ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД МНОГОСТУПЕНЧАТОГО ДИСКРЕТНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ ЦИФРОВОГО СИГНАЛА

DOI: 10.36724/2072-8735-2025-19-5-48-54

Зинченко Александр Сергеевич,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия, ***frambe@mail.ru***

Яшина Марина Викторовна,
Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ);
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет);
Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия, ***yash-marina@yandex.ru***

Бурова Аделия Юрьевна,
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Manuscript received 07 April 2025;
Accepted 12 May 2025

Ключевые слова: *гармонические компоненты спектра, дискретное преобразование Фурье, мгновенный спектр сигнала, разностная цифровая фильтрация, цифровая обработка сигналов*

Рассмотрены вопросы, связанные с исследованием возможностей математического и программного моделирования цифровых алгоритмов дискретного преобразования Фурье без алгоритмических операций умножения. Актуальность исследования обусловлена востребованностью снижения вычислительной сложности алгоритмов цифровой обработки сигналов. Цель исследования - формализация численного метода многоступенчатого дискретного преобразования Фурье цифрового комплексного сигнала. При исследовании применялись методы математического и программного моделирования численных методов цифровой обработки сигналов. Результаты исследования показали и подтвердили возможность моделирования численного метода многоступенчатого дискретного преобразования Фурье цифрового комплексного сигнала на основе численных методов разностной цифровой фильтрации с целочисленными разностными коэффициентами различных порядков разности и численного метода сведения прямых вычислений сложных функций к выполнению простых операций сложения и сдвига. Определено и описано понятие многоступенчатого дискретного преобразования Фурье и концепция этого преобразования. Предложена его математическая модель и проведена формализация численного метода такого преобразования. Отмечено, что он позволяет снижать вычислительную сложность аппаратно-программной реализации цифровой обработки сигналов за счет применения численных методов разностной цифровой фильтрации, направленный перебор и сравнительный анализ допустимых наборов числовых значений целочисленных коэффициентов которой обеспечивает возможность снижения погрешности численного метода многоступенчатого дискретного преобразования Фурье. Для снижения вычислительной сложности его алгоритмов выделения гармонических составляющих цифрового комплексного сигнала применены принципы разделения его частотного спектра на узкополосные спектральные компоненты, частотного сдвига этих компонентов и их низкочастотной разностной цифровой фильтрации без выполнения арифметических операций умножения.

Информация об авторах:
Зинченко Александр Сергеевич, *кандидат экономических наук, доцент, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*
Яшина Марина Викторовна, *д.т.н., Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ); Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет); Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия*
Бурова Аделия Юрьевна, *старший преподаватель, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия*

Для цитирования:
Зинченко А.С., Яшина М.В., Бурова А.Ю. Численный метод многоступенчатого дискретного преобразования Фурье цифрового сигнала // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2025. Том 19. №5. С. 48-54.

For citation:
A.S. Zinchenko, M.V. Yashina, A.Yu. Burova, "Numerical method of multi-stage discrete Fourier transform of a digital signal," *T-Comm*, 2025, vol. 19, no.5, pp. 48-54. (*in Russian*)

Введение

Актуальность исследования обусловлена востребованностью снижения вычислительной сложности алгоритмов цифровой обработки сигналов (ЦОС). В аппаратно-программной реализации большого числа алгоритмов ЦОС центральную роль играют численные методы ДПФ, поскольку они служат математической основой спектрального анализа цифровых сигналов [1-2]. Эти методы применяются для решения таких задач, как вычисление спектров мощности, быстрое вычисление свёрток при цифровой фильтрации, оценивание передаточных функций и импульсных откликов [2-3]. Поэтому, одним из перспективных способов снижения вычислительной сложности алгоритмов дискретного преобразования Фурье (ДПФ) может стать применение численного метода многоступенчатого дискретного преобразования Фурье (МДПФ), цифровые алгоритмы которого можно построить без использования алгоритмических операций умножения [6-7].

Цель и методы исследования

Цель исследования – формализация численного метода МДПФ цифрового комплексного сигнала. При исследовании применялись методы математического и программного моделирования численных методов ЦОС.

Результаты исследования

Результаты исследования показали и подтвердили возможность моделирования численного метода МДПФ цифрового комплексного сигнала на основе алгоритмов численных методов разностной цифровой фильтрации (РЦФ) с целочисленными разностными коэффициентами различных порядков разности и методом сведения прямых вычислений сложных функций к выполнению простых операций сложения и сдвига CORDIC (COordinate Rotation DIgital Computer) [7-8].

Концепция предлагаемого адаптивного метода МДПФ состоит в постепенном («*пошаговом*») L-ступенчатом расчете статистик (оценок) $\{\mathbf{x}_l(m_l{\cdot}\Omega_l,n_l{\cdot}T_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}M_l)$, n_l=0,1,2…N/M_l-1, $T_l=2{\cdot}\pi{\cdot}M_l/\omega_D$, $M_l=B_{МДПФ}^l$, мгновенного спектра $\{\mathbf{X}(m_l{\cdot}\Omega_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}M_l)$, $M_l=B_{МДПФ}^l$, комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n{\cdot}T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$, на l-х ступенях МДПФ, l=1,2,3…L, только численными методами РЦФ и CORDIC без выполнения арифметических операций умножения.

При этом, адаптация к изменению во времени частотного разрешения $\Omega_l\le\Omega_L$ мгновенных спектров $\{\mathbf{X}(m_l{\cdot}\Omega_l)\}$, $\mathbf{X}(m_l{\cdot}\Omega_l)=\mathbf{x}_l(m_l{\cdot}\Omega_l,n_l{\cdot}T_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}M_l)$, n_l=0,1,2…N/M_l-1, $T_l=2{\cdot}\pi{\cdot}M_l/\omega_D$, $M_l=B_{МДПФ}^l\le N$, l=1,2,3…L, обеспечивается переходом от вычисления мгновенных спектров $\{\mathbf{X}(m_l{\cdot}\Omega_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, с разрешением по частоте $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}M_l)$ на l-й ступени МДПФ к вычислению мгновенных спектров $\{\mathbf{X}(m_{l+1}{\cdot}\Omega_{l+1})\}$, m_{l+1}=0,1,2…M_{l+1}-1, с разрешением по частоте $\Omega_{l+1}=\omega_D/(2{\cdot}M_{l+1})$, на ($l$+1)-й ступени МДПФ, при $l<L$ [8].

