алгоритмов вычисления ПФ, является зависимость их сложности от количества поднесущих для передачи. Действительно, ПФ необходимо вычислять для каждой поднесущей или группы поднесущих частот. Такой алгоритм будем рассматривать в качестве опорного алгоритма, с которым будет выполнено сравнение [6]. Данный метод дает наилучшее согласование с пространственным каналом в случае хорошей оценки матрицы канала, при этом сложность вычисления данного ПФ  $20N^3$ .

К алгоритмам второй группы можно отнести многомерные фильтры из [7-9]. Алгоритм в [7] основан на тензорном вычислителе для 8x8x8 mmWave MIMO. Он позволяет получить схожее с ZF качество работы, при этом позволяет быстро интегрироваться на программируемую логику или векторные вычислители. Но в случае наличия большего кол-ва антенн скорость работы алгоритма сильно снижается по сравнению с ZF. В [8] приводится описание сразу нескольких тензорных ПФ. Это тензорный ZF и тензорный согласованный фильтр. Главный недостаток этих алгоритмов – большой буфер для накопления статистики во времени, поэтому его трудоемко

применять для вычисления ПФ в режиме реального времени.

В статье [9] приводится алгоритм для вычисления ПФ, с помощью методов машинного обучения, однако для применения на практике потребуется развитие вычислительной базы, так как необходимо существенное количество исходных данных для обучения, и низкая скорость вычисления ПФ, обусловленная большой сложностью.

Алгоритм, описанный в [9] имеет ряд положительных моментов, например он позволяет получить оценку ПФ исходя из слепой оценки канала. Предлагаемый ПФ моделируется как тензор третьего порядка и разлагается как функция матрицы выбора антенны, которая определяет выбор потоков данных и передающих антенн, а также ортогональной кодовой матрицы. Данный алгоритм пригоден только для MIMO систем с обратной связью и уступает по производительности методам, использующим оценку канальной матрицы.

В данной работе предлагается использовать разложение Таккера для снижения размерности тензора канала. Как будет показано ниже, сложность предложенного метода существенно меньше, чем сложность всех рассмотренных алгоритмов.

*Операции и обозначения*

$\mathcal{A}$  – прописные большие буквы, трехмерный тензор;  $(\cdot)^H$  – эрмитово сопряжение. В случае если  $(\cdot)$  – тензор, то операция сопряжения применяется к каждому слою тензора по 3-ей размерности. Пример  $\mathcal{A}^H$  означает:  $(\mathcal{A}^H)_{:, :, i} = (\mathcal{A}_{:, :, i})^H$ .

*Тензорное умножение*

В данной статье рассматривается только частный вид умножения (трехмерный тензор на трехмерный тензор и трехмерный тензор на матрицу)

Пусть даны два тензора  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2 \times N_3}$  и  $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{N_2 \times N_4 \times N_3}$ , тогда их произведение:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \circ \mathcal{B} &= \mathcal{C} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_4 \times N_3}; \\ \mathcal{C}_{:, :, i} &= \mathcal{A}_{:, :, i} \mathcal{B}_{:, :, i}, i = 1 \dots N_3 \end{aligned} \quad (1)$$

есть ничто иное как тензор, каждый слой которого это произведение соответствующих слоев тензоров  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$ .

Пусть дан тензор  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2 \times N_3}$  и матрица  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{N_4 \times N_2}$ , тогда их произведение:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \times_3 \mathbf{B} &= \mathcal{C} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_4 \times N_3} \\ \mathcal{C}_{:, :, i} &= \mathbf{B} \mathcal{A}_{:, :, i}, i = 1 \dots N_3 \end{aligned} \quad (2)$$

Есть тензор, каждый слой которого это произведение соответствующего слоя тензора  $\mathcal{A}$  и матрицы  $\mathbf{B}$ . Символ  $\times_i$  обозначает умножение вдоль размерности  $i = [1 \dots 3]$  (в случае умножения по 3-ей размерности, символ  $\times_3$  опускается).

*Ранг тензора*

Рангом тензора  $\mathcal{A}$  по размерности  $n$  назовем наибольший из рангов каждого слоя тензора  $\mathcal{A}$ . Например, ранг по третьей размерности:

$$r_3 = \arg \max_{i=1 \dots N_3} \text{rank}(\mathcal{A}_{:, :, i}). \quad (3)$$

*Математическая модель*

Работа посвящена использованию тензорных вычислений в расчете весовых коэффициентов пространственного фильтра. Для этого необходимо ввести математическую модель ПФ и обозначить параметры сценария применения. Для пространственного мультиплексирования используется антенная решетка с  $N_{tx}$  антенными элементами на передатчике и  $N_{rx}$

антенн на приемнике. Канал между  $i$ -ой  $\in [1 \dots N_{tx}]$  передающей антенной и  $j$ -ой  $\in [1 \dots N_{rx}]$  приемной антенной обозначим комплексным коэффициентом  $h_{i,j}$ . Из этих коэффициентов можем составить матрицу канала  $\mathbf{H} \in \mathbb{C}^{N_{rx} \times N_{tx}}$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{1,1} & \dots & h_{1,N_{tx}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{N_{rx},1} & \dots & h_{N_{rx},N_{tx}} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Пусть передаваемый сигнал  $\mathbf{s} \in \mathbb{C}^{r_s \times 1}$  длинны  $r_s$  (ранг передачи – количество пространственных каналов). Тогда, после прохождения сигнала через канал, принятый сигнал можно описать уравнением:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{w}\mathbf{s} + \mathbf{n}, \quad (5)$$

где  $\mathbf{y} \in \mathbb{C}^{N_{rx} \times 1}$  – вектор принятого сигнала,  $\mathbf{n} \in \mathbb{C}^{N_{rx} \times 1}$  – аддитивный гауссов шум приемного радиотракта с дисперсией  $\sigma^2$ ,  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N_{tx} \times r_s}$  – матрица весовых коэффициентов ПФ.

