

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ФАЗОВЫМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

DOI: 10.36724/2072-8735-2026-20-7-46-54

Тарасов Вениамин Николаевич,
Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия,
veniamin_tarasov@mail.ru

Manuscript received 14 April 2026;
Accepted 17 June 2026

Бахарева Надежда Федоровна,
Поволжский государственный университет
телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия,
nadin1956_04@inbox.ru

Ключевые слова: фазовые распределения Кокса,
системы массового обслуживания, спектральный метод
решения уравнения Линдли, коэффициент вариации,
телетрафик

В работе демонстрируются полученные результаты анализа систем массового обслуживания (СМО) общего вида, которые описываются фазовыми распределениями Кокса второго порядка $C2/C2/1$. О применении фазовых распределений в теории массового обслуживания известно давно. Этот класс распределений подходит в качестве математического аппарата для анализа телетрафика сетей будущего поколения, характеризующегося высокой вариативностью и обладающего эффектом самоподобия. Для нахождения среднего времени ожидания требований в очереди использован спектральный метод для решения интегрального уравнения Линдли с нахождением нулей и полюсов спектрального разложения в виде отношения рациональных функций, которые в данном случае сводятся к полиномам четвертой степени. Данный метод менее трудоемкий, чем классический матрично-геометрический метод, в котором используются операции Кронекера и итерации. В работе представлена численно-аналитическая модель для среднего времени ожидания требований в очереди для системы с распределениями Кокса второго порядка. Для оценки точности полученного решения проведены вычислительные эксперименты для малых, средних и высоких значений коэффициентов вариаций временных интервалов и загрузки системы. Полученные данные позволяют определить оценки производительности узлов коммутации при росте стохастической неопределенности телетрафика. Следовательно, пренебрежение фазовой структурой законов распределений СМО при проектировании высоко нагруженных систем различного назначения ведет к недооценке задержек пакетов в узлах коммутации во много раз. Сравнение с близкими системами демонстрирует полную адекватность полученных результатов.

Информация об авторах:

Тарасов Вениамин Николаевич, Заслуженный работник высшей школы РФ, доктор технических наук, профессор кафедры информатики и робототехнических систем, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия. ORCID: 0000-0002-9318-0797

Бахарева Надежда Федоровна, Доктор технических наук, профессор кафедры информатики и робототехнических систем, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия. ORCID: 0000-0002-9850-7752

Для цитирования:

Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф. Исследование систем массового обслуживания с фазовыми распределениями // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2026. Том 20. №7. С. 46-54.

For citation:

V. N. Tarasov, N. F. Bakhareva. "Study of Queueing Systems with phase Distributions," T-Comm, 2026, vol. 20, no.7, pp. 46-54. (in Russian)

Введение

Усложнение структуры телетрафика характерная черта современных сетей телекоммуникаций и эмпирические исследования однозначно демонстрируют, что коэффициент вариации интервалом между поступлениями пакетов значительно может превышать единицу ($cv > 1$), что свидетельствует о наличии тяжелых хвостов в распределениях. Для математического описания таких процессов и ранее и в настоящее время используют фазовые распределения РН (phase-type distributions) с их матрично-аналитическими методами [1-4, 9, 11-15]. Среди них особое место занимают распределения Кокса порядка k (C_k) и как его частные случаи – гиперэрланговское (HEr) и гиперэкспоненциальное (HEr) распределения (рис. 1).

Плотность распределения вероятностей Кокса в общем случае записывается в виде матричной экспоненты

$$f(t) = \mathbf{a} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{s}^0,$$

где

$\mathbf{a} = (1, 0, \dots, 0)$ – вектор начальных состояний системы (вероятностей фаз), причем действие всегда начинается с первой фазы;

$\mathbf{A}$ – квадратная матрица интенсивностей переходов размерности $k \times k$;

$\mathbf{s}^0$ – вектор скоростей выхода в поглощающее состояние (завершение процесса).

$e^{\mathbf{A}t}$ – матричная экспонента, описывающая вероятность нахождения системы в каждой из фаз в момент t , определяемая через ряд Тейлора $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^k}{k!}$.

Функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(t) = 1 - \mathbf{a} e^{\mathbf{A}t} \mathbf{I},$$

где $\mathbf{I}$ – единичный вектор столбец.

Для анализа СМО типа РН/РН/1 обычно используют матрично-геометрический метод (МГМ) с формированием базовых матриц через тензорное (Кронекеровское) произведение векторов и матриц параметров поступлений требований и их обслуживания. Например, в случае двухфазной системы это будут базовые матрицы $\mathbf{A}_0$ (матрица поступлений), $\mathbf{A}_1$ (матрица внутренних переходов), $\mathbf{A}_2$ (матрица уходов требований после обслуживания). Тогда задача сводится к решению матричного уравнения $\mathbf{A}_0 + \mathbf{R}\mathbf{A}_1 + \mathbf{R}^2\mathbf{A}_2 = 0$ относительно матрицы $\mathbf{R}$ четвертого порядка методом итераций. После этого через матрицу $\mathbf{R}$ определяют векторы вероятностей того, что система свободна от требований π_0 и того, что система находится на уровне 1 π_1 .

В этой работе мы остановимся на распределении Кокса второго порядка C_2 , которое в терминах фазовых распределений описывается вектором начальных состояний $\mathbf{a} = (1, 0)$, вектором скоростей выхода в поглощающее состояние $\mathbf{s}^0 = \begin{pmatrix} p_1 \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$ и матрицей интенсивностей переходов

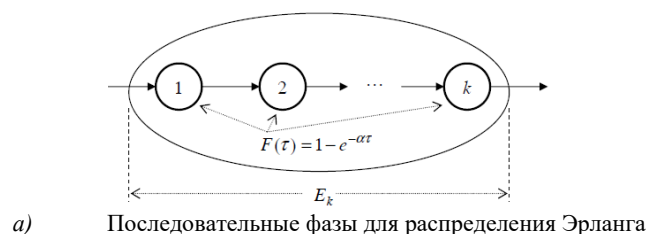
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & p_1 \lambda_1 \\ 0 & -\lambda_2 \end{pmatrix}. \text{ Аналогично будут выглядеть эти век-}$$

торы и матрица для процесса обслуживания путем замены символа λ на μ и вероятности p_1 на r_1 .