В предлагаемом численном методе МДПФ реализуются:

– частотный перенос полосовых спектров на основе метода CORDIC, позволяющему получать вектор $\mathbf{y}(n{\cdot}T)=Re[\mathbf{y}(n{\cdot}T)]+i{\cdot}Im[\mathbf{y}(n{\cdot}T)]$, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$, при повороте вектора $\mathbf{x}(n{\cdot}T)=Re[\mathbf{x}(n{\cdot}T)]+i{\cdot}Im[\mathbf{x}(n{\cdot}T)]$, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$, на угол Θ без выполнения арифметических операций умножения по формулам (1) – (3):

$$Re[\mathbf{y}(n{\cdot}T)] = -Im[\mathbf{x}(n{\cdot}T)],\ Im[\mathbf{y}(n{\cdot}T)] = +Re[\mathbf{x}(n{\cdot}T)],\ \text{если } \Theta=\pi.2\pm2{\cdot}\pi; \quad (1)$$

$$Re[\mathbf{y}(n{\cdot}T)] = -Re[\mathbf{x}(n{\cdot}T)],\ Im[\mathbf{y}(n{\cdot}T)] = -Im[\mathbf{x}(n{\cdot}T)],\ \text{если } \Theta=\pi\pm2{\cdot}\pi; \quad (2)$$

$$Re[\mathbf{y}(n{\cdot}T)] = +Im[\mathbf{x}(n{\cdot}T)],\ Im[\mathbf{y}(n{\cdot}T)] = -Re[\mathbf{x}(n{\cdot}T)],\ \text{если } \Theta=3\pi/2\pm2{\cdot}\pi; \quad (3)$$

где $\mathbf{y}(n{\cdot}T)$ – выходной параметр алгоритма по методу CORDIC, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$; $\mathbf{x}(n{\cdot}T)$ – входной параметр алгоритма по методу CORDIC, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$;

– построение разностных схем на основе метода конечных разностей по формуле (4):

$$\mathbf{z}(n{\cdot}T) = \mathbf{x}(n{\cdot}T) - \mathbf{y}(n{\cdot}T), \quad (4)$$

где $\mathbf{z}(n{\cdot}T)$ – выходной параметр алгоритма по методу конечных разностей, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$; $\mathbf{y}(n{\cdot}T)$ – входной параметр алгоритма по методу конечных разностей, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$; $\mathbf{x}(n{\cdot}T)$ – входной параметр алгоритма по методу конечных разностей, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$;

– оптимальный поиск на основе метода направленного перебора по формулам (5) – (7):

$$\mathbf{y}(n{\cdot}T)=\mathbf{x}_{p-1}(n{\cdot}T),\ \mathbf{x}_{p-1}(n{\cdot}T) < \mathbf{x}_p(n{\cdot}T), \mathbf{x}_p(n{\cdot}T) < \mathbf{x}_{p+1}(n{\cdot}T),\ p=1,2,3...P\text{-}2; \quad (5)$$

$$\mathbf{y}(n{\cdot}T)=\mathbf{x}_p(n{\cdot}T),\ \mathbf{x}_{p-1}(n{\cdot}T) > \mathbf{x}_p(n{\cdot}T), \mathbf{x}_p(n{\cdot}T) < \mathbf{x}_{p+1}(n{\cdot}T),\ p=1,2,3...P\text{-}2; \quad (6)$$

$$\mathbf{y}(n{\cdot}T)=\mathbf{x}_{p+1}(n{\cdot}T), \mathbf{x}_{p-1}(n{\cdot}T) > \mathbf{x}_p(n{\cdot}T), \mathbf{x}_p(n{\cdot}T) > \mathbf{x}_{p+1}(n{\cdot}T),\ p=1,2,3...P\text{-}2; \quad (7)$$

где $\mathbf{y}(n{\cdot}T)$ – выходной параметр алгоритма по методу направленного перебора, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$; $\mathbf{x}_p(n{\cdot}T)$ – входной параметр алгоритма по методу направленного перебора, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$, p=1,2,3…P-2.

Для снижения вычислительной сложности выделения гармонических составляющих $\{\mathbf{x}_m(n{\cdot}T)\}$, m=0,1,2…N-1, комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n{\cdot}T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$, применены следующие принципы снижения вычислительной сложности при построении цифровых алгоритмов МДПФ за счет использования только алгоритмических операций наименьшей вычислительной сложности:

– принцип разделения частотного спектра $\{\mathbf{X}(m_l{\cdot}\Omega_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}M_l)$, $M_l=B_{МДПФ}^l$, l=1,2,3…L, N-точечного фрагмента временной выборки $\{\mathbf{x}(n{\cdot}T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$, на M_l узкополосных спектральных компонентов $\{\mathbf{x}_l(m_l{\cdot}\Omega_l,n_l{\cdot}T_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}M_l)$, n_l=0,1,2…N/M_l-1, $T_l=2{\cdot}\pi{\cdot}M_l/\omega_D$, при $M_l\le N$, l=1,2,3…L, и их частотного сдвига без выполнения арифметических операций умножения [7-8];

– принцип низкочастотной РЦФ l-х спектральных компонентов $\{\mathbf{x}_l(m_l{\cdot}\Omega_l,n_l{\cdot}T_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}M_l)$, n_l=0,1,2…N/M_l-1, $T_l=2{\cdot}\pi{\cdot}M_l/\omega_D$, $M_l=B_{МДПФ}^l$, l=1,2,3…L, комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n{\cdot}T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$, при $N=M_l$ по формуле (8) только алгоритмическими операциями сложения и сдвига за счет тривиальности или бинарности целочисленных значений [7-11].

$$\mathbf{y}(n\cdot T) = \sum_{k_0=0}^{K_p-1} \sum_{k_1=0}^{k_0} \ldots \sum_{k_{J-1}=0}^{k_{J-2}} \sum_{k_J=0}^{k_{J-1}} h_p(J,k_J) \times \mathbf{x}(n\cdot T-k_J\cdot T), \quad n=0,1,2\ldots N\text{-}1,\ T=2\cdot\pi/\omega_D, \tag{8}$$