Уравнение (5) справедливо для передачи на одной несущей. При использовании OFDM [10] уравнение (5) необходимо преобразовать. Пусть используем  $N_{sc}$  поднесущих частот для передачи информации. Соответствующие элементы уравнения (5) для  $i$ -ой  $\in [1 \dots N_{sc}]$  поднесущей будем обозначать соответствующим символом с индексом  $i$  (например,  $\mathbf{s}^i$  – модулированный сигнал, переданный на  $i$ -ой поднесущей). Аналогично определениям в статье [11] запишем уравнение передачи в тензорном виде:

$$\mathbf{Y} = \mathcal{H} \circ \mathbf{W}\mathbf{S} + \mathbf{N}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{Y} = [\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^{N_{sc}}] \in \mathbb{C}^{N_{rx} \times N_{sc}}$  – матрица принятого сигнала,  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{N_{rx} \times N_{tx} \times N_{sc}}$  – 3-х мерный тензор описывающий канал, причем  $\mathcal{H}_{:,i} = \mathbf{H}^i$ ,  $i = 1 \dots N_{sc}$ ,  $\mathbf{S} = [\mathbf{s}^1, \dots, \mathbf{s}^{N_{sc}}] \in \mathbb{C}^{\hat{r} \times N_{sc}}$  – матрица переданного сигнала,  $\hat{r} = \max(r_s^1, \dots, r_s^{N_{sc}})$  – наибольший ранг передачи,  $\mathbf{W} \in \mathbb{C}^{N_{tx} \times \hat{r} \times N_{sc}}$  – 3-х мерный тензор весовых коэффициентов ПФ, причем  $\mathbf{S}_{j,k} = \mathbf{W}_{i,j,k} = 0$  для  $i = 1 \dots N_{tx}, j = r_s^k + 1 \dots \hat{r}, k = 1 \dots N_{sc}$ ;  $\mathbf{N} = [\mathbf{n}^1, \dots, \mathbf{n}^{N_{sc}}] \in \mathbb{C}^{N_{rx} \times N_{sc}}$  – матрица шума, причем  $E\{\mathbf{N}^H \mathbf{N}\} = \sigma^2 \mathbf{I}$ , где  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N_{sc} \times N_{sc}}$  – единичная матрица.

Описание алгоритма

Задача ПФ обеспечить ортогональность передачи данных. Для этих целей применяется метод сингулярного разложения, который позволяет представить матрицу  $\mathbf{H}$  в виде произведения трех матриц  $\mathbf{U}, \mathbf{S}, \mathbf{V}$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H. \quad (7)$$

Здесь матрицы  $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{N_{rx} \times r_H}$  и  $\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{N_{tx} \times r_H}$  ( $r_H \leq \min(N_{rx}, N_{tx})$ ) – ранг канала, если  $r_H \geq r_s$ , то можно говорить об ортогональной пространственной передаче, тогда

$$\mathbf{U}^H \mathbf{U} = \mathbf{V}^H \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (8)$$

$\mathbf{S} \in \mathbb{C}^{r_H \times r_H}$  – диагональная матрица сингулярных чисел.

ПФ, рассчитанный с помощью такого разложения – это первые  $r_s$  столбов матрицы  $\mathbf{V}$ :

$$\mathbf{W} = \mathbf{V}_{:,1:r_s}. \quad (9)$$

Таким образом произведение матриц  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{W}$  является ортогональной матрицей (с точностью до нормы каждого столбца). Действительно,

$$\mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{H}\mathbf{V}_{:,1:r_s} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H\mathbf{V}_{:,1:r_s}. \quad (10)$$

В силу утверждения (8)

$$\mathbf{V}^H\mathbf{V}_{:,1:r_s} = \hat{\mathbf{I}}_{:,1:r_s} \in \mathbb{R}^{r_H \times r_s}, \quad (11)$$

здесь прямоугольная матрица  $\hat{\mathbf{I}}_{:,1:r_s}$  эквивалентна единичной матрице  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{r_s \times r_s}$  и дополненная нулевыми строками до размерности  $r_H \times r_s$ ,  $r_H > r_s$ .

