

ГРУППОВЫЕ ПОТОКИ В СИСТЕМАХ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ: МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАКЕТНОЙ РЕАЛЬНОСТИ В ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЯХ

DOI: 10.36724/2072-8735-2026-20-6-30-43

Лихтциндер Борис Яковлевич,
Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия,
lixt@psuti.ru

Manuscript received 17 March 2026;
Accepted 28 May 2026

Тетюев Михаил Петрович,
Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия,
yhyr@mail.ru

Ключевые слова: системы массового обслуживания, групповые потоки, групповой пуассоновский поток, групповой детерминированный поток, смешанный групповой поток, квазипуассоновский поток, парный групповой поток, гиперэкспоненциальный поток, интервальный метод анализа, формула Полячека-Хинчина, средняя длина очереди, видеотрафик

Васильев Александр Протальонович,
Московский технический университет связи
и информатики, Москва, Россия

В данной статье рассматриваются системы массового обслуживания (СМО) с групповыми (пачечными) входными потоками, в которых заявки поступают не по отдельности, а пачками. Целью работы является систематизация моделей групповых потоков, получение аналитических выражений для средней длины очереди и дисперсии в одноканальной СМО с постоянным временем обслуживания ($G/D/1$). Основу методологии составляет интервальный метод анализа, позволяющий описывать неординарные потоки через распределение числа заявок, поступающих за время обслуживания одной заявки. В работе рассмотрены следующие модели: групповой пуассоновский поток; смесь группового пуассоновского потока с фоновым ординарным пуассоновским потоком; групповой детерминированный поток с постоянными интервалами между пачками; смешанный групповой поток, объединяющий детерминированную и пуассоновскую компоненты; квазипуассоновский поток с одинаковыми паузами, где каждый межпачечный интервал содержит постоянную составляющую; парное обобщение такого потока, в котором за один цикл формируются две пачки; гиперэкспоненциальный групповой поток второго порядка. Различные модели позволяют аппроксимировать различные виды поведения реального трафика. Для каждой модели получены аналитические выражения, связывающие среднюю длину очереди и коэффициент загрузки. Достоверность предложенных моделей подтверждена результатами имитационного моделирования, показавшими высокую степень соответствия аналитических и экспериментальных данных во всём диапазоне рабочих нагрузок. Также рассмотрена аппроксимация реального видеотрафика стандарта H.264 с помощью группового пуассоновского потока. Показано, что данная модель существенно точнее описывает среднюю длину очереди и её дисперсию по сравнению с ординарным пуассоновским потоком. Предложенные модели представляют собой аналитически простой, но достаточно точный инструмент для расчёта очередей в системах с групповым поступлением заявок, пригодный для аппроксимации реальных потоков.

Информация об авторах:

Лихтциндер Борис Яковлевич, д.т.н., профессор, главный научный сотрудник научно-исследовательской лаборатории "Инфокоммуникационные технологии" Поволжского государственного университета телекоммуникаций и информатики (ПГУТИ), г. Самара, Россия

Тетюев Михаил Петрович, аспирант ПГУТИ, г. Самара, Россия

Васильев Александр Протальонович, Московский технический университет связи и информатики, Москва, Россия

Для цитирования:

Лихтциндер Б.Я., Тетюев М.П., Васильев А.П. Групповые потоки в системах массового обслуживания: моделирование пакетной реальности в телекоммуникациях // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2026. Том 20. №6. С. 30-43.

For citation:

B.Ya. Likhtsinder, M.P. Tetuev, A.P. Vasiliev, "Group Flows In Queuing Systems: Modelling Packet Reality In Telecommunications," T-Comm, 2026, vol. 20, no.6, pp. 30-43. (in Russian)

Введение

Теория систем массового обслуживания (СМО) представляет собой математический аппарат для анализа процессов, где возникают очереди заявок. Основой любой модели СМО является математическое описание входящего потока заявок на обслуживание. Эволюция моделей потоков отражает стремление исследователей адекватно описать реальные процессы, которые зачастую существенно отклоняются от идеализированных предположений. Исторически первой и наиболее глубоко изученной моделью стал пуассоновский (простейший) поток, который лег в основу классической теории СМО, разработанной А.Я. Хинчиным, А.К. Эрлангом и другими учеными в начале XX века [1, 2]. Основные свойства пуассоновского потока это: стационарность (вероятностные характеристики не зависят от времени), ординарность (вероятность появления двух и более событий в малый промежуток времени пренебрежимо мала), отсутствие последствия (интервалы между событиями независимы и распределены экспоненциально). Пуассоновский поток стал основополагающим благодаря своей математической «доступности» – марковскому свойству, которое позволяет строить аналитические решения для широкого класса СМО.

Модели М/М/1, М/М/п и их производные до сих пор остаются важным инструментом предварительного анализа систем. По мере применения теории СМО к реальным телекоммуникационным системам обнаружились существенные ограничения пуассоновской модели. Реальные потоки пакетов часто демонстрировали высокую пачечность, зависимость интенсивности от времени, корреляцию между интервалами. Это привело к развитию немарковских моделей потоков: рекуррентные потоки, в которых интервалы между событиями независимы и одинаково распределены, но не обязательно по экспоненциальному закону [3].

Эти потоки стали важным обобщением, сохраняющим свойство отсутствия последствия при произвольном распределении интервалов. Были разработаны специализированные классы потоков, такие как модулированные марковские потоки (ММРР), где интенсивность событий управляется внешним марковским процессом с конечным числом состояний. ММРР позволил моделировать коррелированные потоки с переменной интенсивностью, находящие применение в телекоммуникациях для описания трафика с "пачечной" структурой [4].

К марковским моделям также относятся многоканальные СМО с групповым обслуживанием, зависящим от размера группы, и нетерпеливостью заявок [5, 6]. С развитием интернет-трафика в 1990-х годах были обнаружены потоки с долгосрочной зависимостью и самоподобием [7]. Модели на основе фрактального броуновского движения и устойчивых распределений Леви позволили адекватно описывать сетевой трафик, демонстрирующий масштабно-инвариантные свойства. Однако указанные модели оказались достаточно сложными и в настоящее время не получили значительного развития. Аналитические методы исследования потоков развивались от преобразований Лапласа-Стилтьеса к матрично-аналитическим методам, разработанным М.Ф. Нейтсом [8].

1 Классическая пуассоновская модель

В литературе сложились противоположные взгляды на применимость пуассоновской модели к суммарному трафику. Как показано в [9], неизменная пуассоновская модель сохраняет объяснительную силу при анализе суммарного трафика на определённых временных масштабах. Анализ магистральных каналов связи стандарта OC48 и WIDE демонстрирует, что на интервалах меньше секунды распределение промежутков времени между пакетами является близким к экспоненциальному, а корреляция между соседними интервалами и размерами пакетов являются статистически незначимыми (функция автокорреляции не выходит за пределы 95%-го доверительного интервала). Однако в [10] приводится, что даже на магистральном трафике (измерения на оптическом канале Gigabit Ethernet с наносекундной точностью) гипотеза о пуассоновском процессе отвергается формальными статистическими тестами. Авторы отмечают, что огрубление временных меток до микросекунд может скрывать зависимость.

В трассах данной работы обнаружено самоподобие и нетривиальное мультифрактальное масштабирование, что указывает на наличие долговременной зависимости, которую классическая пуассоновская модель по определению не способна уловить. Сравнение моделей показало, что классическая пуассоновская модель систематически недооценивает вероятность блокировки в многоканальных системах и вероятность переполнения буфера по сравнению с исходными трассами, хотя и имеет степень приближения, способную описывать определённые закономерности на масштабах меньше секунды.

Таким образом, несмотря на противоположность исходных посылок, результаты рассмотренных исследований сходятся в том, что пуассоновские модели способны к частичному описанию реального трафика. В настоящей работе предлагается модифицировать пуассоновскую модель таким образом, чтобы она была способна учитывать определенные зависимости и закономерности. Такая модификация позволяет модели оставаться достаточно простой, но при этом описывать конкретные сценарии трафика с учётом зависимостей.

2 Интервальный анализ СМО

В данной работе используются интервальные методы анализа, так как они оперируют неординарными потоками заявок. Поэтому в дальнейшем рассматривается анализ интервальными методами СМО с групповыми входными потоками заявок (пакетов, кадров) [11].

Классическая теория СМО предполагает рассмотрение двух распределений вероятностей: распределения вероятностей длин временных интервалов между соседними заявками и распределения вероятностей времен обслуживания заявок. При использовании интервального метода предполагается анализ одной характеристики – вероятностного распределения числа заявок, приходящих за период обслуживания одной заявки.