где $\mathbf{y}(n\cdot T)$ – n-ый временной отсчёт N-точечной выборки цифрового сигнала на выходе разностного цифрового фильтра K_p-го порядка и J-го порядка разности, $n=0,1,2\ldots N\text{-}1$, $T=2\cdot\pi/\omega_D$;
$h_p(J,k_J)$ – k_J-ый разностный коэффициент разностного цифрового фильтра K_p-го порядка и J-го порядка разности, $k_J=0,1,2\ldots K_p\text{-}1$;
J – порядок разности разностного цифрового фильтра K_p-го порядка;
K_p – порядок разностного цифрового фильтра J-го порядка разности;
$\mathbf{x}(n\cdot T\text{-}k_J\cdot T)$ – $(n\text{-}k_J)$-ый временной отсчёт N-точечной выборки цифрового сигнала на входе разностного цифрового фильтра K_p-го порядка и J-го порядка разности, $n=0,1,2\ldots N\text{-}1$, $T=2\cdot\pi/\omega_D$;
N – число отсчетов временной выборки цифрового сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, $n=0,1,2\ldots N\text{-}1$, $T=2\cdot\pi/\omega_D$;
T – период временной дискретизации цифрового сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, $n=0,1,2\ldots N\text{-}1$, $T=2\cdot\pi/\omega_D$;
ω_D – частота дискретизации цифрового сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, $n=0,1,2\ldots N\text{-}1$, $\omega_D=2\cdot\pi/T$.

Изначально метод построения алгоритма РЦФ был предложен и разработан как особое направление цифровизации обработки сигналов на основе идей, изложенных в классических монографиях по ЦОС [1-3]. Он был создан на основе применения метода «конечных разностей» для формирования коэффициентов цифровой фильтрации на основе приращений их значений относительно значений предыдущих соседних коэффициентов цифровой фильтрации по формуле (9):

$$\Delta[h(k+1)] = h(k+1) - h(k), \quad k=0,1,2\ldots K\text{-}1, \tag{9}$$

где Δ – «разрядный оператор», который сопоставляет функцию $h(k)$ с функцией $\Delta[h(k+1)]$, определяемой как «конечная разность», т.е. математическое выражение $\{h(k+1) - h(k)\}$;
$h(k)$ – k-ый отсчёт импульсной характеристики цифровой фильтрации K-го порядка, $k=0,1,2\ldots K\text{-}1$;
$h(k+1)$ – $(k+1)$-ый отсчёт импульсной характеристики цифровой фильтрации K-го порядка, $k=0,1,2\ldots K\text{-}1$;
$\Delta[h(k+1)]$ – «конечная разность» $(k+1)$-го и k-го отсчётов импульсной характеристики цифровой фильтрации K-го порядка, $k=0,1,2\ldots K\text{-}1$;
K – число отсчётов импульсной характеристики цифровой фильтрации.

Этот метод был своевременно апробирован на научных сессиях Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи (РНТОРЭС) имени А.С. Попова и на Международных научных конференциях по ЦОС [9-10]. Использованные при этом приращения значений коэффициентов цифровой фильтрации относительно значений предыдущих соседних коэффициентов цифровой получили условные наименования: «приращения коэффициентов» и «разностные коэффициенты» [9].

Понятие и термин «Разностная цифровая фильтрация» были предложены и определены для определения и обозначения способов, методов и алгоритмов цифровой фильтрации нижних частот с малоразрядными коэффициентами фильтрации, формируемыми на основе метода конечных разностей и условно именуемых «разностными коэффициентами», а применены для низкочастотной цифровой фильтрации в алгоритмах Многоступенчатого дискретного преобразования Фурье и Дедуктивной обработки цифровых сигналов [5, 7-8, 12].

Этот термин уже более тридцати лет используется в докладах на Международных научных конференциях по ЦОС и научных сессиях РНТОРЭС имени А.С. Попова, а также в научных статьях, опубликованных в журналах, рекомендуемых Высшей аттестационной комиссией при Министерстве науки и высшего образования Российской Федерации и индексируемых в базах данных рецензируемой научной литературы «*Scopus*» и «*Web of Science*» [4-15]. Он свидетельствует о применении разностных схем на основе метода конечных разностей для формирования коэффициентов цифровой фильтрации, каждый из которых заменён разностью между ним и соседним коэффициентов, условно именуемой «разностным коэффициентом 1-го порядка разности» и, в свою очередь, замененной разность между этим и соседним разностным коэффициентом 1-го порядка разности, условно именуемой «разностным коэффициентом 2-го порядка разности» и также замененной разностью между этим и соседним разностным коэффициентом 2-го порядка разности, условно именуемой «разностным коэффициентом 3-го порядка разности», и т.д. [9].

Численный метод РЦФ ненулевых порядков разности позволяет существенно уменьшить разрядности как $MULT_{ТРЦФ}(K_p)$ умножителей, так и $CELL_{ТРЦФ}(K_p)$ ячеек памяти, требуемых для аппаратной реализации цифровых фильтров нижних частот (ЦФНЧ) K-го порядка на основе ТРЦФ K_p-го порядка и J-го порядка разности [9, 11]. Такая экономия аппаратных средств обеспечивается за счёт спецпроцессорной реализации таких фильтров K-го порядка на основе алгоритма ТРЦФ K_p-го порядка и J-го порядка разности при $K_p=K+J$. Для этого, значения разностных коэффициентов $\{h_p(j,k_j)\}$, $k_j=0,1,2\ldots K+j\text{-}1$, $(j+1)$-го порядка разности, $j=1,2,3\ldots J$, заменяются по формуле (10) значениями разностных коэффициентов $\{h_p(j+1,k_j)\}$, $k_j=0,1,2\ldots K+j$, следующего порядка разности $(j+1)$, $j=1,2,3\ldots J$, при условии $h_p(j,k_j)=0$, если $k_j=0$ или $k_j>0$:

$$h_p(j+1,k_j) = h_p(j,k_j) - h_p(j,k_j\text{-}1), \tag{10}$$

где $h_p(j,k_j)$ – k_j-ый разностный коэффициент ТРЦФ $(K+j)$-го порядка и j-го порядка разности, $k_j=0,1,2\ldots K+j\text{-}1$, $j=1,2,3\ldots J$;
j – порядок разности алгоритма ТРЦФ $(K+j)$-го порядка, $j=1,2,3\ldots J$;
J – максимальный порядок разности алгоритма ТРЦФ $(K+J)$-го порядка;
k_j – номер разностного коэффициента ТРЦФ $(K+j)$-го порядка и j-го порядка разности, $k_j=0,1,2\ldots K+j\text{-}1$, $j=1,2,3\ldots J$;
K_p – порядок ТРЦФ J-го порядка разности;
K – порядок ЦФНЧ, реализуемого на основе ТРЦФ K_p-го порядка и J-го порядка разности, $K=K_p\text{-}J$.