Особое свойство фазовых распределений, это возможность универсальной аппроксимации произвольных законов распределений с использованием их начальных моментов. Например, распределение Кокса второго порядка позволяет аппроксимировать произвольные законы распределений с использованием двух моментов – средних значений интервалов поступлений и времени обслуживания и их коэффициентов вариаций. Распределение Кокса третьего порядка кроме средних значений интервалов поступлений и времени обслуживания и их коэффициентов вариаций еще может учитывать коэффициент асимметрии распределения.

Для схемы на рис. 1а) функция плотности принимает вид $f_k(t) = \alpha(\alpha t)^{k-1} e^{-\alpha t} / (k-1)!$, а для рис. 1б) – $f(t) = \sum_{i=1}^r q_i \alpha_i e^{-\alpha_i t}$ [5-8].

Комбинация последовательных и параллельных экспоненциальных фаз с соответствующими параметрами и дает распределение Кокса [1] (рис. 2).



Если добавить параллельные фазы, тогда будет гиперэрланговское распределение HE_k

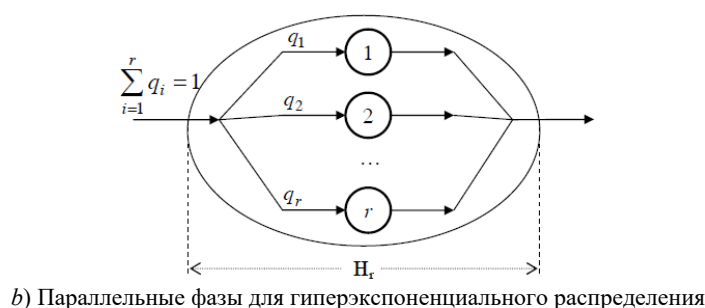


Рис. 1. Представление фазовых распределений

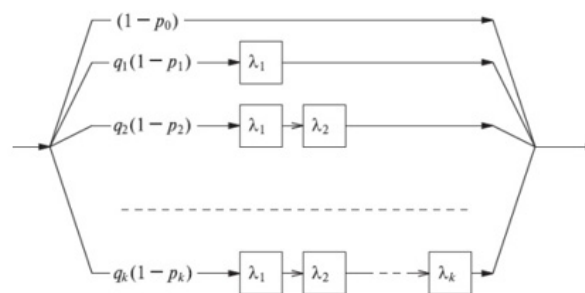


Рис. 2. Параллельно-последовательные фазы распределения Кокса C_k

Таким образом, это распределение представляет наиболее универсальную структуру: требование проходит представленные фазы последовательно, но после каждой фазы k оно может либо перейти с вероятностью p_1 на следующую фазу, либо покинуть систему с вероятностью $1-p_1$. Поэтому структура распределения Кокса разнится от гиперэкспоненциального распределения (рис.1b), где моделируется ситуация «или-или», а Кокс – «последовательность фаз, с возможностью досрочного прерывания».

Для распределения Кокса второго порядка с учетом рис.2, схема упрощается до двух последовательных фаз. При этом процессы поступления и обслуживания состоят из максимум двух этапов с интенсивностями λ_1 и λ_2 , где первая фаза выполняется всегда первой с интенсивностью λ_1 . Затем происходит разветвление после завершения первой фазы и процесс может: 1) завершиться с вероятностью p_1 , в терминах рис.2 это соответствует ветке $(1-p_0)$ или $q_1(1-p_1)$ в простейших случаях; 2) перейти ко второй фазе с вероятностью $(1-p_1)$, что соответствует ветке с $\lambda_1 \rightarrow \lambda_2$.

Вторая фаза имеет интенсивность λ_2 и всегда ведет к завершению процесса.

Настоящая статья является продолжением исследований авторов моделей массового обслуживания с фазовыми распределениями [5-8], в которых доказательно подтверждена существенная зависимость времени ожидания требований в очереди от величин коэффициентов вариаций временных интервалов, а также от моментов более высокого порядка.

1. Постановка и решение задачи

В работе ставится задача построения практически значимой аналитической модели для системы $C_2/C_2/1$ с независимыми распределениями Кокса второго порядка и доведения ее до численного решения относительно среднего времени ожидания требований в очереди. Данное распределение обеспечивает коэффициент вариации $c_v \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$. Это минимальное значение обеспечивает распределение Эрланга второго порядка. Например, значение коэффициента вариации $c_v=0,5$ уже не укладывается в структуру распределения Кокса второго порядка, т.к. для этого нужно взять уже распределение Эрланга четвертого порядка.

Таким образом, мы имеем здесь диапазон коэффициента вариации меньше и больше единицы. Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью расширения математического аппарата для исследования высоко вариативного телетрафика с целью более точной оценки времени ожидания в очереди, и, следовательно, более точного расчета объемов буферных устройств. Для вывода решения использован метод спектрального разложения уравнения Линдли [5-12].

Таким образом, мы имеем здесь диапазон коэффициента вариации меньше и больше единицы. Актуальность данного исследования обусловлена необходимостью расширения математического аппарата для исследования высоко вариативного телетрафика с целью более точной оценки времени ожидания в очереди, и, следовательно, более точного расчета объемов буферных устройств. Для вывода решения использован метод спектрального разложения уравнения Линдли [5-12].

Применение спектрального метода на основе факторизации Винера-Хопфа в этом случае обеспечивает получение точного решения, учитывающего не только первые два момента распределения Кокса, но и его структурных параметров в виде вероятностей переходов между фазами, что и определяет научную новизну данной работы. Кроме этого, как будет установлено ниже, этот метод приводит к исследованию полинома четвертой степени и в итоге к нахождению нулей и

полюсов спектрального разложения. Причем сам метод априори предполагает существование и единственность такого спектрального разложения, и этот факт подтверждается практическими вычислениями.

Исходя из структуры общего распределения Кокса C_k (рис. 2), в случае двухфазного распределения для $k=2$ запишем функцию плотности распределения интервалов поступлений для наиболее распространенного случая $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Вначале приведем некоторые пояснения, а для этого рассмотрим систему с двумя состояниями S_1 и S_2 , причем процесс всегда начинается с состояния S_1 . В этом состоянии время распределено по экспоненциальному закону с параметром λ_1 . По завершении фазы 1 процесс переходит в фазу 2 с вероятностью p_1 или завершается с вероятностью $q_1=1-p_1$ (рис. 2). В состоянии S_2 время опять распределено по экспоненциальному закону, но с параметром λ_2 , после чего процесс всегда завершается.