Заявки, поступающие в течение интервала обслуживания одной заявки, образуют неординарный поток, хорошо согласующийся с групповыми потоками, рассматриваемыми в данной работе. С помощью интервального метода была получена зависимость среднего размера очереди от выбранного коэффициента загрузки [11]:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D_m(\rho) + 2Cov_{q_{i-1}m_i}(\rho)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}, \quad (1)$$

Здесь ρ – коэффициент загрузки. Отношение интенсивности входящего потока заявок к пропускной способности системы. При $\rho \geq 1$ интенсивность поступления превышает возможности обслуживания, что приводит к неограниченному росту очереди и превышению пропускной способности системы. $m_i(\rho)$ – зависимость числа заявок приходящих на i -й интервал. $Cov_{q_{i-1}m_i}$ – ковариация случайных величин – количества заявок, поступивших за i -й интервал, и длины очереди на предшествующем интервале. Определяется выражением:

$$Cov_{q_{i-1}m_i}(\rho) = [\overline{q_{i-1}(\rho)}] \cdot [\overline{m_i(\rho)} - \rho].$$

Соотношение (1) – это обобщение формулы Полячека-Хинчина и является справедливым для любых стационарных потоков заявок при условии фиксированного значения коэффициента загрузки. Если в потоке отсутствуют корреляционные свойства $Cov_{q_{i-1}m_i}(\rho) = 0$, то получим:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D_m(\rho)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}, \quad (2)$$

При анализе очередей в СМО с групповыми потоками ключевой является формула (1). Так как для пуассоновского потока заявок $D_m(\rho) = \rho$, то формула (2) принимает вид известного соотношения:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}. \quad (3)$$

3 Групповые потоки

Одним из видов потоков, наиболее полно отражающих свойства пачечного трафика телекоммуникационных систем, следует считать рассматриваемые в данной работе групповые потоки.

В телекоммуникационных сетях с пакетной коммутацией (сети Ethernet, IP) пакеты данных передаются группами, образуя групповые (пачечные) потоки заявок. В СМО различают групповые входные потоки (Arrival Batch), когда заявки прибывают группами случайного или фиксированного размера, и групповое обслуживание (Service Batch), когда канал обслуживания за одну операцию может обслужить несколько заявок одновременно. Комбинация этих двух типов создает богатый класс моделей, более адекватно отражающих сложные реальные системы.

Для описания таких СМО используется расширенная нотация Кендалла. Классическая запись A/B/m дополняется двумя параметрами: G^b : групповой вход, где b – распределе-

ние размера группы входного потока (математическое ожидание $G(B)$). Например, означает групповой пуассоновский поток, с распределением числа заявок в группах – b и экспоненциальным распределением времен обслуживания в одноканальной СМО.

Пусть имеется пуассоновский поток независимых событий с интенсивностью λ . Каждое i -е событие ($i = 1, 2, \dots$) означает одновременное поступление пачки пакетов, подлежащих передаче. Здесь размеры пачек B_i – независимые одинаково распределённые случайные величины с распределением $\Pr\{B_i = k\} = f_k, k = 1, 2, \dots$. Время передачи каждого пакета задаётся дискретным распределением $\Pr\{\tau_i = t_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots, K$, причём величины независимы и одинаково распределены.

Для дальнейшего расчета необходимо вывести моменты $m(\tau_i)$ с помощью производящих функций. Определим производящую функцию размера пачки как $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k z^k$.

В таком случае для $m(\tau_i)$ имеем:

$$G_{m(\tau_i)}(z) = \sum_{k=1}^K \Pr\{\tau_i = t_k\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t_k)^n}{n!} e^{-\lambda t_k} (f(z))^n = \sum_{k=1}^K p_k e^{\lambda t_k (f(z)-1)}$$

Здесь использовались свойства пачек пуассоновского потока:

$$\left. \frac{\partial G_{m(\tau_i)}(z)}{\partial z} \right|_{z=1} = \sum_{k=1}^K p_k \lambda t_k f'(z) e^{\lambda t_k (f(z)-1)} \Big|_{z=1} = \lambda \bar{B} \sum_{k=1}^K p_k t_k = \lambda \bar{\tau} \bar{B} = \overline{m(\tau_i)}$$

$$m(\tau_i) = \lambda \bar{\tau} \bar{B}$$

В свою очередь $\bar{B}$ и $\bar{\tau}$ это математические ожидания соответствующих случайных величин, аналогично:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 G_{m(\tau_i)}(z)}{(\partial z)^2} \right|_{z=1} &= \sum_{k=1}^K p_k \left(\lambda t_k f''(z) + (\lambda t_k f'(z))^2 \right) e^{\lambda t_k (f(z)-1)} \Big|_{z=1} = \\ &= \lambda \bar{\tau} (\bar{B}^2 - \bar{B}) + \bar{\tau}^2 (\lambda \bar{B})^2 = \\ &= \overline{m^2(\tau_i)} - \overline{m(\tau_i)}, \overline{m^2(\tau_i)} = \lambda \bar{\tau} \bar{B}^2 + \bar{\tau}^2 (\lambda \bar{B})^2 \end{aligned}$$

В результате получаем:

$$D(m(\tau_i)) = \lambda \bar{\tau} \bar{B}^2 + (\lambda \bar{B})^2 D(\tau)$$

Если принять время обслуживания заявок постоянным, то учитывая, что $B \lambda \tau = \rho$, получим:

$$D_m(\rho) = B(1 - \nu_B^2)\rho, \quad (5)$$

где ν_B^2 – квадрат коэффициента вариации размеров пачек. На рисунках 1 и 2 прямой линией обозначена зависимость для размера пачки $B=10$, точечной линией для $B=20$, точкой-тире $B=40$, тире $B=80$. При этом, на рис. 1 показаны графики зависимости дисперсии от коэффициента загрузки при различных размерах пачек B . Зависимости, как и следовало ожидать, линейные.

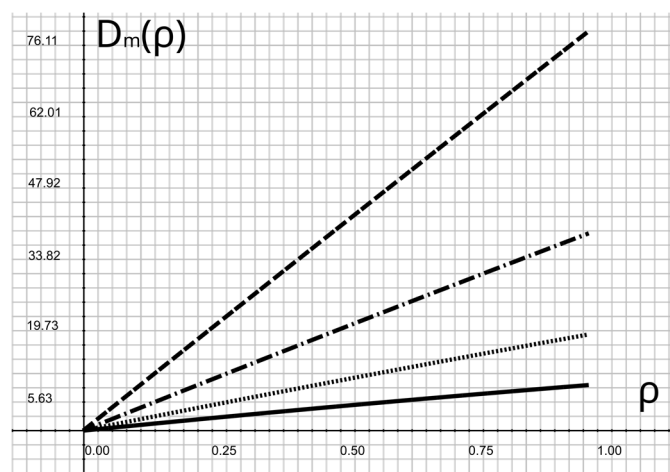


Рис. 1. Зависимости дисперсии $D_m(\rho)$ от коэффициента загрузки ρ для указанных выше различных значений параметров B .

Если подставить выражения (4) и (5) в (2), результирующим выражением будет:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{B(1 - \nu_B^2)\rho}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2} \quad (6)$$

Формула (6) даёт возможность вычислять средние размеры очередей для СМО, на вход которых поступают групповые пуассоновские потоки [12]. Зависимость средней очереди $\overline{q(\rho)}$ от коэффициента загрузки приведена на рис. 2.

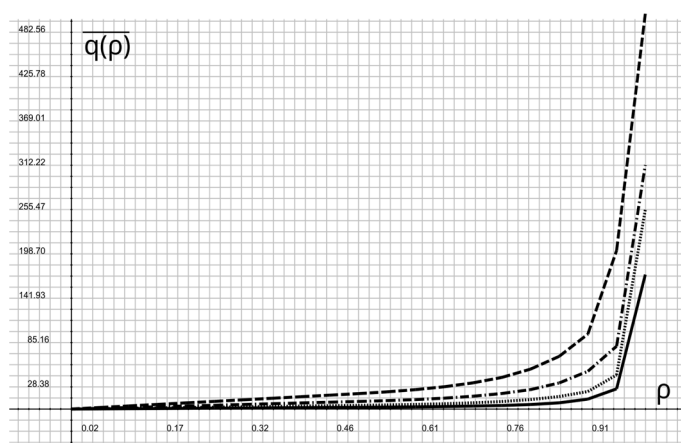


Рис. 2. Кривые зависимостей средней длины очереди $\overline{q(\rho)}$ от коэффициента загрузки ρ для группового пуассоновского потока для указанных выше значений параметров B .

4 Второй начальный момент очередей в СМО с групповыми пуассоновскими потоками

Второй начальный момент очереди можно определить используя уравнение баланса [13]:

$$\begin{aligned} q_i(\rho) &= q_{i-1}(\rho) + m_i(\rho) - \delta_i(\rho); \\ \delta_i(\rho) &= 0, \text{ если } q_{i-1}(\rho) = m_i(\rho) = 0; \\ \delta_i(\rho) &= 1, \text{ в противном случае.} \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь, как и прежде, $m_i(\rho)$ – число поступивших заявок, $q_i(\rho)$ – значение очереди, а $\delta_i(\rho)$ – количество заявок, обработанных за временной интервал – τ_i .