Однако, аппаратная реализация ЦФНЧ K-го порядка на основе РЦФ (K+j)-го порядка j-ых порядков разности алгоритма РЦФ, j=1,2,3…J, требует значительно числа $SUMM_{\text{РЦФ}}(K+j)$ сумматоров для фильтрации цифрового сигнала $\{\mathbf{x}(nT)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\pi/\omega_D$ [10]. Это обусловлено ростом числа арифметических операций сложения в алгоритме ТРЦФ (K+j)-го порядка при увеличении его порядка разности j [12]. А в случае применения бинарных значений или тривиальных значений, или единичных значений разностных коэффициентов $\{h_{\text{р}}(J,k_J)\}$ при k_J=0,1,2…$K_{\text{р}}$-1, разностная цифровая фильтрация не требует выполнения арифметических операций умножения [6, 9-11].

Методология ДПФ предлагаемым численным методом МДПФ учитывает современные и перспективные достижения в области цифрового спектрального анализа и использует основные методы ЦОС при построении цифровых алгоритмов МДПФ.

Снижение вычислительной сложности выделения гармонических составляющих $\{\mathbf{x}_m(n\cdot T)\}$, m=0,1,2…N-1, комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, численным методом МДПФ основывается на использовании невостребуемых ещё в полной мере резервов снижения вычислительной сложности известных алгоритмов ЦОС и позволяет решать следующие проблемы ЦОС при построении цифровых алгоритмов выделения спектральных компонентов $\{\mathbf{X}(m\cdot W)\}$, m=0,1,2…N-1, $W=\omega_D/(2\cdot N)$, комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, при изменении во времени его частотного разрешения:

– обеспечивать ДПФ N-точечного фрагмента временной выборки комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, без выполнения арифметических операций умножения;

– исключать вычисления тех m-ых спектральных компонентов $\{\mathbf{X}(m\cdot W)\}$, m=0,1,2…N-1, $W=\omega_D/(2\cdot N)$, наличие и величина которых в спектре комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, не представляет практического интереса для спектрального анализа, но обязательно рассчитывается при использовании алгоритмов БПФ;

– исключать применение M одинаковых полосовых или согласованных цифровых фильтров $K(m)$-го порядка, m=0,1,2…M-1, $h_{\text{т}}(m_g,k)=h_{\text{т}}(m_q,k)$, m_g=0,1,2…M-1, m_q=0,1,2…M-1, k_g=0,1,2…$K(m_g)$-1, k_q=0,1,2…$K(m_q)$-1, $K(m_g)=K(m_q)$, если $g^{1}q$, поскольку их сложно реализовать при спектральном анализе методами МПЦФ для разных спектральных компонентов $\{\mathbf{X}(m\cdot W)\}$, m=0,1,2…N-1, $W=\omega_D/(2\cdot N)$;

– обеспечивать единый уровень точности M-точечной МПЦФ K-го порядка $C_{\text{МПЦФ}}(M,K,Z)$ при Z-разрядности представления обрабатываемых вещественных чисел для вычисления всех m-ых гармонических составляющих $\{\mathbf{x}_m(n\cdot T)\}$, m=0,1,2…M-1, комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, при $N\geq M$.

Результаты экспериментального моделирования на ПЛИС в рамках проведенного исследования показали и подтвердили, что при использовании алгоритмов метода CORDIC для M_L-точечного L-ступенчатого ДПФ разностными цифровыми фильтрами с целочисленными разностными коэффициентами на точность и вычислительную сложность его алгоритмов влияет в основном взаимосвязь параметров РЦФ.

При сдвиге на частоты, кратные $W_{\text{SH}}=\pi/2$, вычислительная процедура сдвига m_{l-1}-х статистик (оценок) $\{\mathbf{x}_{l-1}(Int[m_l/B_{\text{МДПФ}}]\, W_{l-1},n_{l-1}\cdot T_{l-1})\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $W_{l-1}=\omega_D/(2\cdot M_{l-1})$, n_{l-1}=0,1,2…N/M_{l-1}-1, $T_{l-1}=2\cdot\pi\cdot M_{l-1}/\omega_D$, $M_{l-1}=B_{\text{МДПФ}}{}^{l-1}$, спектральных компонентов $\{\mathbf{X}(m_{l-1}\cdot W_{l-1})\}$, m_{l-1}=0,1,2…M_{l-1}-1, $W_{l-1}=\omega_D/(2\cdot M_{l-1})$, $M_{l-1}=B_{\text{МДПФ}}{}^{l-1}$, комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, в область нуля на l-ой ступени МДПФ, l=1,2,3…L, сводится к выполнения арифметических операций умножения на $Sin[\pi/2]=1$.