Тогда уравнение (10) перепишем в сигнальном подпространстве размерности  $r_s$ :

$$\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^H\mathbf{V}_{:,1:r_s} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{I}}_{:,1:r_s} = \mathbf{U}_{:,1:r_s}\mathbf{S}_{1:r_s,1:r_s}. \quad (12)$$

Таким образом, произведение  $\mathbf{H}\mathbf{W}$  является произведением ортогональной и диагональной матриц, что в свою очередь является ортогональной матрицей (с точностью до нормы каждого столбца). Главным преимуществом данного алгоритма является то, что с его помощью можно рассчитать ПФ, который позволяет передать сигнал в ортогональных подпространствах (каналах). При этом операция вычисления SVD разложения является вычислительно затратной.

*Оптимизированный SVD ПФ*

Как будет показано ниже, сама по себе операция SVD имеет большую вычислительную сложность. А поскольку в алгоритме, описанном выше, нужно вычислять SVD разложение для каждой поднесущей частоты (или группы частот), встает вопрос о целесообразности использования данного алгоритма в реальных системах связи.

Одна из оптимизаций SVD ПФ заключается в том, чтобы не вычислять ПФ для каждой поднесущей. Например, можно разбить всю полосу передачи на группы (ресурс блоки), как это делается в стандартах LTE и 5G и вычислить один ПФ для каждого ресурс блока. Пусть один ресурс блок содержит  $N_{sc}^{rb}$  поднесущих, а всего  $N_{rb}$  ресурс блоков. Тогда ПФ для  $j$ -го ресурс блока ( $j \in [1 \dots N_{rb}]$ ) можно рассчитать, как:

$$\text{SVD} \left( \frac{\sum_{i=(j-1)N_{sc}^{rb}}^{jN_{sc}^{rb}} [(\mathbf{H}^i)^H \mathbf{H}^i]}{N_{sc}^{rb}} \right) = \hat{\mathbf{U}}\hat{\mathbf{S}}\hat{\mathbf{V}}^H; \quad (13)$$

$$\mathbf{W}^j = \hat{\mathbf{V}}_{:,1:r_s^j}.$$

Здесь  $r_s^j$  – ранг передачи для  $j$ -го ресурс блока (в общем случае ранг передачи для каждого ресурс блока не одинаковый). Таким образом, данный алгоритм позволяет в  $N_{sc}^{rb}$  раз снизить количество вычислений SVD разложений. При этом оптимизированный SVD ПФ имеет существенный минус – качество его работы зависит от скорости изменения канала между поднесущими частотами. Действительно, канал между  $i$ -той передающей и  $j$ -ой приемной антенной может выглядеть как показано на рисунке 1.

Интуитивно понятно, что усредненный ПФ, рассчитанный для каналов с АЧХ изображенной пунктирной линией (слабая многолучевость), покажет лучший результат, чем для каналов с АЧХ изображенной сплошной линией (сильная многолучевость). Форма канала зависит от многих факторов, таких как количество поднесущих, ширина полосы, количество преград на пути луча (многолучевость) и другие [12].

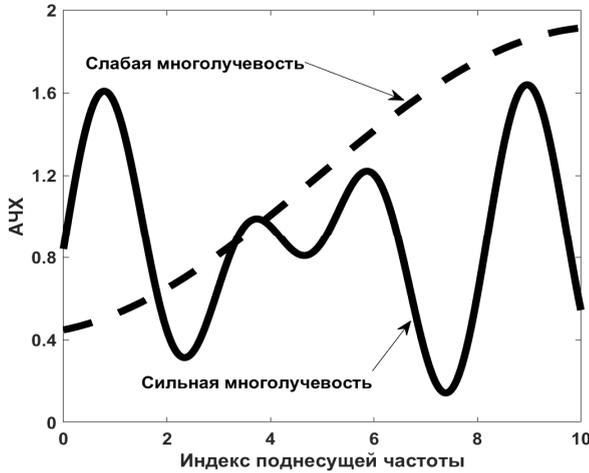


Рис. 1. Пример амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) канала между  $i$  и  $j$  антенной

*Разработанный алгоритм*

Как было сказано выше основная проблема усреднения ПФ состоит в том, что данные алгоритмы зависят от ранга канала (при этом не вычисляют его заранее). Разработанный нами алгоритм позволяет вычислить ПФ исходя из знания ранга канала.

Рассмотрим разложение Таккера. Для примера возьмем тензор канала  $\mathcal{H}$ . Тогда:

$$\mathcal{H} = \mathcal{h} \times_1 \mathbf{F}_{tx} \times_2 \mathbf{F}_{rx} \times_3 \mathbf{F}_{sc} = \hat{\mathcal{h}} \times_1 \mathbf{F}_{tx} \times_2 \mathbf{F}_{rx}. \quad (14)$$

Иными словами, любой тензор может быть представлен в виде произведения тензорного ядра  $\mathcal{h} \in \mathbb{C}^{r_{rx} \times r_{tx} \times r_{sc}}$ ,  $r_{rx} \leq N_{rx}$ ,  $r_{tx} \leq N_{tx}$ ,  $r_{sc} \leq N_{sc}$  – ранги тензора по 1-ой, 2-ой и 3-ей размерности соответственно и матриц факторизации  $\mathbf{F}_{sc} \in \mathbb{C}^{N_{sc} \times r_{sc}}$ ,  $\mathbf{F}_{rx} \in \mathbb{C}^{N_{rx} \times r_{rx}}$ ,  $\mathbf{F}_{tx} \in \mathbb{C}^{N_{tx} \times r_{tx}}$ , причем как будет показано ниже

$$\mathbf{F}_{rx} \mathbf{F}_{rx}^H = \mathbf{F}_{tx} \mathbf{F}_{tx}^H = \mathbf{F}_{sc} \mathbf{F}_{sc}^H = \mathbf{I}. \quad (15)$$