При имеющихся ограничениях:

$$\begin{aligned} \delta_i^k(\rho) &= \delta_i(\rho), \quad m_i(\rho)\delta_i(\rho) = m_i(\rho), \\ q_{i-1}(\rho)\delta_i(\rho) &= q_{i-1}(\rho), \quad \overline{\delta_i(\rho)} = \overline{m_i(\rho)}. \end{aligned} \quad (8)$$

В процессе возведения уравнения (7) в третью степень, для сокращения записи коэффициент загрузки ρ опускается:

$$q_i^3 = q_{i-1}^3 + 3q_{i-1}^2(m_i - \delta_i) + 3q_{i-1}(m_i - \delta_i)^2 + (m_i - \delta_i)^3.$$

В результате соответствующих преобразований, с учетом ограничений (8), получается следующее:

$$\begin{aligned} q_i^3 &= q_{i-1}^3 + 3q_{i-1}^2 m_i - 3q_{i-1}^2 \\ &\quad + 3q_{i-1}(m_i^2 - 2m_i + 1) + \\ &\quad + (m_i^3 - 3m_i^2 + 3m_i - \delta_i) \end{aligned}$$

Произведем усреднение обеих частей:

$$\begin{aligned} 3\overline{q_{i-1}^2} (1 - \overline{m_i}) &= 3\overline{q_{i-1}^2} (\overline{m_i^2} - 2\overline{m_i} + 1) + \\ &\quad + (\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}) \\ 3\overline{q_{i-1}^2} (1 - \overline{m_i}) &= 3\overline{q_{i-1}^2} (\overline{D_m} + \overline{m_i^2} - 2\overline{m_i} + 1) + \\ &\quad + (\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}) \\ 3\overline{q_{i-1}^2} (1 - \overline{m_i}) &= 3\overline{q_{i-1}^2} \overline{D_m} + 3\overline{q_{i-1}^2} (\overline{m_i} - 1)^2 + \\ &\quad + (\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}) \end{aligned}$$

Далее, необходимо определить $\overline{q_{i-1}^2}$.

$$\begin{aligned} \overline{q_{i-1}^2} &= \frac{\overline{q_{i-1}} \overline{D_m}}{(1 - \overline{m_i})} + \overline{q_{i-1}} (1 - \overline{m_i}) + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})} \\ \overline{q_{i-1}^2} &= \overline{q_{i-1}} \left[\frac{\overline{D_m}}{(1 - \overline{m_i})} + (1 - \overline{m_i}) + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})} \right] \\ \overline{q_{i-1}^2} &= \overline{q_{i-1}} \frac{\overline{D_m} + (1 - \overline{m_i})^2}{(1 - \overline{m_i})} + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})} \\ \overline{q_{i-1}^2} &= \frac{\overline{q_{i-1}}}{(1 - \overline{m_i})} [\overline{D_m} + (1 - \overline{m_i})^2] + \frac{\overline{m_i^3} - 3\overline{m_i^2} + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})} \end{aligned}$$

Третий начальный момент $\overline{m_i^3}$ выражается через третий центральный момент:

$$\mu_3 = \overline{(m_i - \overline{m_i})^3},$$

$$\overline{m_i^3} = \overline{(m_i - \overline{m_i})^3} + 3\overline{m_i}D_m + \overline{m_i^3} = \mu_3 + 3\overline{m_i}D_m + \overline{m_i^3}.$$

В результате подстановки получается следующее:

$$\overline{q_{i-1}^2} = \overline{q_{i-1}} \left[\frac{D_m + (1 - \overline{m_i})^2}{(1 - \overline{m_i})} \right] + \frac{3\overline{m_i}D_m + \overline{m_i^3} - 3D_m - 3\overline{m_i}^2 + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})} + \frac{\mu_3}{3(1 - \overline{m_i})}$$

$$\overline{q_{i-1}^2} = \frac{\overline{q_{i-1}}}{(1 - \overline{m_i})} [D_m + (1 - \overline{m_i})^2] + \frac{\overline{m_i^3} + 3\overline{m_i}D_m - 3\overline{m_i}^2 + 2\overline{m_i}}{3(1 - \overline{m_i})} + \frac{\mu_3}{3(1 - \overline{m_i})}.$$

Ввиду того, что в групповом пуассоновском потоке пачки независимы, то в (1) ковариация равна нулю, в таком случае при подстановке $\overline{q_{i-1}} = \overline{q(\rho)}$ из (1), при учёте, что $\overline{m(\rho)} = \lambda\tau = \rho$, получим:

$$\overline{q^2(\rho)} = \frac{D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)}{2(1 - \rho)^2} [D_m(\rho) + (1 - \rho)^2] + \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)}.$$

Второй начальный момент размера очереди в СМО с групповыми пуассоновскими потоками определяется приведённым ниже соотношением:

$$\overline{q^2(\rho)} = \frac{B\rho - \rho + \rho^2}{2(1 - \rho)^2} [B\rho + 1 - 2\rho + \rho^2] + \frac{\rho^3 + 3B\rho^2 - 3B\rho - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)}.$$

Для простейшего потока $B_m = 1$, $\mu_3(\rho) = \rho$, выражение сводится к известному соотношению:

$$\overline{q^2(\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)^2} (1 - \frac{1}{3}\rho + \frac{1}{3}\rho^2)$$

Таким образом, в последнем случае второй момент зависит исключительно от коэффициента загрузки.

5 Дисперсия очередей в СМО с групповыми пуассоновскими потоками

Определим дисперсию размеров очередей используя как основу следующее соотношение [14]:

$$D_q(\rho) = \overline{q^2(\rho)} - \overline{q(\rho)}^2$$

В результате преобразований и подстановок:

$$\overline{D_q(\rho)} = \frac{D_m(\rho) - \rho(1 - \rho)}{4(1 - \rho)^2} [D_m(\rho) + 2 - 3\rho + \rho^2] + \frac{\rho^3 + 3\rho D_m(\rho) - 3D_m(\rho) - 3\rho^2 + 2\rho}{3(1 - \rho)} + \frac{\mu_3(\rho)}{3(1 - \rho)} \quad (9)$$

Дисперсия в данном случае имеет зависимость от третьего центрального момента.

Применительно к простейшему пуассоновскому потоку выражение (9) становится существенно проще и сводится к известному соотношению:

$$B = 1, D_m(\rho) = \mu_3(\rho) = \rho,$$

$$\overline{D_q(\rho)} = \frac{\rho^2}{2(1 - \rho)^2} (1 - \frac{1}{3}\rho - \frac{1}{6}\rho^2).$$

Характер изменения дисперсии очереди различен для двух типов потоков. Для пуассоновского потока: дисперсия очереди это функция исключительно коэффициента загрузки. Для группового пуассоновского потока: дисперсия выражается через третий центральный момент распределения размеров пачек. Последний, в свою очередь, определяется степенью симметричности этого распределения.

6 Суммирование независимых групповых пуассоновских потоков

Групповые пуассоновские потоки обладают нулевой корреляцией и линейной зависимостью дисперсии от коэффициента загрузки. Кроме того, при мультиплексировании нескольких таких потоков результирующий поток остаётся групповым пуассоновским. В таком случае дисперсия результата равна сумме дисперсий исходных потоков, а коэффициент загрузки – сумме их коэффициентов:

$$D_m(\rho) = \sum_{i=1}^M D_m(\rho_i),$$

$$\rho = \sum_{i=1}^M \rho_i,$$

где M это количество исходных потоков. В соответствии с выражением (2) для одноканальной системы массового обслуживания с групповым пуассоновским потоком средний размер очереди записывается следующим образом:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{\rho E}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2}.$$

Тогда формула для среднего значения очереди суммарного потока принимает вид [15]:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{\sum_{i=1}^M D_m(\rho_i)}{2(1 - \sum_{i=1}^M \rho_i)} - \frac{\sum_{i=1}^M \rho_i}{2} = \frac{\rho \sum_{i=1}^M P_i \frac{\overline{B_i^2}}{B_i}}{2(1 - \rho)} - \frac{\rho}{2}.$$

здесь $P_i = \frac{\rho_i}{\rho}$ это вероятность загрузки i -м потоком.

7 Групповой пуассоновский поток в условиях существования фонового ординарного пуассоновского потока

Как было сказано ранее, групповому пуассоновскому потоку свойственны стационарность и отсутствие последствия, но не свойственна ординарность: допускается одновременное прибытие нескольких заявок («пачки»). Событием является прибытие пачки со случайным числом заявок B_i . В частном случае группового пуассоновского потока пачка, состоит ровно из одной заявки и соответствует обычному пуассоновскому потоку. В общем же случае событие в групповом потоке означает одновременное прибытие пачки, содержащей случайное число заявок (распределённых согласно некоторому закону). При этом сохраняются стационарность и отсутствие последствия, но теряется ординарность (разрешены множественные поступления в один момент). В данной работе за случайное число заявок считается достаточным принять значение B как постоянное означающее среднее количество поступающих пакетов и будет использовано подобным образом в дальнейших формулах, до тех пор, пока не указано иначе.

Как было отмечено ранее, зависимость дисперсии $D_m(\rho)$ от коэффициента загрузки ρ носит линейный характер, что справедливо как для группового, так и для обычного пуассоновского потока. Коэффициенты загрузки одноканальной СМО от группового пуассоновского и от обычного пуассоновского потоков обозначим как ρ_1 и ρ_2 соответственно. Для независимых потоков дисперсия и коэффициент загрузки результирующего потока равны суммам соответствующих величин отдельных потоков

Следовательно, суммарный коэффициент загрузки принимает значение:

$$\rho = \rho_1 + \rho_2 = \rho P + \rho(1 - P),$$

где P – вероятность того, что загрузка обусловлена групповым пуассоновским потоком.

Средняя длина очереди в СМО, на которую поступает смесь указанных потоков, выражается следующим соотношением:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{[P(B-1)+1]\rho}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}, \quad B \geq 1.$$

Числитель в данном выражении линейно связан с коэффициентом загрузки ρ . При значении $P = 1$ фоновый пуассоновский поток отсутствует, и при фиксированном параметре B исходное выражение приводится к виду (1) с нулевой ковариацией. В ситуации, когда $P = 0$, групповой пуассоновский поток отсутствует, и формула переходит в соотношение (3). После соответствующих преобразований исходной зависимости получается выражение, которое учитывает оба рассмотренных случая.

$$\overline{q(\rho)} = \frac{\rho P(B-1) + \rho^2}{2(1-\rho)}, \quad B \geq 1.$$

Изменяя значение коэффициента P , можно регулировать начальный угол наклона кривой, отражающей зависимость

средней длины очереди от загрузки системы. Это позволяет осуществлять настройку параметров модели для аппроксимации реального видеопотока. В данной модели числитель содержит две компоненты: линейную, которая определяется долей группового пуассоновского потока, и квадратичную, описывающую вклад фонового группового потока.