А сам частотный сдвиг статистик (оценок) $\{\mathbf{x}_{l-1}(Int[m_l/B_{\text{МДПФ}}]\cdot W_{l-1},n_{l-1}\cdot T_{l-1})\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $W_{l-1}=\omega_D/(2\cdot M_{l-1})$, n_{l-1}=0,1,2…N/M_{l-1}-1, $T_{l-1}=2\cdot\pi\cdot M_{l-1}/\omega_D$, $M_{l-1}=B_{\text{МДПФ}}{}^{l-1}$, расположенных в частотных диапазонах $[m_l\times W_{l-1}/B_{\text{МДПФ}}, W_{l-1}+m_{l\times Wl-1}/B_{\text{МДПФ}})$ с шириной W_{l-1}, сводится к формированию статистик (оценок) $\{exp[-i\cdot m_l\cdot W_l\cdot n_{l-1}\cdot T_{l-1}]\cdot\mathbf{x}_{l-1}(Int[m_l/B_{\text{МДПФ}}]\cdot W_{l-1},n_{l-1}\cdot T_{l-1})\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $W_l=\omega_D/(2\cdot M_l)$, $M_l=B_{\text{МДПФ}}\cdot M_{l-1}$, $W_{l-1}=B_{\text{МДПФ}}\cdot W_l$, n_{l-1}=0,1,2…N/M_{l-1}-1, $T_{l-1}=2\cdot\pi\cdot M_{l-1}/\omega_D$, $M_{l-1}=B_{\text{МДПФ}}{}^{l-1}$, расположенных в частотных диапазонах $[m_l\cdot W_l, W_l+m_l\cdot W_l)$ с шириной W_l:

Причём, сдвиг спектра на частоты, кратные $W_{\text{SH}}=\pi/2$, не требует выполнения арифметических операций умножения, поскольку при этом тригонометрические функции принимают только тривиальные значения (-1, 0, +1). А направленный перебор и сравнительный анализ допустимых наборов числовых значений целочисленных коэффициентов РЦФ разных порядков и различных порядков разности обеспечивает возможность снижения погрешности МДПФ.

Для снижения вычислительной сложности выделения гармонических составляющих $\{\mathbf{x}_m(n\cdot T)\}$, m=0,1,2…N-1, комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, с изменяющемся во времени частотным разрешением $\Omega_l\leq\Omega_L$ комплексного спектра $\{\mathbf{X}(m_l\cdot\Omega_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $\Omega_l=\omega_D/(2\cdot M_l)$, $M_l\leq N$, l=1,2,3…L, N-точечного фрагмента временной выборки комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, предлагается численный метод ДПФ комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, L-ступенчатой МПЦФ на основе РЦФ.

Предлагаемому численному методу МДПФ предлагается присвоить условный код по формуле (11):

$$\mathbf{x}_l(m_l\cdot\Omega_l,n_l\cdot T_l) = \boldsymbol{MDFT}_l[\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}],$$
$$m_l=0,1,2\ldots M_l-1,\ n=0,1,2\ldots N-1, \tag{11}$$

где $\mathbf{x}_l(m_l\cdot\Omega_l,n_l\cdot T_l)$ – n_l-й временной отсчет m_l-й статистики (оценки) мгновенного спектра $\{\mathbf{X}(m_l\cdot\Omega_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $\Omega_l=\omega_D/(2\cdot M_l)$, $M_l=B_{\text{МДПФ}}{}^l$, сформированного в результате l-ступенчатого МДПФ N временных отсчетов комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, при $N=B_{\text{МДПФ}}{}^l$, l=1,2,3…L.

Условное кодирование предлагаемого численного метода МДПФ предусмотрено для формализации преобразования n-х отсчетов комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n\cdot T)\}$, n=0,1,2…N-1, $T=2\cdot\pi/\omega_D$, в n_l-е отсчеты m_l-х статистик (оценок) $\{\mathbf{x}_l(m_l\cdot\Omega_l,n_l\cdot T_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $\Omega_l=\omega_D/(2\cdot M_l)$, n_l=0,1,2…N/M_l-1, $T_l=2\cdot\pi\cdot M_l/\omega_D$, $M_l=B_{\text{МДПФ}}{}^l$, l=1,2,3…L, компонентов мгновенного спектра $\{\mathbf{X}(m_l\cdot\Omega_l)\}$, m_l=0,1,2…M_l-1, $\Omega_l=\omega_D/(2\cdot M_l)$, $M_l=B_{\text{МДПФ}}{}^l$, с меняющемся во времени частотным разрешением $\Omega_l\leq\Omega_L$ в частотном диапазоне $[0, \omega_D/2]$ при $M_l=B_{\text{МДПФ}}{}^l$, которые соответствуют гармоническим компонентам $\{\mathbf{x}_m(n\cdot T)\}$, m=0,1,2…N-1, этого сигнала при $N=B_{\text{МДПФ}}{}^l$. Для $N\geq M_l=\omega_D/\Omega_l$, $\Omega_l=\omega_D/(2\cdot B_{\text{МДПФ}}{}^l)$, l=1,2,3…L, при $B_{\text{МДПФ}}=3$ формализация предлагаемого численного метода МДПФ имеет вид по формуле (12):

$$\mathbf{x}_l(m_l{\cdot}\Omega_l,n_l{\cdot}T_l) = \boldsymbol{MDFT}_l[\{\mathbf{x}(n{\cdot}T)\}] =$$

$$= [\sum_{k_0=0}^{K_p-1}\sum_{k_1=0}^{k_0}\ldots\sum_{k_J=0}^{k_{J-1}} h_p(J,k_J){\cdot}exp[-i{\cdot}m_l{\cdot}\Omega_l{\cdot}(n_{l-1}-k_J){\cdot}T_{l-1}]{\cdot}\mathbf{x}_{l-1}(Int[m_l/3]{\cdot}3{\cdot}\Omega_l,(n_{l-1}-k_J){\cdot}T_{l-1})], \quad (12)$$

при $m_l=0,1,2\ldots3^l-1$, $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}3^l)$, $n_l=Int[n_{l-1}/3]$, $T_l=3{\cdot}T_{l-1}$, $n_{l-1}=0,1,2\ldots N/3^{l-1}-1$, $T_{l-1}=2{\cdot}\pi{\cdot}3^{l-1}/\omega_D$, $l=1,2,3\ldots L$;

$$\mathbf{x}_{l-1}(m_{l-1}{\cdot}\Omega_{l-1},\ n_{l-1}{\cdot}T_{l-1}) = \sum_{k_0=0}^{K_p-1}\sum_{k_1=0}^{k_0}\ldots\sum_{k_J=0}^{k_{J-1}} h_p(J,k_J)\cdot exp[-i{\cdot}m_{l-1}{\cdot}\Omega_{l-1}{\cdot}(n_{l-2}-k_J){\cdot}T_{l-2}]\times$$

$$\times\,\mathbf{x}_{l-2}(Int[m_{l-1}/3]{\cdot}\Omega_{l-2},\ (n_{l-2}-k_J){\cdot}T_{l-2}), \quad (13)$$