Из пояснений следует, что для распределения C_2 с двумя фазами, функция плотности распределения представляет собой взвешенную сумму экспоненциальной плотности и свертки двух экспоненциальных плотностей. В этом заключается главное отличие распределения Кокса второго порядка от гиперэкспоненциального распределения того же порядка. Таким образом, имеем функцию плотности вида

$$f_\lambda(t) = (1-p_1)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_1 \int_0^t \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} \lambda_2 e^{-\lambda_2(t-y)} dy.$$

После интегрирования свертки и несложных преобразований получим

$$f_\lambda(t) = (1-p_1)\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + p_1 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}). \quad (1)$$

Функцию плотности (1) также можно представить в виде линейной комбинации двух экспонент по аналогии с гиперэкспоненциальным распределением (см. рис.1b):

$$f_\lambda(t) = c_1 \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 \lambda_2 e^{-\lambda_2 t}, \quad (2)$$

где коэффициенты $c_1 = 1 - p_1 \lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_2)$, $c_2 = p_1 \lambda_1 / (\lambda_1 - \lambda_2)$, $c_1 + c_2 = 1$ для нормировки. В отличие от гиперэкспоненциального и гиперэрланговского распределений, здесь коэффициенты c_1 и c_2 не являются вероятностными весами, а один из них вовсе может быть отрицательным или даже больше единицы.

Это связано с тем, что распределение Кокса описывает последовательно-параллельные фазы, а не просто случайный выбор между двумя независимыми приборами обслуживания. Не смотря на особенности коэффициентов линейной комбинации, функция плотности (2) всегда будет неотрицательной и корректной функцией плотности распределения вероятностей.

Заменой символа λ на μ в выражении (1) запишем функцию плотности распределения времени обслуживания

$$f_\mu(t) = (1-r_1)\mu_1 e^{-\mu_1 t} + r_1 \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (e^{-\mu_1 t} - e^{-\mu_2 t}) \quad (3)$$

или

$$f_\mu(t) = d_1 \mu_1 e^{-\mu_1 t} + d_2 \mu_2 e^{-\mu_2 t}, \quad (4)$$

где коэффициенты линейной комбинации $d_1 = 1 - r_1\mu_1 / (\mu_1 - \mu_2)$, $d_2 = r_1\mu_1 / (\mu_1 - \mu_2)$, $d_1 + d_2 = 1$.

Представление функций плотности распределения Кокса в виде линейной комбинации экспоненциальных распределений удобно прежде всего для нахождения их изображений Лапласа. Общая формула для изображения Лапласа для функции плотности с параметрами γ_1, γ_2 и с коэффициентами линейной комбинации l_1, l_2 имеет вид $F^*(s) = l_1 \frac{\gamma_1}{\gamma_1 + s} + l_2 \frac{\gamma_2}{\gamma_2 + s}$.

Заметим, что распределение Кокса, как и упомянутые выше гиперэкспоненциальное и гиперэрланговское распределения при определенных значениях коэффициента вариации, может описывать распределения с тяжелым хвостом. Такие случаи рассмотрены в [9-11, 16].

2. Спектральное решение уравнения Линдли для системы C₂/C₂/1

Известны всего три формы записи интегрального уравнения Линдли [2]. В зависимости от постановки задачи, используются разные формы этого уравнения [5-12]. Мы для решения поставленной задачи используем форму уравнения Линдли относительно функции распределения вероятностей времени ожидания требования в очереди $W(y)$ вида:

$$W(y) = \begin{cases} \int_{-\infty}^y W(y-u) dC(u), & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases}$$

Здесь приняты следующие обозначения: $C(u)$ - функция распределения вероятностей случайной величины $u = \tau_\mu - \tau_\lambda$ в виде разности двух важных случайных величин – времени обслуживания требования и интервала времени между поступлениями требований.

Далее нам понадобятся изображения Лапласа для функций плотности (2) и (4):

$$F_\lambda^*(s) = c_1 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + s} + c_2 \frac{\lambda_2}{\lambda_2 + s}, \quad F_\mu^*(s) = d_1 \frac{\mu_1}{\mu_1 + s} + d_2 \frac{\mu_2}{\mu_2 + s}. \quad (5)$$

Нам требуется получить спектральное представление выражения $F_\lambda^*(-s)F_\mu^*(s) - 1 = \alpha(s)/\beta(s)$ в виде отношения двух рациональных функций с учетом изображений Лапласа (5).

При этом компоненты спектрального разложения $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ должны удовлетворять специальным условиям в комплексной плоскости s . В полуплоскости $\text{Re}(s) > 0$ компонента $\alpha(s)$ должна быть аналитической без нулей. В полуплоскости $\text{Re}(s) < D$, где постоянная величина D определяется условием $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_\lambda(t)}{e^{-Dt}} < \infty$, компонента $\beta(s)$ должна быть аналитической без нулей.

Развернем последнее выражение в виде

$$\left(\frac{c_1\lambda_1}{\lambda_1 - s} + \frac{c_2\lambda_2}{\lambda_2 - s} \right) \left(\frac{d_1\mu_1}{\mu_1 + s} + \frac{d_2\mu_2}{\mu_2 + s} \right) = 1, \quad (6)$$

и перепишем его в виде

$$\frac{\lambda_1\lambda_2 - (c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2)s}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)} \cdot \frac{\mu_1\mu_2 + (d_1\mu_1 + d_2\mu_2)s}{(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)} = 1. \quad (7)$$

Для получения разложения для выражения (7) в виде отношения двух рациональных функций и упрощения последующих выражений вводим промежуточные параметры в виде средних интенсивностей поступлений $\bar{\lambda} = c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2$, обслуживания $\bar{\mu} = d_1\mu_1 + d_2\mu_2$ с учетом условий $c_1 + c_2 = 1$ и $d_1 + d_2 = 1$. Тогда выражение (7) примет вид:

$$(\lambda_1\lambda_2 - \bar{\lambda}s)(\mu_1\mu_2 + \bar{\mu}s) = (\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s).$$

Раскрывая скобки и приводя подобные члены с помощью символьных операций Mathcad для их группировки, получим полином четвертой степени вида $-s(s^3 + as^2 + bs + c)$, в котором степень можно понизить до трех из-за равного нулю свободного члена, т.к. произведение параметров распределений (2) и (4) $\lambda_1\lambda_2\mu_1\mu_2$ присутствует и в левой и в правой частях равенства. Таким образом, в числителе спектрального разложения $\alpha(s)/\beta(s)$ получили кубическое уравнение вида

$$s^3 + as^2 + bs + c = 0, \quad (8)$$

где коэффициенты $a = \mu_1 + \mu_2 - \lambda_1 - \lambda_2$, $b = \lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)(\mu_1 + \mu_2) + \bar{\lambda}\bar{\mu}$, $c = \lambda_1\lambda_2(\mu_1 + \mu_2 - \bar{\mu}) - \mu_1\mu_2(\lambda_1 + \lambda_2 - \bar{\lambda})$ являются функциями параметров распределений (2) и (4).