При размере пачки $B=1$, поток становится обычным пуассоновским потоком, и данная формула становится классическим выражением (3).

7.1 Групповые детерминированные и смешанные потоки

В данном разделе вводятся и рассматриваются групповые потоки, характеризующиеся тем, что интервалы между последовательными пачками являются постоянными, то есть носят детерминированный характер. В рассматриваемом частном случае, когда размеры пачек постоянны, формула для средних размеров пачек получается достаточно простой [14]:

$$\overline{q_d(\rho)} = \frac{B\rho}{2} - \frac{\rho}{2}.$$

Указанные зависимости очередей носят линейный характер. Если групповой пуассоновский поток совместить с групповым детерминированным, то такой поток будем называть групповым смешанным. Такой поток может быть использован в качестве моделей пачечного трафика.

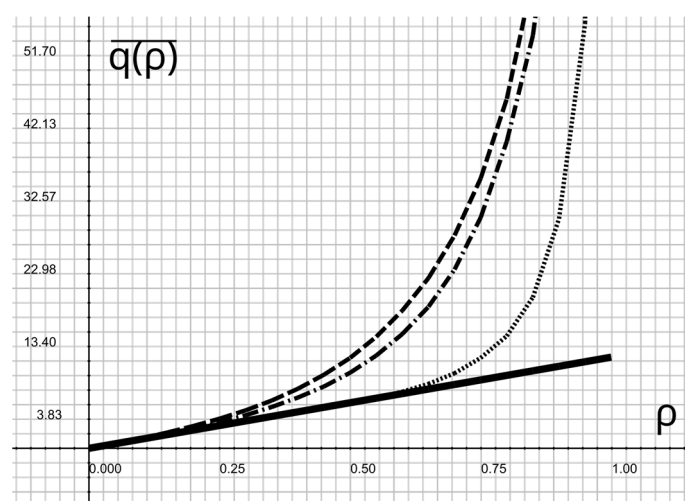


Рис. 3. Кривые зависимостей средних размеров очередей $\overline{q(\rho)}$ от коэффициента загрузки ρ в случае смешанных групповых потоков

На рис. 3 показано, как меняются средние длины очередей в зависимости от коэффициента загрузки ρ для смешанных групповых потоков. Рассматриваются различные соотношения интенсивностей детерминированной и групповой составляющих, число заявок в пачках при этом одинаковое. Верхняя кривая отвечает групповому пуассоновскому потоку, нижняя – групповому детерминированному. Средние кривые отражают зависимости средних размеров очередей $\overline{q(\rho)}$ от коэффициента загрузки ρ для смешанных групповых потоков. Чем ниже кривая, тем больше доля детерминированной части среди смешанного потока.

Если сложить средние значения очередей, получаемые при независимой генерации групповых детерминированных и групповых пуассоновских потоков, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \overline{q(\rho)} &= \overline{q_d(\rho)}P + \overline{q_{II}(\rho)}(1-P); \\ \overline{q(\rho)} &= \frac{B\rho(1-\rho P)}{2(1-\rho)} - \frac{\rho}{2}. \end{aligned} \quad (10)$$

$\overline{q_d(\rho)}$ и $\overline{q_{II}(\rho)}$ – соответствующие средние очереди для групповых детерминированного и пуассоновского случаев. Размеры пачек для обоих потоков принимаются одинаковыми, постоянными и равными B . Вероятность появления интервала детерминированного потока равна P , пуассоновского $(1-P)$. Соотношение (10) даёт достаточно точную оценку средних очередей для смешанных групповых потоков, что подтверждается рисунком 4.

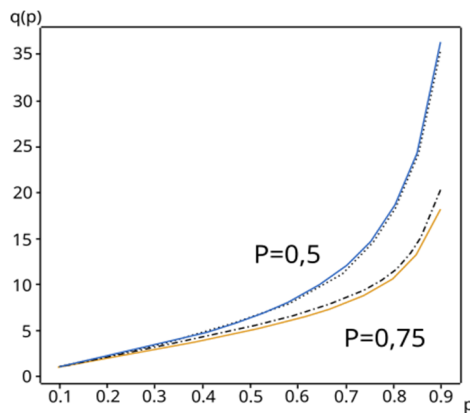


Рис. 4. Сопоставление зависимости средней длины очереди от загрузки прибора, построенной по данным имитационного моделирования, с расчётами по формуле (10). Размер пачки $B = 20$.

8 Групповые квазипуассоновские потоки с одинаковыми паузами

На базе модели группового пуассоновского потока предлагается ее расширение – групповой квазипуассоновский поток, характеризующийся одинаковыми паузами.

Характерной особенностью рассматриваемого группового потока является то, что к каждому экспоненциально

распределенному интервалу добавляется одинаковый и постоянный интервал T . Поступление заявок в данном потоке происходит пачками, где числа заявок в каждой пачке – независимые, одинаково распределённые дискретные случайные величины B_k .

Интервал времени между моментами прибытия последовательных пачек представляет собой сумму экспоненциально распределённой случайной величины с параметром λ и постоянной величины времени T . Поскольку ключевой интерес представляет связь между средней длиной очереди и загрузкой прибора, и при этом временной масштаб не важен, рассматриваемый квазипуассоновский поток может быть описан с помощью двух параметров: B – постоянный размер пачки, $\alpha = \lambda T$ – величина, равная отношению детерминированной паузы к среднему значению времени экспоненциально распределённого интервала.

Для определения параметров модели использовалось обобщение формулы Полячека-Хинчина для системы G/D/1, полученное интервальным методом [16]. В результате получена формула, позволяющая оценить среднюю очередь в СМО G/D/1 в зависимости от коэффициента загрузки прибора. Полученная формула демонстрирует хорошее соответствие с результатами имитационного моделирования.

$$\begin{aligned} \overline{q(\rho)} &= \frac{\rho B - \rho(1-\rho)}{2}, \quad \text{если } \rho \leq \rho_0 \\ \overline{q(\rho)} &= \frac{\rho_0}{\rho} \left(2 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \left(\frac{\rho B - \rho(1-\rho)}{2} \right) + \frac{\rho^* B^* - \rho^*(1-\rho^*)}{2(1-\rho^*)}, \quad \text{если } \rho > \rho_0 \end{aligned} \quad (11)$$

На рис. 5а и 5б линиями изображены выходные данные имитационной модели, маркерами – расчётные точки по формуле (11). При этом, на рисунке 5а звездой обозначены результаты при параметрах $\alpha = 0.5$, треугольником $\alpha = 1$, кругом $\alpha = 2$. Результаты моделирования, обозначенные тире $\alpha = 0.5$, точка-тире $\alpha = 1$ и сплошной $\alpha = 2$ соответственно. На рисунке 5б звездой обозначено оценочное значение с параметром $B=10$, треугольником $B=50$, кругом $B=100$. Результаты моделирования обозначенные тире имеют значение $B=10$, точкой-тире $B=50$ и сплошной $B=100$ соответственно.

Полученное приближение показывает высокую степень соответствия.

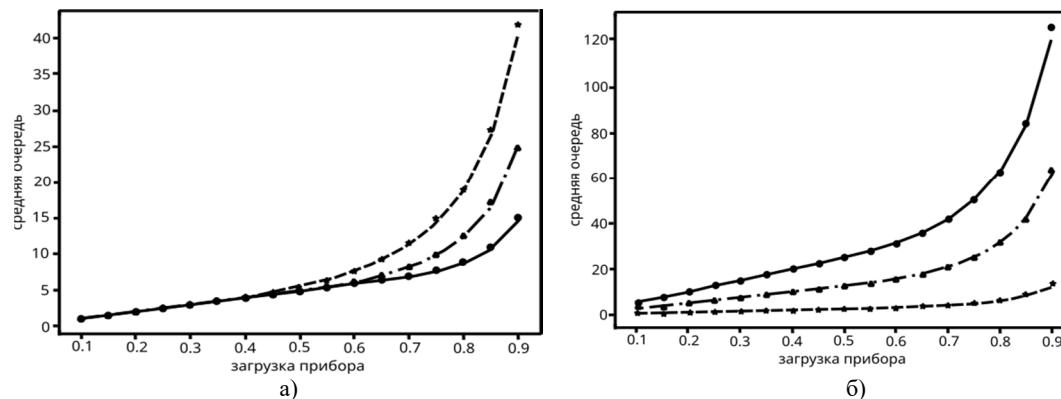


Рис. 5 Сопоставление результатов имитационного моделирования и расчётов по формуле (11) для зависимости средней длины очереди от коэффициента загрузки системы: а) все потоки имеют параметр $B = 20$; б) все потоки имеют параметр $\alpha = 1$.

8.1 Парные групповые квазипуассоновские модели пачечного трафика

Парный групповой квазипуассоновский поток представляет собой модификацию группового пуассоновского потока, в которой каждый межпачечный интервал содержит дополнительную постоянную временную составляющую T . После окончания постоянной составляющей происходит генерация дополнительной пачки заявок. Следовательно, в рамках одного интервала имеется два момента прибытия пачек с размерами B_1 и B_2 .

$$B_1 = \beta B, \quad B_2 = (1 - \beta)B, \quad B_1 + B_2 = B, \quad \beta \in [0, 1].$$

Схема одного цикла парного группового квазипуассоновского потока представлена на рис. 6.