при $m_{l-1}=0,1,2\ldots3^{l-1}-1$, $\Omega_{l-1}=\omega_D/(2{\cdot}3^{l-1})$, $n_{l-1}=Int[n_{l-2}/3]$, $T_{l-1}=3{\cdot}T_{l-2}$, $n_{l-2}=0,1,2\ldots N/3^{l-2}-1$, $T_{l-2}=2{\cdot}\pi{\cdot}3^{l-2}/\omega_D$, $l=3,4,5\ldots L$;

$$\mathbf{x}_1(m_1{\cdot}\Omega_1,n_1{\cdot}T_1) = \sum_{k_0=0}^{K_p-1}\sum_{k_1=0}^{k_0}\ldots\sum_{k_J=0}^{k_{J-1}} h_p(J,k_J){\cdot}exp[-i{\cdot}m_1{\cdot}\Omega_1{\cdot}(n-k_J){\cdot}T]{\cdot}\mathbf{x}(n{\cdot}T-k_J{\cdot}T), \quad (14)$$

при $m_1=0,1,2$, $\Omega_1=\omega_D/(2{\cdot}3^1)$, $n_1=Int[n/3]$, $T_1=3{\cdot}T$, $n=0,1,2\ldots N-1$, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$;

$$W_{МДПФ}(M_L,J,K_p)\le W_{ДПФ}(N) \text{ при } |C_{МДПФ}(M_L,J,K_p,Z)-C_{ДПФ}(N,D,Z)|\le\varepsilon_0 \text{ и } M_L=N, \quad (15)$$

где
- $\mathbf{x}(n{\cdot}T)$ – временные отсчеты N-точечного фрагмента временной выборки комплексного сигнала, $n=0,1,2\ldots N-1$, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$;
- $\mathbf{x}_l(m_l{\cdot}\Omega_l,n_l{\cdot}T_l)$ – временные отсчеты статистик (оценок) равноотстоящих друг от друга по частоте спектральных компонентов $\{\mathbf{X}_p(m_l{\cdot}\Omega_l)\}$, $m_l=0,1,2\ldots M_l-1$, $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}M_l)$, $n_l=0,1,2\ldots N/M_l-1$, $T_l=2{\cdot}\pi{\cdot}M_l/\omega_D$, $M_l=B_{МДПФ}{}^l$, $B_{МДПФ}=3$, $l=1,2,3\ldots L$, комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n{\cdot}T)\}$, $n=0,1,2\ldots N-1$, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$, $\mathbf{x}_l(m_l{\cdot}\Omega_l,n_l{\cdot}T_l)\equiv\tilde{\mathbf{x}}_m(n_l{\cdot}T_l)+\tilde{\mathbf{x}}_\xi(n_l{\cdot}T_l)/M_l$, при $m_l=m$;
- $exp[-i{\cdot}m_l{\cdot}\Omega_l{\cdot}n_{l-1}{\cdot}T_{l-1}]$ – поворачивающие (сдвигающие) комплексные множители алгоритма метода CORDIC $exp[-i{\cdot}m_l{\cdot}\Omega_l{\cdot}n_{l-1}{\cdot}T_{l-1}]$ = -1, $-j$, +1, $+j$, $m_l=0,1,2\ldots M_l-1$, $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}M_l)$, $n_{l-1}=0,1,2\ldots N/M_{l-1}-1$, $T_{l-1}=2{\cdot}\pi{\cdot}M_{l-1}/\omega_D$, $M_l=3{\cdot}M_{l-1}$, $M_{l-1}=B_{МДПФ}{}^{l-1}$, на l-й ступени МДПФ с основанием $B_{МДПФ}=3$, $l=1,2,3\ldots L$;
- $h_p(J,k)$ – разностные коэффициенты РЦФ K_p-го порядка и J-го порядка разности, $k=0,1,2\ldots K_p-1$, $h_p(J,k)$ = -2, -1, 0, +1, +2;
- $C_{МДПФ}(M_L,J,K_p,Z)$ – вычислительная погрешность L-ступенчатого метода МДПФ на основе РЦФ K_p-го порядка и J-го порядка разности при Z-разрядности представления вещественных чисел, $M_L\le N$;
- $C_{ДПФ}(N,D,Z)$ – вычислительная погрешность метода N-точечного ДПФ при D-разрядности его квантованных коэффициентов и Z-разрядности представления вещественных чисел;
- D – разрядность квантованных коэффициентов ДПФ;
- ε_0 – общепринятый критерий (необходимый и достаточный допуск) оценки точности (вычислительной погрешности) метода N-точечного ДПФ;
- $W_{МДПФ}(M_L,J,K_p)$ – вычислительная сложность L-сту-пенчатого метода МДПФ на основе РЦФ K_p-го порядка и J-го порядка разности, $M_L\le N$;
- $W_{ДПФ}(N)$ – вычислительная сложность метода N-точечного ДПФ;
- N – число отсчетов выборки комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n{\cdot}T)\}$, $n=0,1,2\ldots N-1$, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$, $N=B_{МДПФ}{}^L$, $B_{МДПФ}=3$;
- T – период временной дискретизации комплексного сигнала $\{\mathbf{x}(n{\cdot}T)\}$, $n=0,1,2\ldots N-1$, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$;
- Ω_l – частотное разрешение комплексного спектра $\{X_p(m_l{\cdot}\Omega_l)\}$, $m_l=0,1,2\ldots3^l-1$, временной выборки $\{\mathbf{x}(n{\cdot}T)\}$, $n=0,1,2\ldots N-1$, $T=2{\cdot}\pi/\omega_D$, $\Omega_l=\omega_D/(2{\cdot}M_l)$, $M_l=B_{МДПФ}{}^l$, $B_{МДПФ}=3$, $l=1,2,3\ldots L$;
- ω_D – частота дискретизации цифрового сигнала $\{x(n{\cdot}T)\}$, $n=0,1,2\ldots N-1$, $\omega_D=2\pi/T$.
- Z – разрядность представления вещественных чисел.