Исследование кубического уравнения с помощью теоремы Виета, показывает, что оно имеет два вещественных корня в левой полуплоскости комплексной плоскости s , либо два комплексных корня с отрицательной вещественной частью и один положительный в случае стационарного режима работы системы, т.е. когда коэффициент загрузки ρ $0 < \rho = \bar{\tau}_\mu / \bar{\tau}_\lambda < 1$. Обозначим эти корни $-s_1, -s_2, s_3$. Это важный момент спектрального метода, сводящегося к нахождению и исследованию нулей и полюсов полученного разложения в комплексной плоскости s . С учетом одного нулевого корня $s=0$ в нашем случае спектральное разложение в виде отношения двух рациональных функций принимает вид

$$\frac{\alpha(s)}{\beta(s)} = \frac{-s(s + s_1)(s + s_2)(s - s_3)}{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)(\mu_1 + s)(\mu_2 + s)}. \quad (9)$$

Согласно методу спектрального решения, функция $\alpha(s)$ будет включать корни и полюса (9) на левой полуоси комплексной плоскости s , а функция $\beta(s)$ – на правой полуоси:

$$\alpha(s) = \frac{s(s + s_1)(s + s_2)}{(s + \mu_1)(s + \mu_2)}, \quad \beta(s) = \frac{(\lambda_1 - s)(\lambda_2 - s)}{(s_3 - s)}.$$

Здесь компонента спектрального разложения $\alpha(s)$ в дальнейшем будет отвечать за среднее время ожидания требований в очереди, а компонента $\beta(s)$ – за средний период простоя

системы. Корректность конструирования компонент спектрального разложения проверяется выполнением специальных условий спектрального метода

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty, \operatorname{Re}(s) > 0} \frac{\alpha(s)}{s} = 1, \quad \lim_{|s| \rightarrow \infty, \operatorname{Re}(s) < D} \frac{\beta(s)}{s} = -1.$$

Выполнение этих условий в нашем случае очевидно.

Теперь находим промежуточный параметр C_0 , связанный с рациональной функцией $\alpha(s)$. Параметр C_0 физически определяет вероятность того, что поступающее в систему требование, заставит ее свободной от требований:

$$C_0 = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\alpha(s)}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{(s + s_1)(s + s_2)}{(s + \mu_1)(s + \mu_2)} = \frac{s_1 s_2}{\mu_1 \mu_2}.$$

Тогда функция $\frac{C_0 s}{\alpha(s)} = \frac{s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (s + s_1)(s + s_2)}$ будет изображением Лапласа для функции плотности времени ожидания, т.е.

$$W^*(s) = \frac{s_1 s_2 (s + \mu_1)(s + \mu_2)}{\mu_1 \mu_2 (s + s_1)(s + s_2)} \quad (10)$$

Среднее время ожидания требований в очереди $\bar{W}$ определяем как первый начальный момент, используя изображение Лапласа (10) функции плотности

$$-\frac{dW^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2},$$

т.е.

$$\bar{W} = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2} \quad (11)$$

В численно-аналитической модели (11) s_1 и s_2 являются абсолютными значениями отрицательных корней $-s_1, -s_2$ кубического полинома (8) с вышеприведенными коэффициентами a, b, c , а μ_1 и μ_2 – параметры распределения (4).

3. Практическая реализация численно-аналитической модели

Алгоритм реализации модели (11) схож с подобными алгоритмами авторов для СМО с распределениями в виде вероятностных смесей [5-8], но со своими особенностями. Определим параметры модели (11) s_1, s_2, μ_1, μ_2 в два этапа. На первом этапе определим начальные моменты распределений (2) и (4) через найденные выше изображения Лапласа (5).

Для распределения (2) средний интервал между поступлениями требований

$$\bar{\tau}_\lambda = -\frac{dF_\lambda^*(s)}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{p_1}{\lambda_2}, \quad (12)$$

второй начальный момент $\bar{\tau}_\lambda^2 = \frac{d^2 F_\lambda^*(s)}{ds^2} \Big|_{s=0} = 2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{p_1}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{p_1}{\lambda_2^2}\right)$. Тогда дисперсия интервалов поступлений

$$D_{\tau_\lambda} = 2\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{p_1}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{p_1}{\lambda_2^2}\right) - \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{p_1}{\lambda_2}\right)^2 = \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{p_1(2-p_1)}{\lambda_2^2}.$$

Квадрат коэффициента вариации

$$c_\lambda^2 = \frac{D_{\tau_\lambda}}{\bar{\tau}_\lambda^2} = \frac{\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{p_1(2-p_1)}{\lambda_2^2}}{\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{p_1}{\lambda_2}\right)^2}. \text{ Окончательно после упрощения,}$$

квадрат коэффициента вариации будет иметь вид

$$c_\lambda^2 = \frac{\lambda_2^2 + p_1 \lambda_1^2 (2-p_1)}{(\lambda_2 + p_1 \lambda_1)^2}. \quad (13)$$

Таким образом, для определения трех параметров распределения (2) $\lambda_1, \lambda_2, p_1$ мы получили два уравнения моментов (12) и (13). На втором этапе полученную систему двух уравнений (12) и (13) относительно трех неизвестных $\lambda_1, \lambda_2, p_1$ решим методом подстановки. Выберем значения λ_1, λ_2 так, чтобы они удовлетворяли уравнению (12): $\lambda_1 = 2/\bar{\tau}_\lambda$, $\lambda_2 = 2p_1/\bar{\tau}_\lambda$. Потребуем, чтобы они удовлетворяли также уравнению (13). Тогда подставив эти значения λ_1, λ_2 в равенство (13), получим неполное квадратное уравнение относительно вероятности p_1 в зависимости от входных параметров $\bar{\tau}_\lambda$ и c_λ : $8p_1(1-2p_1c_\lambda^2)/\bar{\tau}_\lambda^2 = 0$.