Рассматриваемая модель является модификацией группового квазипуассоновского потока с одинаковыми паузами. При $B_2 = 0$ эта модификация становится аналогичной исходному потоку. В данной модели отражено свойство реального трафика: большие пачки пакетов разделяются на набор нескольких меньших подпачек.

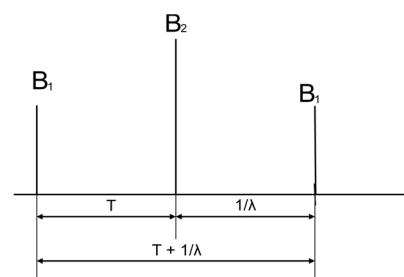


Рис. 6 Схематическое представление временного интервала парного группового квазипуассоновского потока в пределах одного цикла.

Такое разделение снижает пиковую нагрузку и даёт возможность более точно описывать временную протяжённость передачи пакетов в сети.

Вводится ограничение: постоянный интервал T не превышает средней длительности экспоненциальной составляющей для того, чтобы групповой поток не становился излишне детерминированным. Для выражения соотношения постоянного интервала к экспоненциальному используется выражение: $\alpha = \lambda T$. Выражая данный факт через неравенство, получаем: $\alpha \leq 1$.

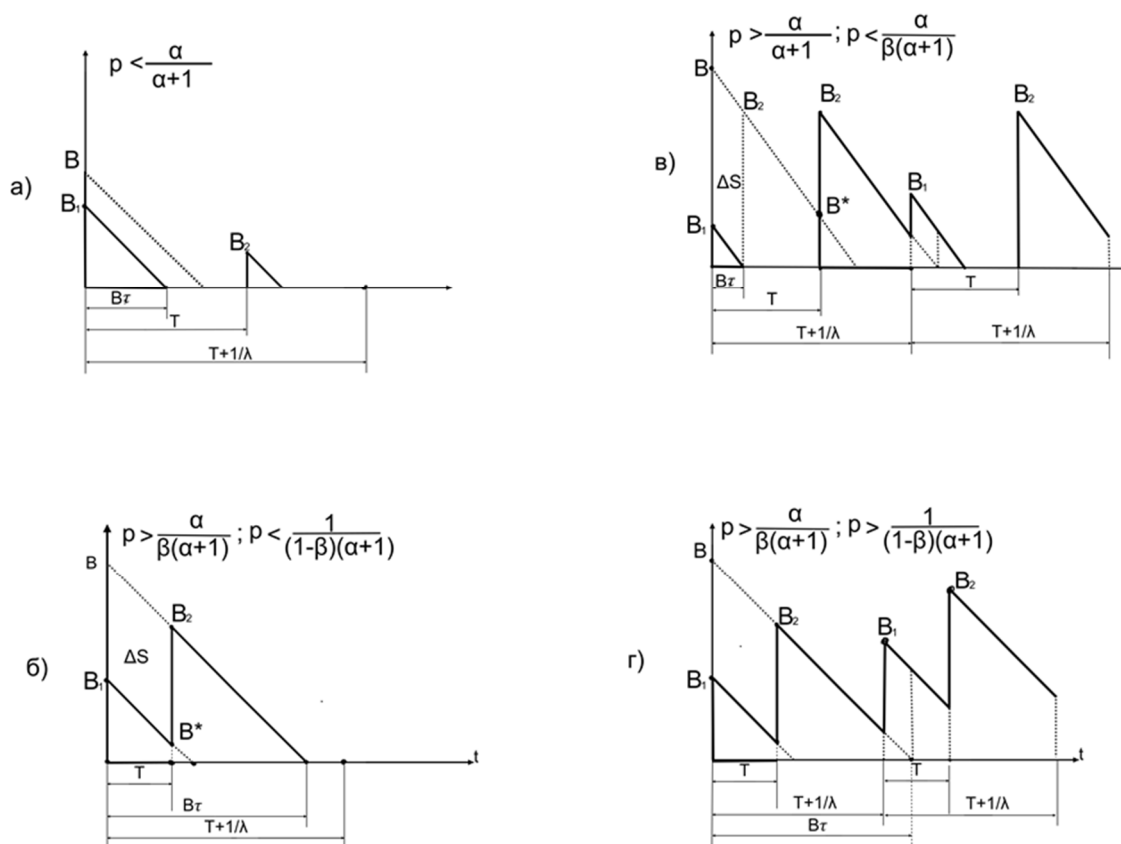


Рис. 7. Изменение числа заявок в системе для различных случаев обработки пачек B_1 и B_2 :

- а) $B = B_1 + B_2$ успевает обработаться за промежуток T ; б) $B = B_1 + B_2$ не успевает обработаться за промежуток T , при этом пачка B_1 не успевает обрабатываться за промежуток T ; в) Пачка $B = B_1 + B_2$ не успевает обработаться за промежуток T , при этом пачка B_1 успевает обрабатываться за промежуток T ; г) $B = B_1 + B_2$ не успевает обработаться за промежуток T , при этом пачки B_1 и B_2 не успевают обрабатываться за соответствующие промежутки T и $\frac{1}{\lambda}$.

Для разработки аналитической модели использовались предположения, схожие с результатами модифицируемой модели, описанной в предыдущем разделе. Рисунок 7 иллюстрирует динамику изменения очереди во времени для анализируемой модели. Величина площади ΔS соответствует преобразованию треугольной области, используемой при вычислении поправочного коэффициента исходной модели.

В зависимости от уровня нагрузки возможно несколько случаев которые необходимо отразить в аналитической модели. В частности, рассматриваются следующие условия: успевает ли быть обслуженной пачка B до окончания промежутка T ; успевают ли быть обслуженными B_1 и B_2 до окончания постоянного промежутка T и до окончания экспоненциального промежутка со средним значением $\frac{1}{\lambda}$ соответственно. В случае г), когда обе пачки B_1 и B_2 не успевают обслужиться в пределах своих интервалов, то очередь растет бесконечно, и определение её среднего значения аналитически теряет практическую ценность. Это связано с тем, что заявки поступают быстрее, чем обрабатываются, поэтому очередь неограниченно растет, а канал оказывается полностью загруженным. Усредненный размер очереди перестает отображать реальное состояние системы.

Таким образом, данные условия можно выразить аналитически с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} B\tau &< T, \\ B_1\tau &< T, \\ B_2\tau &< \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

С практической точки зрения данные условия целесообразно определять через коэффициент загрузки. Для этого можно использовать уже имеющиеся аналитические соотношения модифицируемой модели; они в дальнейшем также будут применяться при расчётах и для преобразования итоговых выражений:

$$\tau = \rho \frac{T + \frac{1}{\lambda}}{B}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \rho^* &= \frac{\rho - \rho_0}{1 - \rho_0}, \\ \rho_0 &= \frac{\alpha}{\alpha + 1} = \frac{T}{T + \frac{1}{\lambda}}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$B^* = \left\lceil B \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) \right\rceil, \quad (14)$$

Тогда ограничения для разных вариантов обработки пачек можно представить в виде следующих аналитических неравенств:

$$\rho < \frac{\alpha}{(\alpha + 1)}, \quad (15)$$

$$\rho < \frac{\alpha}{\beta(\alpha + 1)}, \quad (16)$$

$$\rho < \frac{1}{(1 - \beta)(\alpha + 1)}. \quad (17)$$

При этом, если выполняется условие (15), то выполнится и условие (16), так как $\beta \leq 1$

В случае (а) возможен прямой расчёт средней очереди, исходя из поведения во времени. Цикл включает в себя несколько последовательных интервалов. Средняя длина очереди за цикл представляет собой усреднённую величину очереди за весь цикл работы системы.

Определим среднюю продолжительность цикла и коэффициент нагрузки как:

$$\begin{aligned} T + \frac{1}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda^*}, \\ p &= \lambda^* B \tau. \end{aligned} \quad (18)$$

На основании этого, средняя длина очереди для данного случая определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{q}(\rho) &= (S_{B_1} + S_{B_2}) \lambda^* = \frac{(B_1^2 \tau + B_2^2 \tau)}{2} \lambda^* = \\ &= \frac{(\beta^2 B^2 \tau + (1 - \beta)^2 B^2 \tau)}{2} \lambda^*. \end{aligned}$$

Если учесть (12) или (18), результирующим выражением средней очереди для случая, когда B успевает обработаться за промежуток T , является:

$$\bar{q}(\rho) = \frac{\rho B (1 - 2\beta + 2\beta^2)}{2}.$$

Случаи (б) и (в) можно рассчитать, скорректировав формулу модифицируемой модели. Поправочный коэффициент определяется как:

$$K = \frac{\rho_0}{\rho} \left(2 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) = \frac{S^*}{S},$$

где S^* – площадь трапеции, включающая в себя площадь ΔS , а S – площадь треугольника, равная $S = \frac{TB^2}{2(B - B^*)}$.