Достоверность результатов исследования обеспечивается применением численных методов математического моделирования и подтверждается соответствием основным принципам построения цифровых фильтров [1-3, 12-19].

Заключение

Предложенный численный метод МДПФ и его алгоритмы успешно реализуются на ПЛИС, в которых практическое равенство таких процедур программного обеспечения как процедура сложения и процедура умножения реализуются за счет аппаратно-программного обеспечения. Поэтому такой метод и его алгоритмы могут быть использованы при цифровизации перспективных методов преобразования и обработки информации.

Численный метод МДПФ обеспечивает практическую возможность выполнения такого преобразования с использованием минимального объема аппаратных средств умножения частотно-временных отсчетов обрабатываемых сигналов и амплитудно-частотных характеристик цифровых фильтров. Этот метод и его алгоритмы стали реальным развитием авторской идеи частотной селекции сигналов вообще без процедур умножения их отсчетов.

Применение такого метода позволяет экономить аппаратные средства частотной селекции цифровых сигналов в условиях острого дефицита интегральных микросхем в развитых и развивающихся странах по всему миру.

Литература

1. *Rabiner L.R., Rader C.M.* Digital Signal Processing. New York: IEEE Press, 1972. 528 p.
2. *Oppenheim A.V., Schafer R.W.* Digital Signal Processing. Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall, 1975. 585 p.
3. *Rabiner L.R., Gold B.* Theory and Application of Digital Signal Processing. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975. 762 p.
4. *Burova A.Yu., Ryapukhin A.V., Muntyan A.R.* Reduced hardware costs with software and hardware implementation of digital methods multistage discrete Fourier transform on programmable logic devices // Amazonia Investiga, 2020. Vol. 9, № 27, pp. 227-233.
5. *Burova A.Yu.* Digital signal processing without performing arithmetic multiplication operations // Amazonia Investiga, 2020. Vol. 9, № 25, pp. 200-205.
6. *Burova A.Yu., Kabakov V.V.* «Unerroric» of multistage discrete Fourier transform of digital signal without arithmetic operations of multiplication // Amazonia Investiga, 2020. Vol. 9, № 25, pp. 429-437.
7. *Burova A.Yu.* Digital Signal Multi-Stage Discrete Fourier Transform and Its Practical Applications // 23rd International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA-2021. Moscow, 2021. DOI: https://doi.org/10.1109/DSPA51283.2021.9535810.
8. *Burova A.Yu.* Concept of multistage discrete Fourier transform without performing multiplications // Journal of Physics: Conference Series, 2021, 1889(2), 022003. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022003.
9. *Shinakov Yu.S., Burov Yu.Ya., Burova A.Yu.* Theory, methods and algorithms of difference digital filtering // Proceedings of the Third International Conference «Digital signal processing and its application» (DSPA'2000), November 29 – December 1, 2000. Moscow, 2000. Vol. 1, pp. 99-100.
10. *Burov Yu.Ya., Burova A.Yu.* Theory and digital methods of recurrent difference filtering // Proceedings of the Third International Conference «Digital signal processing and its application» (DSPA'2000), November 29 – December 1, 2000. Moscow, 2000. Vol. 3, pp. 160-161.
11. *Arapov N.V., Burova A.Y.* Accuracy of Spectral Analysis Based on Difference Digital Filtering // 24th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA-2022. Moscow, 2022. DOI: https://doi.org/10.1109/DSPA53304.2022.9790761.
12. *Burova A.Yu.* Reducing the Error of Digital Algorithms for Deductive Signal Processing Based on Their Multi-Stage Discrete Fourier Transform by the Difference Digital Filters // 22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA-2020. Moscow, 2020. DOI: https://doi.org/10.1109/DSPA48919.2020.9213275.
13. *Burova A.Yu., Usatenko T.O.* Digital Algorithms for the Discrete Frequency Selection of Signals that Do Not Use Algorithmic Multiplication Operations // TEM Journal, 2020. Vol. 9, Issue 2, pp. 501-506. DOI: https://doi.org/10.18421/TEM92-11.
14. *Burova A.Yu., Ryapukhin A.V.* Reduction of the number of multiplication operations in digital signal processing algorithms by classical methods of discrete Fourier transform // AIP Conf. Proc. 2402, 040002 (2021). DOI: https://doi.org/10.1063/5.0071449.
15. *Burova A.Yu., Usatenko T.O.* Digital methods of discrete Fourier transform, allowing minimizing the number of algorithmic multiplication operations // Journal of Physics: Conference Series. II International Scientific Conference on Metrological Support of Innovative Technologies (ICMSIT II-2021). Krasnoyarsk, 2021. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/3/032035.
16. *Витязев В.В., Волченков В.А., Овинников А.А.* и др. Цифровая обработка сигналов : учебное пособие для вузов. М.: Горячая линия – Телеком, 2023. 188 с.
17. *Пономарева Н.В.* Теория, методы и алгоритмы определения огибающих двумерных дискретных финитных действительных сигналов на базе преобразований Фурье с варьируемыми параметрами // Цифровая обработка сигналов, 2024. №1. С. 3-11.
18. *Попов Д.И.* Анализ режекторных фильтров рекурсивного типа // Цифровая обработка сигналов, 2025. №1. С. 67-71.
19. *Буслаев А.П., Кучелев Д.А., Яшина М.В.* Динамические системы и математические модели трафика информации // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2018. Т. 12. № 3. С. 22-38.