Отбросив здесь тривиальный нулевой корень, получим нужное значение $p_1 = \frac{1}{2c_\lambda^2}$, которое в свою очередь приводит

к ограничению модели (11) для системы $C_2/C_2/1$ в виде $c_\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$. Таким образом, параметры распределения

(2) $\lambda_1 = 2/\bar{\tau}_\lambda$, $\lambda_2 = 2p_1/\bar{\tau}_\lambda$, $p_1 = \frac{1}{2c_\lambda^2}$ определены однозначно.

Повторив эти действия для параметров распределения (4) μ_1, μ_2, r_1 , мы можем записать их выражения в виде $\mu_1 = 2/\bar{\tau}_\mu$,

$$\mu_2 = 2r_1/\bar{\tau}_\mu, \quad r_1 = \frac{1}{2c_\mu^2}.$$

Таким образом, мы здесь установили область применимости системы $C_2/C_2/1$ по коэффициентам вариаций $c_\lambda \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ и

$c_\mu \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, а также по загрузке системы $0 < \rho = \frac{\bar{\tau}_\mu}{\bar{\tau}_\lambda} < 1$.

После определения неизвестных параметров распределений (2) и (4) через заданные входные параметры $\bar{\tau}_\lambda, \bar{\tau}_\mu, c_\lambda, c_\mu$ – средние значения интервалов поступлений и времени

обслуживания и их коэффициентов вариаций, формируем кубическое уравнение (8) с вышеприведенными коэффициентами. Решая его, находим абсолютные значения отрицательных корней $-s_1$ и $-s_2$.

Для подтверждения адекватности приведенных выше теоретических выводов ниже приведены результаты вычислительных экспериментов на Mathcad.

4. Результаты вычислительных экспериментов

В таблице 1 приведены результаты расчетов среднего времени ожидания требований в очереди для СМО $C_2/C_2/1$ для широкого диапазона изменчивости коэффициентов вариаций и коэффициента загрузки системы. Расчеты проведены для единичного времени обслуживания. Эти данные сравниваются с результатами близких СМО $HE_2/HE_2/1$ и $H_2/H_2/1$, полученными авторами в [5] и [6]. Прочерки в таблице 1 указывают на тот факт, что система $H_2/H_2/1$ не применима в случае, когда коэффициенты вариации меньше единицы.

Таблица 1

Результаты расчетов для близких СМО $C_2/C_2/1$, $HE_2/HE_2/1$, $H_2/H_2/1$

Входные параметры		Среднее время ожидания		
ρ	(c_λ, c_μ)	СМО $C_2/C_2/1$	СМО $HE_2/HE_2/1$ [5]	СМО $H_2/H_2/1$ [6]
0,1	(0,71, 0,71)	0,02	0,02	—
	(1, 1)	0,11	0,05	0,11
	(2, 2)	0,48	0,34	0,45
	(4, 4)	1,83	1,68	1,78
	(8, 8)	7,17	7,16	7,11
0,5	(0,71, 0,71)	0,40	0,40	—
	(1, 1)	1,0	0,87	1,0
	(2, 2)	4,23	3,98	4,04
	(4, 4)	16,40	16,53	16,13
	(8, 8)	64,47	66,73	64,18
0,9	(0,71, 0,71)	4,40	4,40	—
	(1, 1)	9,0	8,94	9,0
	(2, 2)	36,45	36,21	36,20
	(4, 4)	145,21	145,31	144,83
	(8, 8)	578,30	580,56	577,86

Результаты таблицы 1 полностью подтверждают выводы общей теории систем $G/G/1$ о нелинейной зависимости среднего времени ожидания требований в очереди от коэффициентов вариаций интервалов между поступлениями и времени обслуживания. Эта нелинейная связь на самом деле квадратическая (рис. 3).

В связи с большим разбросом данных по среднему времени ожидания $\bar{W}$ от 0,02 до 578 в таблице 1, его зависимость от коэффициентов вариаций на рис.3 показана в логарифмической шкале.

Из расчетов следует, что при высокой загрузке $\rho=0,9$ система $C_2/C_2/1$ крайне чувствительна к любым флуктуациям, т.к. даже при умеренных значениях коэффициентов вариаций $(c_\lambda, c_\mu)=2,0$, среднее время ожидания в девять раз больше, чем при средней загрузке $\rho=0,5$ (рис. 3, 4).

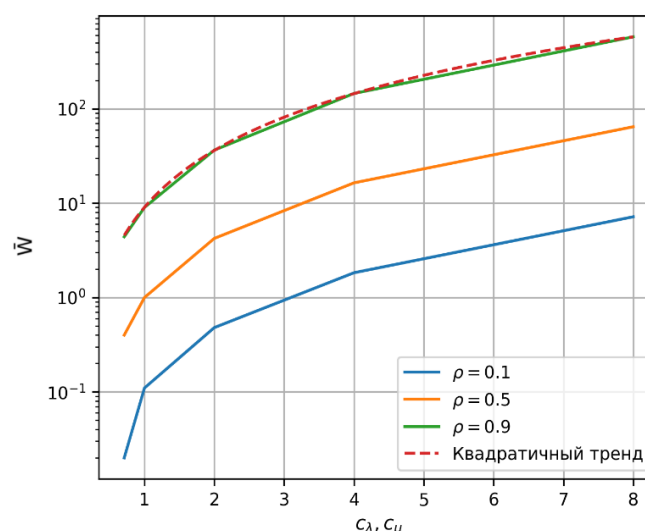


Рис. 3. Характер зависимости среднего времени ожидания от коэффициентов вариаций в логарифмической шкале

На рис. 4 показан характер зависимости среднего времени ожидания требований в очереди от коэффициента загрузки системы при фиксированных значениях коэффициентов вариаций. При минимальных коэффициентах вариации, равных $(c_\lambda, c_\mu)=0,71$, когда трафик моделируется распределением Эрланга второго порядка, даже при загрузке системы $\rho=0,9$ задержка $\bar{W}=4,4$ остается в разумных пределах, что в 131 раз меньше, чем при $(c_\lambda, c_\mu)=8$.