Из рисунка 7 видно, что после деления пачки на две составляющие, результирующее соотношение площадей для поправочного коэффициента принимает вид:

$$K = \frac{\Delta S}{S}.$$

При этом в зависимости от условий (16), (17) и (11) величина ΔS будет иметь различное значение.

$$\Delta S = \begin{cases} TB_2, & \begin{cases} \rho > \frac{\alpha}{\beta(\alpha+1)}; \\ \rho < \frac{1}{(1-\beta)(\alpha+1)}. \end{cases} \\ B_2 B_1 \tau, & \begin{cases} \rho < \frac{\alpha}{\beta(\alpha+1)}; \\ \rho > \frac{\alpha}{(\alpha+1)}. \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, коэффициент для случая, когда условия (15) и (16) не выполняются считается следующим образом:

$$K_{1new} = \frac{S^* - \Delta S}{S} = \frac{\frac{(B+B^*)T}{2} + TB_2}{TB^2} = K - \frac{2TB_2(B-B^*)}{TB^2}.$$

Подставим выражение (14) в формулу выше, представив его в виде:

$$\frac{(B-B^*)}{B} = \frac{\rho_0}{\rho}.$$

В результате получаем:

$$K - 2(1-\beta) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right).$$

Если условия (15) и (17) выполняются, но условие (16) не выполняется:

$$\begin{aligned} K_{2new} &= \frac{S^* - \Delta S}{S} = \frac{\frac{(B+B^*)T}{2} + B_2 B_1 \tau}{\frac{TB^2}{2(B-B^*)}} = K - \frac{2B_1 B_2 \tau (B-B^*)}{TB^2} = \\ &= K - \frac{2\beta(1-\beta)\tau(B-B^*)}{T}. \end{aligned}$$

При учете выражений (12), (13) и (14) результирующей формулой для данного случая является: $K - 2\beta(1-\beta)$.

Тогда, если собрать все результирующие вычисления в одно аналитическое выражение, отражающее разрабатываемую модель, получим окончательно (19).

На рисунке 8 приведено сравнение результатов расчета средней длины очереди по формуле (19) с результатами имитационного эксперимента прохождения парного группового квазипуассоновского потока через СМО типа G/D/1. На рисунке 8а приведены примеры для фиксированного суммарного значения B и фиксированного значения α при различных значениях коэффициента β . Верхняя сплошная кривая отражает зависимость для значения $\alpha=1$, средняя $\alpha=0.5$, нижняя $\alpha=0.1$. Коэффициент β определяет соотношение B_1 и B_2 . В предельных случаях, при $\beta=0$, $\beta=1$ парный групповой квазипуассоновский поток сводится к модифицируемому групповому квазипуассоновскому потоку с одинаковыми паузами, а соответствующее аналитическое выражение становится аналогичным выражению (11). На рисунке 8б приведены примеры для фиксированного суммарного значения B и фиксированного значения β при различных значениях коэффициента α . Верхняя сплошная кривая отражает зависимость для значения $\beta=1$, средняя $\beta=0.5$, нижняя $\beta=0.1$. Полученное приближение можно признать вполне удовлетворительным.

$$\overline{q(\rho)} = \begin{cases} \frac{\rho B(1-2\beta+2\beta^2)}{2}, & \left\{ \rho < \frac{\alpha}{(\alpha+1)} \right. \\ \left(\frac{\rho_0}{\rho} \left(2 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) - 2(1-\beta) \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right) \right) \frac{\rho B - \rho(1-\rho)}{2} + \frac{\rho^* B^* - \rho^* (1-\rho^*)}{2(1-\rho^*)}, & \begin{cases} \rho > \frac{\alpha}{\beta(\alpha+1)} \\ \rho < \frac{1}{(1-\beta)(\alpha+1)} \end{cases} \\ \left(\frac{\rho_0}{\rho} \left(2 - \frac{\rho_0}{\rho} \right) - 2\beta(1-\beta) \right) \frac{\rho B - \rho(1-\rho)}{2} + \frac{\rho^* B^* - \rho^* (1-\rho^*)}{2(1-\rho^*)}, & \begin{cases} \rho > \frac{\alpha}{(\alpha+1)} \\ \rho < \frac{\alpha}{\beta(\alpha+1)} \end{cases} \end{cases} \quad (19)$$

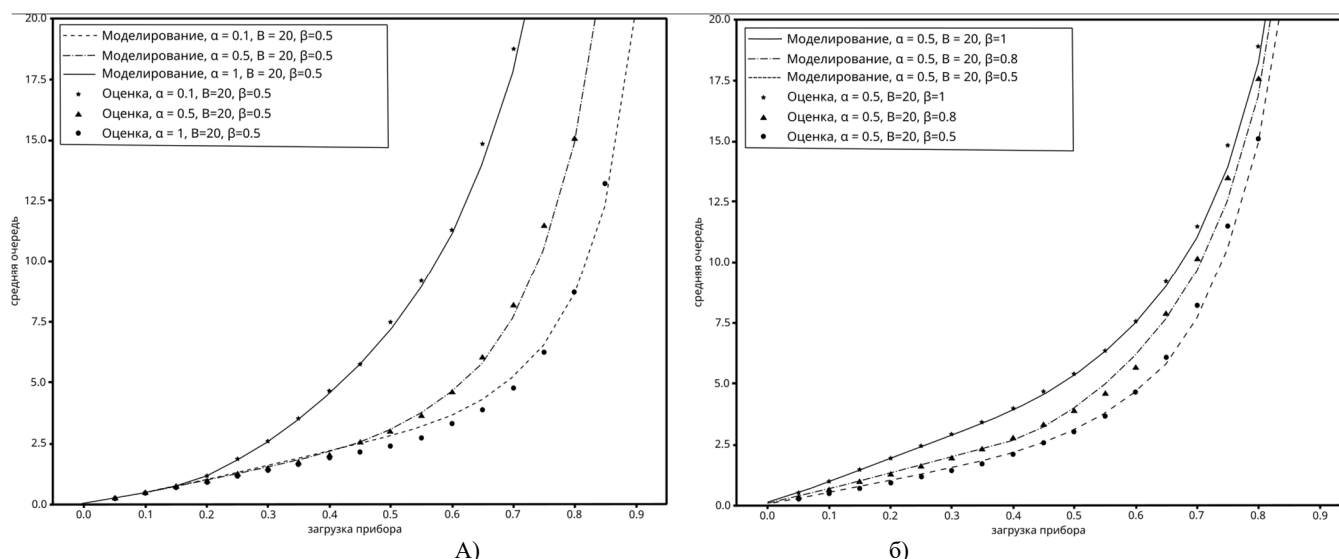


Рис. 8. Зависимость средней очереди от коэффициента загрузки прибора. Сопоставление результатов имитационного эксперимента (сплошные кривые) с вычислениями по формуле (13), указанные с помощью маркеров: а) Для потоков $\beta = 0,5$; б) Для потоков $\alpha = 0,5$.

9 Гиперэкспоненциальные групповые модели трафика

Последовательностью независимых событий, в которой промежутки времени между событиями распределены по гиперэкспоненциальному закону, называется групповой гиперэкспоненциальный поток. При этом каждый промежуток трактуется как отдельная фаза, а порядок следования фаз случаен и не зависит от предыдущих фаз.

Как и в описанных выше групповых потоках событием выступает одиночная заявка. В групповом варианте в каждый момент времени t_k возникает пачка V_k случайных независимых заявок. В данном случае рассматривается поток второго порядка, в котором предполагается всего две фазы, следующие друг за другом с вероятностями p и противоположной $1-p$, соответственно. Законы распределения числа заявок в пачках на разных фазах могут различаться и описываться с помощью двух разных законов обозначаемых f_{1k} и f_{2k} . Функция распределения интервалов между соседними заявками для такого потока имеет вид:

$$F(\theta) = 1 - pe^{(-\lambda_1\theta)} - (1-p)e^{(-\lambda_2\theta)} \quad (20)$$

Здесь, λ_1 и λ_2 это параметры интенсивности для каждой из фаз, а θ это случайный интервал времени между событиями.

При разработке данной модели предполагалась СМО H2/H2/1, в которой заявки поступают и обслуживаются по гиперэкспоненциальным законам второго порядка. С учетом (20) поток обслуживания данной системы задан распределением вида:

$$\Phi(\tau) = 1 - b_1e^{(-B_1\tau)} - b_2e^{(-B_2\tau)}$$

Данная модель исходит из предположения об отсутствии корреляционных зависимостей в потоках, а также о полной независимости поступающих заявок и длительностей их обслуживания. Это сужает сферу применимости гиперэкспоненциальных моделей при анализе реальных потоков в мультисервисных сетях связи.

Для иллюстрации свойств ординарного и группового гиперэкспоненциальных потоков, представлены результаты имитационного моделирования для СМО с детерминированным (постоянным) временем обслуживания на рисунке 9. Сопоставляются два потока:

Групповой гиперэкспоненциальный поток с параметрами $\lambda_1=3, \lambda_2=0.6, \rho = 0.5$, размер пачки $V=10$ и постоянен.

Ординарный гиперэкспоненциальный поток с параметрами $\lambda_1=30, \lambda_2=6, \rho = 0.5$

Из рисунка видно, что для обоих типов потоков угол наклона кривой, отражающей зависимость средней длины очереди от коэффициента загрузки ρ в малых диапазонах коэффициент ρ оказывается близким к нулю.

Для гиперэкспоненциальных моделей (включая групповые разновидности с пачками небольшого размера) характерна лишь ограниченная пригодность к аппроксимации характеристик очередей в мультисервисных системах, что подтверждается описанным выше обстоятельством.

На рисунке 9 для обоих типов потоков в области малых значений коэффициента загрузки наклон кривой (зависимость средней длины очереди от коэффициента загрузки) близок к нулю.