Используя операцию развертывания тензора [13], получим развертку тензора  $\mathcal{H}$  по  $i$ -той размерности:

$$\mathcal{H} \rightarrow_i \mathbf{H}_{\{i\}} \in \mathbb{C}^{r_i \times r_1 \dots r_{i-1} r_{i+1} \dots r_n}, n \leq 3. \quad (16)$$

Причем наглядно представить развернутый тензор можно как конкатенация соответствующих слоев:

$$\mathbf{H}_{\{1\}} = [\mathcal{H}_{1,\dots}, \mathcal{H}_{2,\dots}, \dots, \mathcal{H}_{r_1-1,\dots}, \mathcal{H}_{r_1,\dots}]. \quad (17)$$

Вычислим сингулярное разложение матрицы  $\mathbf{H}_{\{1\}}$ :

$$\mathbf{H}_{\{1\}} \rightarrow \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^H \quad (18)$$

Возьмем первые  $r_1$  столбцов матрицы  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{U}_{1:r_1,\dots} \quad (19)$$

Вычислим произведение матрицы  $\mathbf{F}_1^H$  и  $\mathbf{H}_{\{1\}}$ :

$$\hat{\mathbf{H}}_{\{1\}} = \mathbf{F}_1^H \mathbf{H}_{\{1\}}. \quad (20)$$

Затем, свернем полученную матрицу обратно в тензор размерности  $r_1 \times N_2 \times N_3$ :

$$\hat{\mathbf{H}}_{\{1\}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}} \in \mathbb{C}^{r_1 \times N_2 \times N_3}. \quad (21)$$

Повторим операции (17)-(21) для размерностей 2 и 3, получив тем самым сжатое тензорное ядро и три ортогональные матрицы факторизации  $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$

Пусть мы вычислили разложение Таккера для тензора  $\mathcal{H}$  по 1-ой и 2-ой размерностям (размерности  $t_x$  и  $r_x$ )

$$\mathcal{H} = \hat{\mathcal{h}} \times_1 \mathbf{F}_{tx} \times_2 \mathbf{F}_{rx}. \quad (22)$$

Вычислим корреляционный тензор  $\mathcal{R}_{\mathcal{H},\mathcal{H}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mathcal{H},\mathcal{H}} &= \mathcal{H} \circ \mathcal{H}^H = \\ &= (\hat{\mathcal{h}} \times_1 \mathbf{F}_{tx} \times_2 \mathbf{F}_{rx}) \circ (\hat{\mathcal{h}} \times_1 \mathbf{F}_{tx} \times_2 \mathbf{F}_{rx})^H = \\ &= \mathbf{F}_{tx} \hat{\mathcal{h}} \mathbf{F}_{rx}^H \circ (\mathbf{F}_{tx} \hat{\mathcal{h}} \mathbf{F}_{rx}^H)^H = \\ &= \mathbf{F}_{tx} \hat{\mathcal{h}} \mathbf{F}_{rx}^H \circ \mathbf{F}_{rx} \hat{\mathcal{h}} \mathbf{F}_{tx}^H = \\ &= \mathbf{F}_{tx} \hat{\mathcal{h}} \mathbf{F}_{rx}^H \mathbf{F}_{rx} \circ \hat{\mathcal{h}} \mathbf{F}_{tx}^H = \\ &= \mathbf{F}_{tx} \hat{\mathcal{h}} \circ \hat{\mathcal{h}} \mathbf{F}_{tx}^H = \mathbf{F}_{tx} \mathcal{R}_{\hat{\mathcal{h}}\hat{\mathcal{h}}} \mathbf{F}_{tx}^H, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\mathcal{R}_{\hat{\mathcal{h}}\hat{\mathcal{h}}} = \hat{\mathcal{h}} \circ \hat{\mathcal{h}}$ . Теперь выполним SVD разложение для каждого слоя тензора  $\mathcal{R}_{\hat{\mathcal{h}}\hat{\mathcal{h}}}$  по 3 размерности (эквивалентно разложению тензора  $\mathcal{H}$  на произведение 3-х тензоров):

$$\mathcal{R}_{\hat{\mathcal{h}}\hat{\mathcal{h}}} = \mathcal{U} \circ \mathcal{S} \circ \mathcal{V}^H. \quad (24)$$

Теперь вернем тензор  $\mathcal{V}$  к исходным размерностям:

$$\mathcal{V} \mathbf{F}_{tx}^H = \bar{\mathcal{V}}. \quad (25)$$

Из полученного тензора  $\bar{\mathcal{V}}$  уже можем вычислить ПФ:

$$\mathbf{W} = \bar{\mathcal{V}}_{:,1:r,:}^H. \quad (26)$$

Таким образом, мы вычислили ПФ для каждой поднесущей при этом сделали это учитывая соседние каналы. Далее будет показано, что данный алгоритм позволяет получить сопоставимое качество работы с SVD ПФ, при этом он проще, с точки зрения арифметических операций в сравнении с SVD ПФ.