При критической загрузке $\rho=0,9$ и высокой вариативности трафика $(c_\lambda, c_\mu)=8$, когда трафик моделируется гиперэкспоненциальным распределением второго порядка, среднее время ожидания в 578 раз превышает среднее время обслуживания. Таким образом, убеждаемся в том, что спектральный метод сохраняет вычислительную устойчивость для широкого диапазона изменения как загрузки системы, так и коэффициентов вариации временных интервалов.

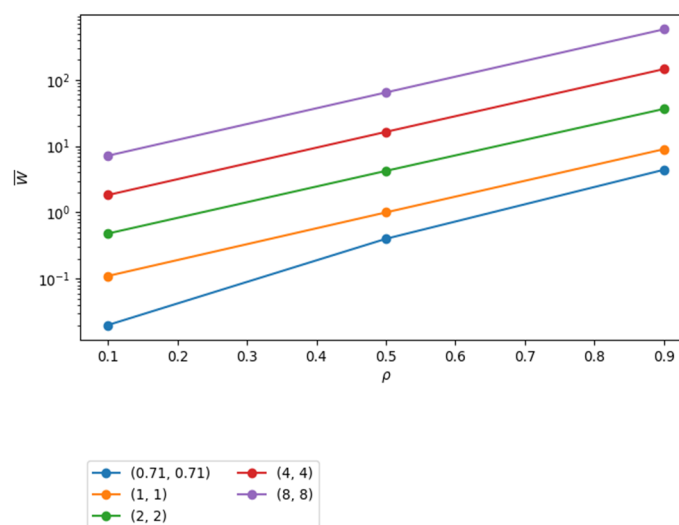


Рис. 4. Зависимость среднего времени ожидания от загрузки системы при фиксированных коэффициентах вариации

Более полную картину зависимости среднего времени ожидания $\bar{W}$ от всех входных параметров системы демонстрирует 3D рисунок 5, фактически совмещающий рисунки 3 и 4. Если здесь рассматривать зависимость отдельно от каждого из коэффициентов вариаций c_λ и c_μ , то можно было бы увидеть, что рост коэффициента вариации времени обслуживания $c_\mu > 1$ оказывает более деструктивное влияние на длину очереди через среднее время обслуживания, чем коэффициент вариации интервалов между поступлениями требований c_λ . Для специалистов сетей связи последний факт означает, что стабилизация времени обработки пакетов в узлах коммутации возможна, например через приоритизацию обслуживания.

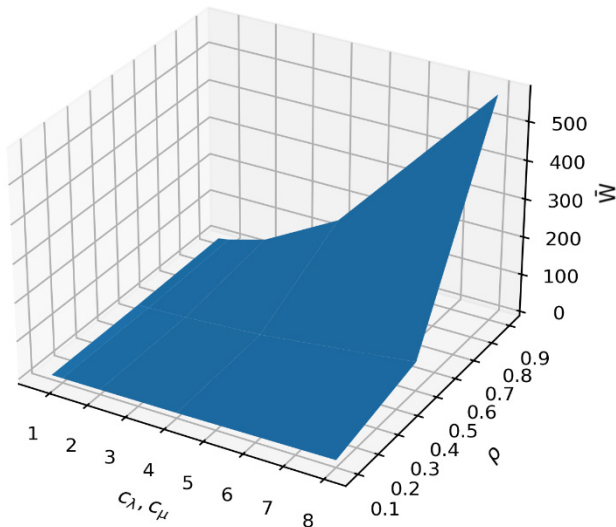


Рис. 5. Зависимость среднего времени ожидания $\bar{W}$ от входных параметров системы

Из того факта, что система $C_2/C_2/1$ является крайне чувствительной к величинам коэффициентов вариаций, о чем однозначно свидетельствуют рисунки 3-5, следует, что среднее время ожидания требований в очереди также крайне чувствительно к параметрам распределений (2), (4) $p_1, \lambda_1, \lambda_2$ и r_1, μ_1, μ_2 , т.к. все они однозначно зависят от используемых коэффициентов вариаций.

5. Верификация модели и ее результатов

Результаты расчетов таблицы 1 по представленной численно-аналитической модели системы $C_2/C_2/1$ в сравнении с близкими СМО $HE_2/HE_2/1$ и $H_2/H_2/1$ демонстрируют поразительную идентичность рассматриваемых систем несмотря на различие структуры СМО $C_2/C_2/1$ с остальными рассматриваемыми системами. Небольшие отклонения между значениями в таблице 1 однозначно объясняются тем, что у всех трех распределений различны моменты третьего порядка и выше, хотя в расчетах взяты одинаковые средние значения и коэффициенты вариации. Сходство рассматриваемых систем заключается еще в том, что они однозначно подтверждают теорию систем общего вида $G/G/1$ о прямой зависимости среднего времени ожидания от дисперсий интервалов поступлений и времени обслуживания, т.е. от квадратов коэффициентов вариации.

Теперь верифицируем полученные результаты с данными аппроксимации Маршала среднего времени ожидания требований в очереди, которая является модификацией предельной формулы Кингмана $\bar{W} \approx \frac{\sigma_\lambda^2 + \sigma_\mu^2}{2\bar{c}_\lambda(1-\rho)}$, выведенной для случая большой загрузки системы ($\rho \rightarrow 1$). Аппроксимация Маршала в наших обозначениях принимает вид $\bar{W} \approx \frac{\rho^2 \bar{c}_\lambda (c_\lambda^2 + c_\mu^2)}{2(1-\rho)}$. Ниже в таблице 2 приведены результаты аппроксимации Маршала в сравнении с нашими данными для системы $C_2/C_2/1$. В таблице 2 аппроксимация Маршала обозначено АМ.

Таблица 2

Сравнительные результаты для системы $C_2/C_2/1$ с АМ

Входные параметры		Среднее время ожидания		δ%
ρ	(c_λ, c_μ)	СМО $C_2/C_2/1$	АМ	
0,1	(0,71,0,71)	0,02	0,05	150
	(1,1)	0,11	0,11	0,0
	(2,2)	0,48	0,44	8,0
	(4,4)	1,83	1,78	2,7
	(8,8)	7,17	7,11	0,8
0,5	(0,71,0,71)	0,40	0,50	25
	(1,1)	1,0	1,0	0,0
	(2,2)	4,23	4,0	5,4
	(4,4)	16,40	16,0	2,4
	(8,8)	64,47	64,0	0,7
0,9	(0,71,0,71)	4,40	4,54	3,2
	(1,1)	9,0	9,0	0,0
	(2,2)	36,45	36,0	1,2
	(4,4)	145,21	144,0	0,8
	(8,8)	578,30	576	0,4

Заметная разница между результатами системы $C_2/C_2/1$ и АМ как и ожидалось, наблюдается в случаях малой загрузки систем ρ и малых коэффициентов вариации, меньших единицы. В остальных случаях наблюдается достаточно умеренная относительная погрешность. Тем самым, верификация модели и ее результатов путем сравнения с близкими системами и аппроксимацией Маршала полностью подтверждена.