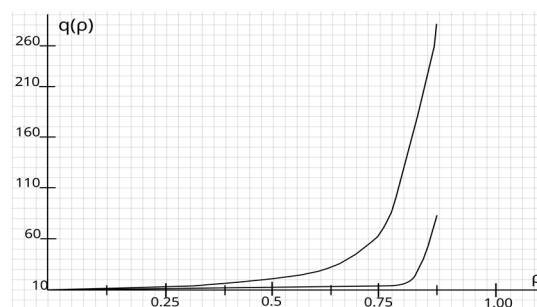


Рис. 9. Графики зависимости средней очереди от коэффициента загрузки ρ : верхняя кривая – ординарный гиперэкспоненциальный поток ($p = 0,5, \lambda_1 = 30, \lambda_2 = 6$), нижняя кривая – групповой гиперэкспоненциальный поток ($p = 0,5, \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 0,6$, фиксированный размер пачки 10)

10 Аппроксимация очередей реального видеотрафика

В ходе имитационного моделирования одноканальной СМО в качестве входного потока использовалась реальная трасса видеоданных, полученная с помощью кодека H.264-1000. Трасса содержала времена поступления пакетов и их размеры (в битах) и вводилась в виде текстового файла.

Путём варьирования скорости обслуживания задавались различные значения коэффициента загрузки ρ в диапазоне от 0,05 до 0,9. Длина очереди измерялась в пакетах, где за размер одного пакета принималось среднее по всей трассе значение. Средний размер очереди вычислялся экспериментально для каждого ρ , и на основе имитационного эксперимента для данных значений эмпирически находились величины:

$$\begin{aligned} \overline{q^*(\rho_i)}, i=1...N_M, \\ D(q^*(\rho_j)), j=1...N_D. \end{aligned}$$

В то же время, аналитически рассчитывались величины $\overline{q(\rho_i)}, i=1...N_M$ и $D(q(\rho_j)), j=1...N_D$ с помощью следующих уравнений:

$$\overline{q(\rho)} = \frac{D(A(\tau))}{(2(1-\rho))} - \frac{\rho}{2} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} D(q) = & \frac{(D(A(\tau)) - \rho(1-\rho))(D(A(\tau)) + 2 - 3\rho + \rho^2)}{(4(1-\rho)^2)} + \\ & + \frac{(\rho^3 + 3D(A(\tau))\rho - 3D(A(\tau)) - 3\rho^2 + 2\rho)}{(3(1-\rho))} + \\ & + \frac{\mu_3(A(\tau))}{(3(1-\rho))} \end{aligned} \quad (22)$$

В данном контексте $A(\tau)$ это случайная величина, равная числу поступивших заявок на интервале τ . В [13] указан вывод моментов случайной величины. Ниже приводятся результаты:

$$\begin{aligned} \overline{A(\tau)} &= \lambda \tau B = \rho \\ D(A(\tau)) &= \lambda \tau B^2 = \rho B^2 \\ \mu_3(A(\tau)) &= \lambda \tau B^3 = \rho B^3 \end{aligned}$$

Для метода наименьших квадратов использовалась целевая функция от параметра B .

В случае, когда $B=1$ то формула становится выражением для ординарного пуассоновского потока:

$$\begin{aligned} \overline{q(\rho)} &= \frac{\rho^2}{2(1-\rho)}, \\ D(\rho) &= \left(1 - \frac{\rho}{3} - \frac{\rho^2}{6}\right) \frac{\rho^2}{(2(1-\rho)^2)}. \end{aligned} \quad (23)$$

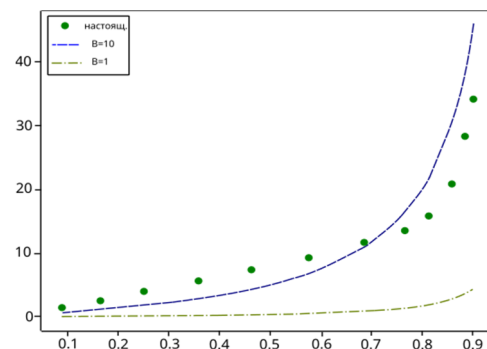


Рис. 10. Изменение средней длины очереди в функции коэффициента загрузки обслуживающего прибора.

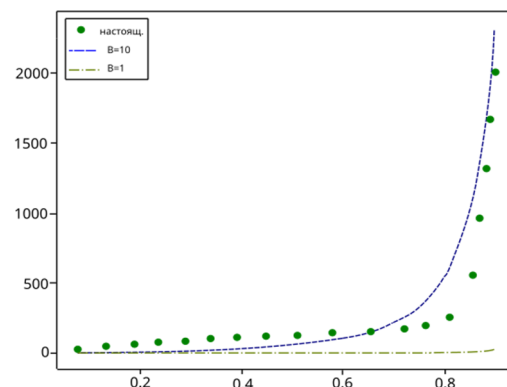


Рис. 11. Изменение дисперсии длины очереди в функции коэффициента загрузки обслуживающего прибора.

В рамках метода наименьших квадратов введена целевая функция, зависящая от параметра B . Указанная функция минимизировалась численно по параметру B , при условии сохранения заданного значения ρ , означающее соответствующее изменение интенсивности λ при изменении B .

$$\begin{aligned} J(B) = & \sum_i^{N_M} (\overline{q^*(\rho_i)} - \overline{q(\rho_i)})^2 + \\ & \sum_j^{N_D} (D(q^*(\rho_j)) - D(q(\rho_j)))^2 \end{aligned} \quad (24)$$

Результаты вычислений отражены на рис. 10 и 11. На них представлены кривые, построенные согласно соотношениям (21) и (22) для того целого значения параметра B , которое находится ближе всего к точке минимума целевой функции (24). Для сравнения на тех же графиках приведены характеристики, соответствующие ординарному пуассоновскому потоку (случай $B=1$ рассчитанные по формулам (23), а именно зависимости средней длины очереди и её дисперсии от коэффициента загрузки ρ). Сопоставление демонстрирует, что использование группового пуассоновского потока обеспечивает заметно более высокую точность аппроксимации для математического ожидания и дисперсии чем ординарный пуассоновский поток. Однако в результате всегда присутствовали отклонения и получить полное совпадение не удалось. Аналогичные закономерности обнаружены и для трасс, полученных с помощью других видеокодеков из семейства H.264.

Помимо указанного, были реализованы вычислительные эксперименты, в которых размер пачки в групповом пуассоновском потоке с заранее заданными вероятностями выбирался одним из двух возможных значений. В роли оптимизируемых параметров выступали сами значения размеров пачек и соответствующие им вероятности. Однако подобная модификация не обеспечила сколь-либо значимого увеличения точности аппроксимации.

11 Выводы

В работе предложены, разобраны и рассмотрены модели для пачечного телекоммуникационного трафика среди них: групповые пуассоновские потоки, групповые детерминированные и смешанные потоки, квазипуассоновские потоки с одинаковыми паузами, парные групповые квазипуассоновские потоки, а также групповые гиперэкспоненциальные потоки.

Для всех рассмотренных моделей приведены аналитические выражения для оценки средней длины очереди в системе массового обслуживания типа G/D/1, подтвержденные результатами имитационного моделирования. Данные потоки могут рассматриваться в качестве моделей, аппроксимирующих характеристики очередей реальных потоков, и предоставляют весьма простые соотношения для аналитических расчетов. Данные модели являются эффективным компромиссом между аналитической простотой и адекватностью описания реального пачечного трафика.