*Оценка ранга тензора*

Узким местом предложенного алгоритма является ранг тензора. Ведь если ранг тензора сопоставим с его размерностью, то вычисления разложения Таккера не имеет смысла. Для оценки ранга при разложении Таккера предлагается использовать алгоритм оценки сингулярных чисел, описанный в [14]. Данный алгоритм позволяет вычислить собственные числа, зная оценку первых двух наибольших, при этом сложность оценки  $O(N^2)$ . Формула для вычисления оценки собственных чисел эрмитовой матрицы, которой является матрица корреляции канала  $\mathbf{R} = (\mathbf{H}^i)^H \mathbf{H}^i$

$$\lambda_i = \lambda_1 i^{k-1} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} 2^{k-1} \right)^{1-i}, i = 1 \dots N,$$

где параметр  $k$  вычисляется из уравнения

$$\sum_{i=1}^N \lambda_1 i^{k-1} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} 2^{k-1} \right)^{1-i} = \text{trace}(\mathbf{R}).$$

Для оценки ранга достаточно вычислить количество собственных чисел больших по модулю чем удвоенная средне-квадратичная мощность шума. Иными словами, нужно решить уравнение относительно  $i$ :

$$\lambda_i = \lambda_1 i^{k-1} \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} 2^{k-1} \right)^{1-i} = 2\sigma^2. \quad (27)$$

В данной работе не предлагается наилучший способ решения данного уравнения, поскольку это не является ее целью. Предлагаем решать данное уравнение методом бисекции [15]. Сложность данного решения  $O(\log N)$ .

*Результаты моделирования*

В качестве системы моделирования использовалась платформа со структурой, показанной на рисунке 2.

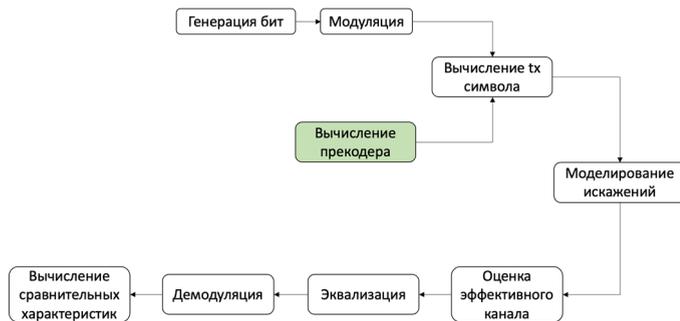


Рис. 2. Схема платформы для проведения моделирования

Здесь блоки «Генерация бит» выполняют функцию генерации псевдослучайной последовательности бит для передачи. Блок «Модуляция» модулирует последовательность бит. Модуляция – QPSK. Блок «Вычисление tx символа» производит вычисление сигнала с ПФ  $\mathbf{W}_s$  согласно выражению (5). «Моделирование искажений» имитирует прохождение сигнала через беспроводной канал, а также добавляет аддитивный Белый гауссовский шум. Модель канала *QuaDRiGa*, сценарий *Berlin NLOS* [17].

Блок «Оценка эффективного канала» вычисляет канал как:  $\mathbf{H}\mathbf{W}$ . В блоке «Эквалазация» вычисляется *Minimum Mean Square Error (MMSE)* эквалайзер и вычисляется конечное созвездие. Блок «демодуляция» моделирует процесс жесткой демодуляции QPSK символов. Наконец, блок «Вычисление сравнительных характеристик» вычисляет служебные характеристики, основная из которых вероятность битовой ошибки (Bit Error Rate, BER).

Для моделирования используем канал с  $N_{rx} = N_{tx} = N_{sc} = 1000$ . Причем данное упрощение делается только для удобства представления расчётов. Алгоритм применим и в случае  $N_{rx} \neq N_{tx} \neq N_{sc}$ .

На рисунке 3 показано сравнение качества работы предложенного алгоритма и SVD ПФ в зависимости от ранга передачи.

Можно сделать следующие выводы:

- качество работы алгоритма зависит от ранга передачи (чем выше ранг, тем лучше качество работы);
- при помощи уравнения (27) ранг тензора оценивался в промежутке [78; 82]. Что соответствует падению в качестве работы на 0,4 дБ, то есть оценка (27) является консервативной. Возможно такая оценка должна зависеть не только от дисперсии шума, но и от регуляризирующих параметров, которые зачастую применяются в современных системах связи для повышения численной стабильности алгоритмов;
- в случае корректной оценки ранга разложения можно

достичь качества работы SVD ПФ.

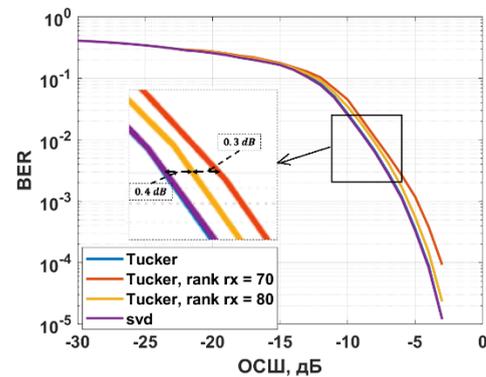


Рис. 3. BER кривые для различных алгоритмов вычисления ПФ. Голубым обозначен разработанный алгоритм (с полным рангом). Фиолетовым – SVD ПФ. Желтым и красным алгоритм Таккера, с ( $r_{tx} = 12, r_{rx} = 80$  и  $r_{tx} = 12, r_{rx} = 70$  соответственно)

Любые разложения тензоров являются алгоритмами точного представления, если не ограничивать ранг разложения. Это может служить критерием проверки алгоритма. Голубой график “Tucker” на рисунке 3 как раз является таким разложением и полностью совпадает с графиком “svd”, который является идеальным алгоритмом пространственной фильтрации при условии идеальной оценки канала, которая и формирует тензор канала.

В случае оценок канала низкого разрешения есть предположение, что выбор ранга тензора будет ограничивать уровень ошибки в расчете ПФ – это является предметом дальнейших исследований.

*Оценка сложности*

Полный расчет вычислительной сложности алгоритмов приведен в статье [11]. Здесь покажем конечную сложность (табл. 1).

Таблица 1

Вычислительная сложность алгоритмов

Название алгоритмов	Сложность	Сложность* $N_{rx} = N_{tx} = N_{sc} = N$	Численное значение $N = 1000$
SVD ПФ	$20N_{rx}^2 N_{tx} N_{sc}$	$20N^4$	$\approx 2,2 * 10^{13}$
оптимизированный SVD ПФ	$\frac{20N_{rx}^2 N_{tx} N_{sc}}{N_{rb}}$	$\frac{20N^4}{N_{rb}}$	$\approx 1,8 * 10^{12}$
Предложенный алгоритм	$20(2N_{tx} N_{rx} N_{sc} + N_{sc} N_{rx} r_{tx}) + r_{rx} r_{tx}^2 N_{sc} + 20r_{tx}^3 N_{sc} + N_{tx} r_{tx}^2 N_{sc}$	$40N^3 + 20N^2 r + 21N r^3 + N^2 r^2$	$\approx 4,3 * 10^{10}$

Из таблицы видно, что переход к тензорному представлению канала и понижению размерности системы позволило на порядок снизить вычислительную сложность. Дальнейший анализ сложности показывает область целесообразного применения метода. Очевидно, что общая сложность должна быть меньше референсного алгоритма

$$20(2N_{tx} N_{rx} N_{sc} + N_{sc} N_{rx} r_{tx}) + r_{rx} r_{tx}^2 N_{sc} + 20r_{tx}^3 N_{sc} + N_{tx} r_{tx}^2 N_{sc} < \frac{20N_{rx}^2 N_{tx} N_{sc}}{N_{rb}}$$

Однако, ранг разложения существенно влияет на сложность предложенного метода. Грубую оценку для ранга можно дать, приведя неравенство к виду:

$$r_{rx}r_{tx}^2 < 0.9N_{rx}N_{tx} \frac{N_{rx} - 2}{N_{rb}}$$

и при условии, что  $r_{rx} = r_{tx} = r$ :

$$r < \sqrt[3]{0.9N_{rx}N_{tx} \frac{N_{rx} - 2}{N_{rb}}}. \quad (28)$$

Таким образом, для тензора ранг разложения не должен превышать значение в (28). Если вернуться к оценке ранга (27), которая гарантирует достаточную точность представления и сравнить с условием целесообразности применения алгоритма (28), то можно сделать вывод, что для задач беспроводной связи выбор ранга по точности (27) всегда существенно меньше необходимого ранга представления по сложности (28).

### Заключение

В работе предложен новый метод предварительной обработки данных в системах связи с применением больших активных фазированных решеток, который основан на тензорном разложении канала на низкоразмерные компоненты и проведении дальнейших вычислений с сжатым ядром тензора. Метод существенно превосходит традиционный SVD-подход по арифметической сложности. Был разработан алгоритм вычисления весовых коэффициентов многомерного пространственного фильтра, выполнено имитационное моделирование системы связи физического уровня с применением модели канала *QuaDRiGa*.

Результаты моделирования подтверждают, что новый алгоритм обеспечивает сопоставимое качество обработки данных при гораздо меньших вычислительных затратах. Кроме того, одновременная обработка данных по нескольким измерениям способствует повышению устойчивости системы к различным помехам. Также предложен алгоритм для быстрой оценки ранга тензора, основанный на знании первых двух собственных чисел. Дальнейшим направлением разработки являются: проверка устойчивости алгоритма к внешней интерференции (помехам) и оптимизация алгоритма выбора ранга разложения в условиях таких помех и ошибок во входных данных алгоритма.

### Литература

1. Massive MIMO for Future Wireless Communication Systems: Technology and Applications / edited by Weibert Montlouis, Agbotiname

Imoize. New York: Wiley, IEEE Press, 2025. 473 p.

2. Albreem M.A., Habbash A.H.A., Abu-Hudrouss A.M., Ikki S.S., Overview of Precoding Techniques for Massive MIMO // IEEE Access, vol. 9, pp. 60764-60801, 2021, doi: 10.1109/ACCESS.2021.3073325.

3. Xiaocan Li, Shuo Wang, Yinghao Cai. Tutorial: Complexity analysis of Singular Value Decomposition and its variants. arXiv: Numerical Analysis. 2019/

4. Hochwald B.M., Peel C.B., Swindlehurst A.L. A vector-perturbation technique for near-capacity multi-antenna multiuser communication: part II: perturbation // IEEE Transactions on Communications, vol. 53, no. 3, pp. 537-544, March 2005, doi: 10.1109/TCOMM.2004.841997.

5. Song W., Chen X., Wang L., Lu X. Joint conjugate gradient and Jacobi iteration based low complexity precoding for massive MIMO systems // Proc. IEEE/CIC Int. Conf. Commun. China (ICCC), Jul. 2016, pp. 1-5.

6. Hwang Y.-T., Chen K.-T., Wu C.-K. A high throughput unified SVD/QRD precoder design for MIMO OFDM systems // 2015 IEEE International Conference on Digital Signal Processing (DSP), Singapore, 2015, pp. 1148-1151, doi: 10.1109/ICDSP.2015.7252059.

7. Wu T.-L., Shen C.-A., Huang Y.-H. Tensor-Based Hybrid Precoding Processor for  $8 \times 8 \times 8$  mmWave 3D-MIMO Systems // 2022 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS), Austin, TX, USA, 2022, pp. 2167-2171, doi: 10.1109/ISCAS48785.2022.9937331.

8. Ribeiro L.N., Schwarz S., de Almeida A.L.F., Haardt M. Low-Complexity Massive MIMO Tensor Precoding // 2020 54th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers, Pacific Grove, CA, USA, 2020, pp. 348-355, doi: 10.1109/IEEECONF51394.2020.9443492.

9. Bhogi K., Saha C., Dhillon HS. Tensor Learning-based Precoder Codebooks for FD-MIMO Systems, arXiv preprint arXiv:2106.11374, 2021.

10. Ляшев В.А. Метод дифференциально-ортогонального поиска в задаче оценки MIMO канала // Цифровая обработка сигналов. 2024. № 3. С. 71-80. EDN EQTFPP

11. Kolesnikov I., Lyashev V. Computationally Efficient Tensor-Based MIMO Precoder // 2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON), Novosibirsk, Russian Federation, 2024, pp. 1-4, doi: 10.1109/SIBIRCON63777.2024.10758516.

12. Dorokhin S., Lysov P., Lyashev V. et al. RIS-Assisted MIMO Channel Modeling with Spatially Consistent Sparsified Properties // Wireless Personal Communications. 2024. DOI 10.1007/s11277-024-10884-z. EDN KSPMHZ

13. Тьртышников Е.Е. Матричный анализ и основы алгебры. М.: МЦНМО, 2025. 493 с. ISBN 978-5-4439-1864-8.

14. Kolesnikov I., Lyashev V., Kirichenko M. Fast algorithm for estimating singular values of Hermitian matrix // 2023 31st Telecommunications Forum (TELFOR), Belgrade, Serbia, 2023, pp. 1-4, doi: 10.1109/TELFOR59449.2023.10372724

15. Локтионов И.К., Мироненко Л.П., Турупалов В.В. Численные методы. Вологда: Инфра-Инженерия, 2022. 380 с. ISBN 978-5-9729-0786-1

16. Osinsky A., Bychkov R., Trefilov M. et al. Regularization for Cholesky Decomposition in Massive MIMO Detection // IEEE Wireless Communications Letters. 2023. Vol. 12, No. 9. P. 1603-1607. DOI 10.1109/lwc.2023.3284349. EDN CEBMXQ

## SPATIAL FILTERING METHOD BASED ON THE TUCKER DECOMPOSITION

**Ivan N. Kolesnikov**, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, MIPT), Dolgoprudny, Russia, [kolesnikov.in@phystech.edu](mailto:kolesnikov.in@phystech.edu)

**Vladimir A. Lyashev**, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, MIPT), Dolgoprudny, Russia, [lyashev.va@mipt.ru](mailto:lyashev.va@mipt.ru)

**Ivan V. Oseledets**, Russian Academy of Sciences; ANO "AI RESEARCH INSTITUTE" (AIRI); Skolkovo Institute of Science and Technology (Skoltech), Moscow, Russia, [Oseledets@airi.net](mailto:Oseledets@airi.net), [i.oseledets@skoltech.ru](mailto:i.oseledets@skoltech.ru)

**Abstract**

In the paper, an algorithm based on the Tucker decomposition is proposed for computing spatial filter coefficients. The most computationally expensive part of the spatial filtering algorithm is the singular value decomposition of the channel matrix. The Tucker decomposition allows us to calculate the compressed core of the channel tensor. Thus, the further calculation of the singular value decomposition takes place using matrices of a smaller dimension (tensor core), which reduces the computational costs of the algorithm. The paper provides analytical estimates of the rank for the tensor decomposition to preserve the precision of the representation, and also provides a condition of efficient usage the proposed method. A simulation of wireless data transmission was performed to demonstrate the accuracy of the proposed method. The main difference between the method and its existing analogues is that all operations are performed on the tensor core, followed by projection of the result using factorization matrices.