6. Перспективы дальнейших исследований

Несмотря на достаточно высокую точность построенной численно-аналитической модели массового обслуживания для системы $C_2/C_2/1$, распределение C_2 ограничено возможностью описания лишь двух фаз процессов поступления и обслуживания. Этого может быть недостаточно для моделирования современных мультимедийных сервисов, таких как VR/AR, 8K-видео, тактильный интернет. Поэтому переход к распределению Кокса третьего порядка и следовательно, к использованию системы $C_3/C_3/1$, которая точнее будет аппроксимировать реальный трафик, выглядит наиболее перспективным.

Включение третьей экспоненциальной фазы позволит учитывать кроме средних значений временных интервалов и их дисперсий еще и асимметрию более высокого распределения, что позволит точнее аппроксимировать самоподобные

процессы (Long Range Dependence), которые характерны для видеотрафика 4K/8K, а также всплески трафика. Таким образом, использование системы $C_3/C_3/1$ делает ее более универсальным средством для моделирования любых типов цифрового трафика.

Применение системы $C_3/C_3/1$ предполагает и увеличение вычислительной сложности алгоритма задачи факторизации Винера Хопфа, т.к. в этом случае характеристическое уравнение спектрального метода приводит к полиному шестой степени.

В этом случае также потребуется строгое доказательство того, что ровно три корня будут лежать в левой полуплоскости ($\text{Re}(s) < 0$) комплексной плоскости s , а три – в правой полуплоскости ($\text{Re}(s) > 0$).

Выводы

В работе представлена работоспособная модель массового обслуживания $C_2/C_2/1$ с независимыми распределениями Кокса второго порядка, полученная на основе спектрального метода решения интегрального уравнения Линдли. Построенная модель в отличие от пуассоновских моделей позволяет точнее прогнозировать объемы буферной памяти передающих устройств и показатели качества обслуживания (QoS) в условиях не стационарного и высоко вариативного трафика.

Адекватность модели подтверждена вычислительными экспериментами в сравнении как с близкими системами, описываемыми распределениями в виде вероятностных смесей эрланговских и экспоненциальных распределений, так и аппроксимации Маршала.

Результаты расчетов могут быть востребованы при проектировании инфокоммуникационных сетей, вычислительных кластеров и логистических систем для прогнозирования задержек, и для более точного расчета объемов буферной памяти маршрутизаторов.

Полученные результаты публикуются впервые.

Литература

1. He Q. M., Zhang H. Matrix-Analytic Methods in Queuing Theory: New Developments and Algorithms // Springer Series in Operations Research and Financial Engineering. 2024. Vol. 152, pp. 45-112.
2. Вишнеvский В. М., Семенова О. В. Системы массового обслуживания с коррелированными потоками и фазовым обслуживанием // Автоматика и телемеханика. 2023. Т. 84, № 5. С. 72-94.

3. Самуйлов К. Е., Гайдамака Ю. В. Методы анализа систем 5G/6G с использованием распределений фазового типа // Электро-связь. Вестник РУДН. Серия: Математика. Информатика. Физика. 2024. Т. 32, № 1. С. 15-30.

4. Nazarov A., Phung-Duc T. Asymptotic Analysis of Queuing Systems with PH-distributions under Heavy Traffic // Communications in Computer and Information Science. 2025. Vol. 1987, pp. 112-125. DOI: 10.1007/978-3-031-52345-2_9.

5. Тарасов В. Н. Анализ и сравнение двух систем массового обслуживания с гиперэрланговскими входными распределениями // Радиоэлектроника, информатика, управление. 2018. № 4. С. 61-70.

6. Тарасов В. Н., Ахметшина Э. Г. Среднее время ожидания в системе массового обслуживания $M_2/M_2/1$ с запаздыванием // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2018. Т. 22. № 4. С. 702-713.

7. Тарасов В. Н., Бахарева Н. Ф. Спектральные решения для СМО с законами распределений в виде вероятностных смесей // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. 2025. Т. 28, №2. С.87-94. DOI: 18469/1810-3189.2025.28.2.87-94

8. Малахов С. В., Тарасов В. Н. Экспериментальные исследования производительности сегмента программно-конфигурируемой сети // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2013. № 2. С. 81-85.

9. Boxma O., Zwart B. Refined Asymptotics for Lindley's Integral Equation with Phase-Type Inputs // Journal of Applied Probability. 2024. Vol. 61, no. 2, pp. 412-435. DOI: 10.1017/jpr.2023.94.

10. Janssen A. J. A Numerical Approach to Lindley's Equation via Rational Approximation // Annals of Operations Research. 2023. Vol. 325, no. 1, pp. 589-614.

11. Abate J., Whitt W. Solving Lindley's Integral Equation via the Transform Inversion Method: The PH/PH/1 Case // Operations Research Letters. 2023. Vol. 51, No. 4, pp. 367-373.

12. Wang L., Smith J. Generalized Lindley's Equation in Non-Stationary Queues with PH-distributions // European Journal of Operational Research. 2026. Vol. 338 (In Press). DOI: 10.1016/j.ejor.2025.08.012.

13. Ozawa T. Stability Conditions for Multi-Server Queues with Phase-Type Service and Markovian Arrivals // Queueing Systems. 2023. Vol. 104, no. 1-2, pp. 83-109. DOI: 10.1007/s11134-023-09791-3.

14. Buchholz P., Kriege J. Effective Approximation of Heavy-Tailed Distributions by Phase-Type Distributions // Performance Evaluation. 2023. Vol. 162, Art. 102357, pp. 1-22.

15. Yuan Z., Chen M. Optimization of PH-distribution fitting via EM-algorithm for 6G Traffic Modeling // Journal of Network and Computer Applications. 2025. Vol. 234, pp. 104-118. (Early Access, Jan 2025).

16. Hurtado-Lange D., Maguluri S. T. A load balancing system in the many-server heavy-traffic asymptotics. August 2022 // Queueing Systems 101(3-4):1-39 DOI:10.1007/s11134-022-09847-7

STUDY OF QUEUEING SYSTEMS WITH PHASE DISTRIBUTIONS

Veniamin N. Tarasov, State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia, veniamin_tarasov@mail.ru
Nadezhda N. Bakhareva, State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia, nadin1956_04@inbox.ru

Abstract

The paper presents the obtained results of the analysis of general type queueing systems (QS), which are described by the second-order Cox phase distributions $C2/C2/1$. The use of phase distributions in queueing theory has been known for a long time. This class of distributions is suitable as a mathematical apparatus for analyzing teletraffic in future generation networks, which is characterized by high variability and has a self-similarity effect. To find the average waiting time for requirements in the queue, the spectral method was used to solve the Lindley integral equation with finding the zeros and poles of the spectral expansion in the form of a ratio of rational functions, which in this case are reduced to fourth-degree polynomials. This method is less labor-intensive than the classical matrix-geometric method, which uses Kronecker operations and iterations. The paper presents a numerical-analytical model for the average waiting time of requests in a queue for a system with second-order Cox distributions. To assess the accuracy of the obtained solution, computational experiments were conducted for low, medium, and high values of the variation coefficients of time intervals and system load. The obtained data allow us to estimate the performance of switching nodes under increasing stochastic uncertainty in telecom traffic. Consequently, neglecting the phase structure of the distribution laws of the QS when designing highly loaded systems for various purposes leads to an underestimation of packet delays in switching nodes by many times. Comparison with similar systems demonstrates the complete adequacy of the obtained results.

Keywords: Cox phase distributions, queueing systems, spectral method for solving the Lindley equation, variation coefficient, teletraffic

References

- [1] Q. M. He and H. Zhang "Matrix-Analytic Methods in Queueing Theory: New Developments and Algorithms," *Springer Series in Operations Research and Financial Engineering*, 2024, vol. 152, pp. 45-112.
- [2] V. M. Vishnevskij, O. V. Semenova "Sistemy massovogo obsluzhivaniya s korrelirovannymi potokami i fazovym obsluzhivaniem," *Avtomatika i telemekhanika*, 2023, vol. 84, no. 5, pp. 72-94.
- [3] K. E. Samujlov, YU. V. Gajdamaka "Metody analiza sistem 5G/6G s ispol'zovaniem raspredelenij fazovogo tipa, Elektrosvyaz'," *Vestnik RUDN. Seriya: Matematika. Informatika. Fizika*, 2024, vol. 32, no. 1, pp. 15-30.
- [4] A. Nazarov, T. Phung-Duc "Asymptotic Analysis of Queueing Systems with PH-distributions under Heavy Traffic," *Communications in Computer and Information Science*, 2025, vol. 1987, pp. 112-125. DOI: 10.1007/978-3-031-52345-2_9
- [5] V. N. Tarasov "Analysis and comparison of two queueing systems with hypererlangian input distributions," *Radio Electronics Computer Science Control*, 2018, vol. 47, no.4, pp. 61-70. DOI 10.15588/1607-3274-2018-4-6
- [6] V. N. Tarasov, E. G. Ahmetshina "Srednee vremya ozhidaniya v sisteme massovogo obsluzhivaniya H2/H2/1 s zapazyvaniem," *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki*, 2018, vol. 22, no.4, pp. 702-713.
- [7] V. N. Tarasov, N. F. Bahareva "Spektral'nye resheniya dlya SMO s zakonami raspredelenij v vide veroyatnostnyh smesey," *Fizika volnovykh processov i radiotekhnicheskie sistemy*, 2025, vol. 28, no.2, pp. 87-94. DOI: 10.18469/1810-3189.2025.28.2.87-94
- [8] S. V. Malahov, V. N. Tarasov "Eksperimental'nye issledovaniya proizvoditel'nosti segmenta programmno-konfiguriruemoy seti," *Intellekt. Innovacii. Investicii*, 2013, no. 2, pp. 81-85.
- [9] O. Boxma, B. Zwart "Refined Asymptotics for Lindley's Integral Equation with Phase-Type Inputs," *Journal of Applied Probability*, 2024, vol. 61, no. 2, pp. 412-435. DOI: 10.1017/jpr.2023.94
- [10] A. J. Janssen "A Numerical Approach to Lindley's Equation via Rational Approximation," *Annals of Operations Research*, 2023, vol. 325, no. 1, pp. 589-614.
- [11] J. Abate, W. Whitt "Solving Lindley's Integral Equation via the Transform Inversion Method: The PH/PH/1 Case," *Operations Research Letters*, 2023, vol. 51, no. 4, pp. 367-373.
- [12] L. Wang, J. Smith "Generalized Lindley's Equation in Non-Stationary Queues with PH-distributions," *European Journal of Operational Research*, 2026, vol. 338 (In Press). DOI: 10.1016/j.ejor.2025.08.012
- [13] T. Ozawa "Stability Conditions for Multi-Server Queues with Phase-Type Service and Markovian Arrivals," *Queueing Systems*, 2023, vol. 104, no. 1-2, pp. 83-109. DOI: 10.1007/s11134-023-09791-3
- [14] P. Buchholz, J. Kriege "Effective Approximation of Heavy-Tailed Distributions by Phase-Type Distributions," *Performance Evaluation*, 2023, vol. 162, Art. 102357, pp. 1-22.
- [15] Z. Yuan, M. Chen "Optimization of PH-distribution fitting via EM-algorithm for 6G Traffic Modeling," *Journal of Network and Computer Applications*, 2025, vol. 234, pp. 104-118. (Early Access, Jan 2025).
- [16] D. Hurtado-Lange, S. T. Maguluri "A load balancing system in the many-server heavy-traffic asymptotics," *August. Queueing Systems*, 101(3-4):1-39 DOI:10.1007/s11134-022-09847-7

Information about authors:

Veniamin N. Tarasov, Professor of the Department of Computer Science and Robotic Systems, Povolzhskiy state university of telecommunications and informatics, Samara, Russia. ORCID: 0000-0002-9318-0797

Nadezhda N. Bakhareva, Professor of the Department of Computer Science and Robotic Systems, Povolzhskiy state university of telecommunications and informatics, Samara, Russia. ORCID: 0000-0002-9850-7752