NUMERICAL METHOD OF MULTI-STAGE DISCRETE FOURIER TRANSFORM OF A DIGITAL SIGNAL

Alexander S. Zinchenko, *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia,* **frambe@mail.ru**
Marina V. Yashina, *Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI);*
Moscow Aviation Institute (National Research University);
Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia, **yash-marina@yandex.ru**
Adelia Yu. Burova, *Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

Abstract
The issues related to the study of the possibilities of mathematical and software modeling of digital algorithms for discrete Fourier transform without algorithmic multiplication operations are considered. The relevance of the study is due to the need to reduce the computational complexity of digital signal processing algorithms. The purpose of the study is to formalize a numerical method for the multi-stage discrete Fourier transform of a digital complex signal. The methods of mathematical and software modeling of numerical methods of digital signal processing were used in the study. The results of the study showed and confirmed the possibility of modeling a numerical method of multi-stage discrete Fourier transform of a digital complex signal based on numerical methods of difference digital filtering with integer difference coefficients of various orders of difference and a numerical method of reducing direct calculations of complex functions to perform simple operations of addition and shift. The concept of a multi-stage discrete Fourier transform and the concept of this transformation are defined and described. Its mathematical model is proposed and the numerical method of such transformation is formalized. It is noted that it allows to reduce the computational complexity of the hardware and software implementation of digital signal processing through the use of numerical methods of differential digital filtering, directed enumeration and comparative analysis of acceptable sets of numerical values of integer coefficients, which provides the possibility of reducing the error of the numerical method of multi-stage discrete Fourier transform. To reduce the computational complexity of his algorithms for isolating the harmonic components of a digital complex signal, the principles of dividing its frequency spectrum into narrow-band spectral components, frequency shifting of these components and their low-frequency difference digital filtering without performing arithmetic multiplication operations are applied.

Keywords: *harmonic components of the spectrum, discrete Fourier transform, instantaneous signal spectrum, digital difference filtering, digital signal processing*

References

[1] L.R. Rabiner, C.M. Rader, "Digital Signal Processing," New York: IEEE Press, 1972. 528 p.
[2] A.V.Oppenheim, R.W. Schafer, "Digital Signal Processing," Englewood Cliffs, New York: Prentice-Hall, 1975. 585 p.
[3] L.R. Rabiner, B. Gold, "Theory and Application of Digital Signal Processing," Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1975. 762 p.
[4] A.Yu. Burova, A.V. Ryapukhin, A.R. Muntyan, "Reduced hardware costs with software and hardware implementation of digital methods multistage discrete Fourier transform on programmable logic devices," *Amazonia Investiga*, 2020. Vol. 9, no. 27, pp. 227-233.
[5] A.Yu. Burova, "Digital signal processing without performing arithmetic multiplication operations," *Amazonia Investiga*, 2020. Vol. 9, no. 25, pp.200-205.
[6] A.Yu. Burova, V.V. Kabakov, "Unerroric" of multistage discrete Fourier transform of digital signal without arithmetic operations of multiplication," *Amazonia Investiga*, 2020. Vol. 9, no. 25, pp.429-437.
[7] A.Yu. Burova, "Digital Signal Multi-Stage Discrete Fourier Transform and Its Practical Applications," *23rd International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA-2021*. Moscow, 2021. DOI: https://doi.org/10.1109/DSPA51283.2021.9535810
[8] A.Yu. Burova, "Concept of multistage discrete Fourier transform without performing multiplications," *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, 1889(2), 022003. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/2/022003
[9] Yu.S. Shinakov, Yu.Ya. Burov, A.Yu. Burova, "Theory, methods and algorithms of difference digital filtering," *Proceedings of the Third International Conference "Digital signal processing and its application" (DSPA'2000)*, November 29 – December 1, 2000. Moscow, 2000. Vol. 1, pp. 99-100.
[10] Yu.Ya. Burov, A.Yu. Burova, "Theory and digital methods of recurrent difference filtering," *Proceedings of the Third International Conference "Digital signal processing and its application" (DSPA'2000)*, November 29 - December 1, 2000. Moscow, 2000. Vol. 3, pp. 160-161.
[11] N.V. Arapov, A.Y. Burova, "Accuracy of Spectral Analysis Based on Difference Digital Filtering," *24th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA-2022*. Moscow, 2022. DOI: https://doi.org/10.1109/DSPA53304.2022.9790761
[12] A.Yu. Burova, "Reducing the Error of Digital Algorithms for Deductive Signal Processing Based on Their Multi-Stage Discrete Fourier Transform by the Difference Digital Filters," *22th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications, DSPA-2020*. Moscow, 2020. DOI: https://doi.org/10.1109/DSPA48919.2020.9213275
[13] A.Yu. Burova, T.O. Usatenko, "Digital Algorithms for the Discrete Frequency Selection of Signals that Do Not Use Algorithmic Multiplication Operations," *TEM Journal*, 2020. Vol. 9, Issue 2, pp. 501-506. DOI: https://doi.org/10.18421/TEM92-11
[14] A.Yu. Burova, A.V. Ryapukhin, "Reduction of the number of multiplication operations in digital signal processing algorithms by classical methods of discrete Fourier transform," *AIP Conf. Proc.* 2402, 040002 (2021). DOI: https://doi.org/10.1063/5.0071449
[15] A.Yu. Burova, T.O. Usatenko, "Digital methods of discrete Fourier transform, allowing minimizing the number of algorithmic multiplication operations," *Journal of Physics: Conference Series. II International Scientific Conference on Metrological Support of Innovative Technologies (ICMSIT II-2021)*. Krasnoyarsk, 2021. DOI: https://doi.org/10.1088/1742-6596/1889/3/032035
[16] V.V. Vityazev, V.A. Volchenkov, A.A. Ovinnikov, et al., "Digital signal processing: a textbook for universities," Moscow: Goryachaya Liniya – Telecom, 2023. 188 p.
[17] N.V. Ponomareva, "Theory, methods and algorithms for determining the envelopes of two-dimensional discrete finite real signals based on Fourier transforms with variable parameters," *Digital signal processing*, 2024. No. 1, pp. 3-11.
[18] D.I. Popov, "Analysis of recursive type rejection filters," *Digital signal processing*, 2025. No. 1, pp. 67-71.
[19] A.P. Buslaev, D.A. Kuchelev, M.V Yashina, "Dynamic systems and mathematical models of information traffic," *T-Comm*. 2018. Vol. 12. No. 3, pp. 22-38.

Information about authors:
Alexander S. Zinchenko, *PhD in Economics, Associate Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*
Marina V. Yashina, *Doctor of Technical Sciences, Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI); Moscow Aviation Institute (National Research University); Moscow Technical University of Communications and Informatics,Moscow, Russia*
Adelia Yu. Burova, *Senior Lecturer, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*