**Keywords:** spatial filter, channel tensor, multiplexing, Tucker decomposition, SVD

**References**

- [1] Massive MIMO for Future Wireless Communication Systems: Technology and Applications. Edited by Weibert Montlouis, Agbotiname Imoize. New York: Wiley, IEEE Press, 2025. 473 pages.
- [2] M. A. Albreem, A. H. A. Habbash, A. M. Abu-Hudrouss, S. S. Ikki, "Overview of Precoding Techniques for Massive MIMO," *IEEE Access*, 2021, no. 9, 60764-60801. <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2021.3073325>
- [3] X. Li, S. Wang, Y. Cai, "Tutorial: Complexity analysis of Singular Value Decomposition and its variants," 2019, arXiv: Numerical Analysis.
- [4] B. M. Hochwald, C. B. Peel, A. L. Swindlehurst, "A Vector-Perturbation Technique for Near-Capacity Multiantenna Multiuser Communication-Part II: Perturbation," *IEEE Transactions on Communications*, 2005, no. 53(3), pp. 537-544. <https://doi.org/10.1109/TCOMM.2004.841997>
- [5] W. Song, X. Chen, L. Wang, X. Lu, "Joint Conjugate Gradient and Jacobi Iteration Based Low Complexity Precoding for Massive MIMO Systems," *Proceedings of the IEEE/CIC International Conference on Communications in China (ICCC)*, 2016, pp. 1-5.
- [6] Y.-T. Hwang, K.-T. Chen, C.-K. Wu, "A High Throughput Unified SVD/QRD Precoder Design for MIMO OFDM Systems," *2015 IEEE International Conference on Digital Signal Processing (DSP)*, 2015, pp. 1148-1151. <https://doi.org/10.1109/ICDSP.2015.7252059>
- [7] T.-L. Wu, C.-A. Shen, Y.-H. Huang, "Tensor-Based Hybrid Precoding Processor for 8x8x8 mmWave 3D-MIMO Systems," *2022 IEEE International Symposium on Circuits and Systems (ISCAS)*, 2022, pp. 2167-2171. <https://doi.org/10.1109/ISCAS48785.2022.9937331>
- [8] L. N. Ribeiro, S. Schwarz, A. L. F. de Almeida, M. Haardt, "Low-Complexity Massive MIMO Tensor Precoding," *2020 54th Asilomar Conference on Signals, Systems, and Computers*, 2020, pp. 348-355. <https://doi.org/10.1109/IEEECONF51394.2020.9443492>
- [9] K. Bhogi, C. Saha, H. S. Dhillon, "Tensor Learning-based Precoder Codebooks for FD-MIMO Systems," 2021, arXiv preprint arXiv:2106.11374.
- [10] V. A. Lyashev, "Method of Differential Orthogonal Matching Pursuit for MIMO Channel Estimation," *Digital Signal Processing Magazine*, 2024, no. (3), pp. 71-80.
- [11] I. Kolesnikov, V. Lyashev, "Computationally Efficient Tensor-Based MIMO Precoder," *2024 IEEE International Multi-Conference on Engineering, Computer and Information Sciences (SIBIRCON)*, 2024, pp. 1-4. <https://doi.org/10.1109/SIBIRCON63777.2024.10758516>
- [12] S. Dorokhin, P. Lysov, V. Lyashev, et al., "RIS-Assisted MIMO Channel Modeling with Spatially Consistent Sparsified Properties," *Wireless Personal Communications*. 2024. <https://doi.org/10.1007/s11277-024-10884-z>. EDN KSPMHZ.
- [13] E. E. Tyrtyshnikov, "Matrix Analysis and Fundamentals of Algebra," Moscow: MCNMO, 2025, 493 p. ISBN 978-5-4439-1864-8.
- [14] I. Kolesnikov, V. Lyashev, M. Kirichenko, "Fast Algorithm for Estimating Singular Values of Hermitian Matrix," *2023 31st Telecommunications Forum (TELFOR)*, 2023, pp. 1-4. <https://doi.org/10.1109/TELFOR59449.2023.10372724>
- [15] I. K. Loktionov, L. P. Mironenko, V. V. Turupalov, "Numerical Methods. Vologda: Infra-Inzheneriya," 2023, 380 p. ISBN 978-5-9729-0786-1.
- [16] A. Osinsky, R. Bychkov, M. Trefilov, et al., "Regularization for Cholesky Decomposition in Massive MIMO Detection," *IEEE Wireless Communications Letters*, 2023, no. 12(9), pp. 1603-1607. <https://doi.org/10.1109/LWC.2023.3284349>. EDN CEBMXQ

**Information about authors:**

**Ivan N. Kolesnikov**, PhD student, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, MIPT), Dolgoprudny, Moscow region, Russia

**Vladimir A. Lyashev**, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Multimedia Technologies and Telecommunications, Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University, MIPT), Dolgoprudny, Moscow region, Russia. ORCID: 0000-0002-6993-1589

**Ivan V. Oseledets**, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor of the Russian Academy of Sciences; CEO, ANO "AI RESEARCH INSTITUTE" (AIRI); Professor, Skolkovo Institute of Science and Technology (Skoltech), Moscow, Russia. ORCID: 0000-0003-2071-2163