Литература

1. Вишневский В.М., Дудин А.Н. Системы массового обслуживания с коррелированными входными потоками и их применение для моделирования телекоммуникационных сетей // Автоматика и телемеханика. 2017. № 8. С. 3-59.
2. Xiong Y. Research and Application Analysis of the Basic Theory of Queuing Theory // Proceedings of the 2023 International Conference on Image, Algorithms and Artificial Intelligence (ICIAAI 2023). Atlantis Press, 2023, pp. 454-463. DOI: 10.2991/978-94-6463-300-9_46.
3. Назаров А.А., Лотухова С.В. Полумарковские процессы и специальные потоки однородных событий: учебное пособие. Том. гос. ун-т, Ин-т дистанционного образования. Томск: ИДО ТГУ, 2010. URL: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000405029>.
4. Ramaswami V. The N/G/1 queue and its detailed analysis // Advances in Applied Probability, 1980. Vol. 12, no. 1, pp. 222-261. DOI: 10.2307/1426503
5. Lakatos L., Szeidl L., Telek M. Introduction to Queueing Systems with Telecommunication Applications // Springer Science+Business Media, 2013. 388 p. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5317-8>
6. Dudin A., Dudina O. Analysis of a Multi-Server Queue with Group Service and Service Time Dependent on the Size of a Group as a Model of a Delivery System // Mathematics. 2023. Vol. 11, no. 22. P. 4587. DOI: 10.3390/math11224587.
7. Агаларов Я.М. Об однопороговом управлении очередью в системе массового обслуживания с нетерпеливыми заявками, Информ. и её примен., 18:2. 2024, pp. 40-46.
8. Marcel F. Neuts Matrix-analytic methods in queueing theory // European Journal of Operational Research. 1984. Vol. 15, Issue 1, pp. 2-12.
9. Karagiannis T., Molle Mart, Faloutsos Michalis, Broido A. A nonstationary Poisson view of Internet traffic. Proceedings – IEEE INFOCOM. 2004. 3, pp. 1558-1569 vol.3. 10.1109/INFOCOM.2004.1354569.
10. de Vega Rodrigo M., Spadaro S., Remiche M.-A., Careglio D., Barrantes J., Götz J. On the Statistical Nature of highly-aggregated Internet Traffic. In: 4th International Workshop on Internet Performance, Simulation, Monitoring and Measurement, Salzburg, Austria. 2006.
11. Лихтциндер Б.Я. Трафик мультисервисных сетей доступа (интервальный анализ и проектирование). М.: Горячая Линия, 2018. 290 с.
12. Лихтциндер Б.Я., Привалов А.Ю. Обобщение формул для моментов очереди при неординарном пуассоновском потоке для очередей пакетов в системах телекоммуникаций // Пробл. передачи информ., 59:4. 2023. С. 32-37; Problems Inform. Transmission, 59:4 (2023), 243–248
13. Лихтциндер Б.Я., Моисеев В.И., Привалов А.Ю. Вторые моменты очередей в системах массового обслуживания с групповыми пуассоновскими потоками // Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2023): сборник трудов по материалам IX Международной конференции и молодежной школы: в 6 т., Самара, 17-23 апреля 2023 г. Том 5. Самара: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, 2023. С. 50192. EDN TZARVO.
14. Лихтциндер Б.Я., Моисеев В.И. Групповые пуассоновские и гиперпуассоновские модели пакетного трафика // I-methods. 2022. Т. 14, № 3. EDN HMTGQI.
15. Лихтциндер Б.Я., Привалов А.Ю. Об использовании группового пуассоновского потока в имитационном моделировании современного видеотрафика // Инфокоммуникационные технологии. 2023. Т. 21, № 3 (83). С. 11-16.
16. Likhtsinder B.Y., Bakai Yu.O. Models of group poisson flows in telecommunication traffic control // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Технические науки. 2020. Vol. 28, No. 3(67), pp. 75-89. DOI 10.14498/tech.2020.3.5. EDN RYAIHW.
17. Шелухин О.И., Раковский Д.И. Бинарная классификация многоатрибутных размеченных аномальных событий компьютерных систем с помощью алгоритма SVDD // Наукоемкие технологии в космических исследованиях Земли. 2021. Т. 13, № 2. С. 74-84. DOI: 10.36724/2409-5419-2021-13-2-74-84.
18. Maslov A. A., Sebekin G. V., Stepanov S. N. et al. Model of processes for joint maintenance of real-time multiservice traffic and elastic data traffic in a network of low-power mobile subscriber terminals based on high-throughput satellites // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2024. Vol. 18, No. 3, pp. 41-49. DOI 10.36724/2072-8735-2024-18-3-41-49. EDN UFIBHG.

GROUP FLOWS IN QUEUING SYSTEMS: MODELLING PACKET REALITY IN TELECOMMUNICATIONS

Boris Ya. Likhtsinder, State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia, lixt@psuti.ru

Mikhail P. Tetiuev, State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia, yhyr@mail.ru

Alexander P. Vasiliev, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia

Abstract

This paper considers queueing systems with batch (burst) arrival flows, in which requests arrive not individually but in batches. The goal of the work is to systematize models of batch flows and to obtain analytical expressions for the mean queue length and its variance in a single-server queue with constant service time (G/D/1). The methodology is based on the interval method of analysis, which describes non-ordinary flows via the distribution of the number of requests arriving during the service time of a single request. The following models are considered: a batch Poisson flow; a mixture of a batch Poisson flow with a background ordinary Poisson flow; a batch deterministic flow with constant inter-batch intervals; a mixed batch flow combining deterministic and Poisson components; a quasi-Poisson flow with constant pauses, where each inter-batch interval contains a constant component; a pairwise generalization of such a flow, in which two batches are generated per cycle; and a second-order hyperexponential batch flow. Different models allow approximating different types of real traffic behavior. For each model, analytical expressions relating the mean queue length to the load factor are obtained. The validity of the proposed models is confirmed by simulation results, which show a high degree of agreement between analytical and experimental data over the entire range of workloads. An approximation of real H.264 video traffic using a batch Poisson flow is also considered. It is shown that this model describes the mean queue length and its variance much more accurately than an ordinary Poisson flow. The proposed models represent an analytically simple yet sufficiently accurate tool for calculating queues in systems with batch arrivals, suitable for approximating real traffic.

Keywords: queueing systems, batch flows, batch Poisson flow, batch deterministic flow, mixed batch flow, quasi-Poisson flow, paired batch flow, hyperexponential flow, interval analysis method, Pollaczek-Khinchin formula, mean queue length, video traffic

References

- [1] V. M. Vishnevskii, A. N. Dudin, "Queueing systems with correlated arrival flows and their applications to modeling telecommunication networks", *Avtomat. i Telemekh.*, 2017, no. 8, 3-59; *Autom. Remote Control*, 78:8 (2017), 1361-1403.
- [2] Y. Xiong, "Research and application analysis of the basic theory of queueing theory," in *Advances in Computer Science Research*, Dordrecht: Atlantis Press International BV, 2023, pp. 454-463, doi: 10.2991/978-94-6463-300-9_46
- [3] A. A. Nazarov and S. V. Lopukhova, "Semi-Markov processes and special flows of homogeneous events: a textbook," *Tomsk State University, Institute of Distance Education*, Tomsk, Russia, 2010. [Online]. Available: <http://vital.lib.tsu.ru/vital/access/manager/Repository/vtls:000405029>
- [4] V. Ramaswami, "The N/G/1 queue and its detailed analysis," *Adv. Appl. Probab.*, vol. 12, no. 1, pp. 222-261, 1980, doi: 10.2307/1426503
- [5] L. Lakatos, L. Szeidl, and M. Telek, *Introduction to queueing systems with telecommunication applications*, 2013th ed. New York, NY: Springer, 2012, doi: 10.1007/978-1-4614-5317-8
- [6] S. Dudin and O. Dudina, "Analysis of a multi-server queue with group service and service time dependent on the size of a group as a model of a delivery system," *Mathematics*, vol. 11, no. 22, p. 4587, 2023, doi: 10.3390/math11224587
- [7] "On single-threshold queue management in a queueing system with impatient customers," *Inform. Appl.*, 2024, doi: 10.14357/19922264240206
- [8] Neuts, Marcel F., 1984. "Matrix-analytic methods in queueing theory," *European Journal of Operational Research*, Elsevier, vol. 15(1), pp. 2-12, January.
- [9] T. Karagiannis, M. Molle, M. Faloutsos, and A. Broido, "A nonstationary poisson view of internet traffic," in *IEEE INFOCOM 2004*, 2004.
- [10] M. de Vega, S. Spadaro, M. A. Remiche, D. Careglio, J. Barrantes, J. Goetz, "On the Statistical Nature of Highly-Aggregated Internet Traffic", *4th International Workshop on Internet Performance, Simulation, Monitoring and Measurement*, Salzburg, Austria, February 27-28, 2006.
- [11] B.Ya. Lihtcinder, "Traffic of multiservice access networks (interval analysis and design)," Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2018. 290 p. (In Russian)
- [12] B. Y. Lichtzinder and A. Y. Privalov, "Generalization of formulas for queue length moments under nonordinary poissonian arrivals for batch queues in telecommunication systems," *Probl. Inf. Transm.*, vol. 59, no. 4, pp. 243-248, 2023, doi: 10.1134/s003294602304004
- [13] B. Ya. Likhtsinder, V. I. Moiseev, and A. Yu. Privalov, "Second moments of queues in queueing systems with group Poisson flows," in *ITNT-2023*, Samara, Russia, Apr. 17-23, 2023, vol. 5, p. 50192. [Online]. Available: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=54700454> (Accessed: May 5, 2026).
- [14] B. Ya. Likhtsinder and V. I. Moiseev, "Group Poisson and hyperPoisson arrival process teletraffic models," *I-methods*, vol. 14, no. 3, 2022.
- [15] "Use of group Poisson flow in simulation modeling of modern video traffic," *Infokommunikacionnye Tehnol.*, pp. 11-16, 2024., doi: 10.18469/ikt.2023.21.3.02
- [16] B. Y. Likhtsinder and Y. O. Bakai, "Models of group poisson flows in telecommunication traffic control," *Vestnik of Samara State Technical University. Technical Sciences Series*, vol. 28, no. 3, pp. 75-89, 2020., doi: 10.14498/tech.2020.3.5
- [17] O. I. Sheluhin, D. I. Rakovskiy, "Binary classification of multi-attribute tagged data about anomalous events in computer systems using the SVDD algorithm," *H&ES Research*, vol. 13, no. 2, pp. 74-84, 2021. Doi: 10.36724/2409-5419-2021-13-2-74-84.
- [18] A.A. Maslov, G.V. Sebekin, S.N. Stepanov, A.O. Shchurkov, A.P. Vasilyev, "Model of processes for joint maintenance of real-time multiservice traffic and elastic data traffic in a network of low-power mobile subscriber terminals based on high-throughput satellites," *T-Comm*. 2024. vol. 18, no.3, pp. 41-49. DOI: 10.36724/2072-8735-2024-18-3-41-49.

Information about authors:

Boris Ya. Likhtsinder, Chief Researcher of the Infocommunication Technologies Research Laboratory, Professor of Networks and Communication Systems Department, Doctor of Technical Science., Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia

Mikhail P. Tetiuev, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia

Alexander P. Vasiliev, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia