

ОБОБЩЕНИЕ МЕТРИК ДЖИНИ И ДЖЕЙНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СПРАВЕДЛИВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В СИСТЕМАХ С НЕОРТОГОНАЛЬНЫМ ДОСТУПОМ

DOI: 10.36724/2072-8735-2026-20-8-35-43

Manuscript received 17 May 2026;

Accepted 24 July 2026

Крейнделин Виталий Борисович,
 Московский технический университет связи и
 информатики, Москва, Россия, vltkrend@gmail.com

Варукина Лидия Александровна,
 Московский технический университет связи и
 информатики, Москва, Россия, varukina@rambler.ru

Ключевые слова: NOMA, справедливое распределение,
 индекс Джейна, коэффициент Джини, подвижная связь

В задачах распределения радиоресурсов в беспроводных системах ключевую роль играет компромисс между суммарной пропускной способностью и справедливостью обслуживания пользователей. Классические метрики справедливости, такие как индекс Джейна и коэффициент Джини, широко применяются на практике, однако обладают фиксированной чувствительностью к неравномерности распределения скоростей и не позволяют гибко управлять этим компромиссом. В данной работе предлагается параметрическое обобщение индексов Джейна и Джини, основанное на степенном преобразовании пользовательских скоростей. Вводимый параметр позволяет непрерывно регулировать "жесткость" справедливости – от ориентированного на пропускную способность режима до режима, близкого к поддержанию минимального уровня справедливости. На примере системы с неортогональным разделением ресурсов между тремя пользователями проводится численный анализ оптимального распределения мощности при различных значениях параметров обобщения, коэффициентов канала и целевых уровней справедливости. Проиллюстрированы решения оптимизационной задачи Парето-характеристиками. Результаты демонстрируют, что обобщенные индексы обеспечивают более гибкий инструмент управления справедливостью по сравнению с классическими метриками.

Информация об авторах:

Крейнделин Виталий Борисович, Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), профессор, д.т.н., Москва, Россия

Варукина Лидия Александровна, Московский технический университет связи и информатики (МТУСИ), соискатель, к.т.н., Москва, Россия

Для цитирования:

Крейнделин В. Б., Варукина Л. А. Обобщение метрик Джини и Джейна для решения задачи справедливого распределения ресурсов в системах с неортогональным доступом // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2026. Том 20. №8. С. 35-43.

For citation:

V. B. Kreyndelin, L. A. Varukina, "Generalizing Jain and Gini Indices for Fair Power Allocation in Systems of Non-Orthogonal Multiple Access," T-Comm, 2026, vol. 20, no.8, pp. 35-43. (in Russian)

Введение

Современные беспроводные системы связи, включая 5G, IoT (Internet of Things) и системы с неортогональным множественным доступом (NOMA – Non-Orthogonal Multiple Access) [1-4], требуют эффективных механизмов распределения ограниченных радиоресурсов между пользователями. Одной из фундаментальных проблем в таких системах является компромисс между максимизацией суммарной пропускной способности и обеспечением справедливости обслуживания пользователей [5-9]. Под справедливостью в данном случае понимают такое распределение ресурсов сети, при котором не происходит дискриминации в обслуживании пользователей независимо от помеховых условий, в которых находится каждый из пользователей. Тем не менее, при обеспечении недискриминационного доступа к сетевым ресурсам приходится искать компромисс между качеством обслуживания пользователей и эффективностью работы системы, например, с точки зрения суммарной пропускной способности.

Для количественной оценки справедливости широко используются агрегированные метрики, среди которых наиболее известными являются индекс Джейна и коэффициент Джини [7]. Индекс Джейна вычисляется следующим образом:

$$J(\mathbf{P}) = \frac{\left(\sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P}) \right)^2}{K \sum_{k=1}^K (R_k(\mathbf{P}))^2}, \quad (1)$$

а коэффициент Джини равен:

$$G(\mathbf{P}) = \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K |R_i(\mathbf{P}) - R_j(\mathbf{P})|}{2K \sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P})}, \quad (2)$$

где $R_k(\mathbf{P})$ – скорость передачи данных k -го абонентского терминала, зависящая от распределения мощности между

пользователями $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \dots \\ p_K \end{bmatrix}$, где, в свою очередь, p_k – мощ-

ность передачи сигналов k -го абонентского терминала.

Индекс Джейна (1) прост в вычислении и интерпретации, принимает значения в диапазоне $[0, 1]$ и достигает максимума при равенстве скоростей пользователей, т.е. при выполнении условия $R_1(\mathbf{P}) = \dots = R_k(\mathbf{P}) = \dots = R_K(\mathbf{P})$. Коэффициент Джини (2), широко применяющийся в экономике и теории распределения доходов, напротив, измеряет степень неравенства, приобретает минимальное (т.е. нулевое) значение из диапазона $[0, 1]$ при абсолютной справедливости – равенстве скоростей пользователей, т.е. по-прежнему при $R_1(\mathbf{P}) = \dots = R_k(\mathbf{P}) = \dots = R_K(\mathbf{P})$.

Несмотря на популярность, обе метрики обладают существенным ограничением: их чувствительность к неравномерности распределения мощности между пользователями фиксирована. Это означает, что они не позволяют явно настраивать степень приоритизации слабых или сильных пользователей. В практических системах, однако, требования к справедливости могут существенно различаться в зависимости от сценария, уровня нагрузки или типа сервиса [15-17].

В данной работе предлагается параметрическое обобщение индексов Джейна (1) и Джини (2), вводящее дополнительную степень свободы для управления компромиссом между пропускной способностью и справедливостью. Основные результаты работы заключаются в следующем:

- предложено единое степенное обобщение традиционных индексов Джейна (1) и Джини (2);
- исследовано влияние параметра обобщения на оптимальное распределение мощностей и скоростей пользователей;
- проанализированы области допустимости решений при заданных целевых уровнях справедливости;
- выполнено сравнительное исследование поведения обобщённых индексов Джейна и Джини.

1 Системная модель

Рассматривается нисходящая линия связи трехпользовательской беспроводной системы связи ($K = 3$) с неортогональным множественным доступом и с разделением по мощности. Пусть три пользователя обслуживаются одной базовой станцией, передающей сигналы с мощностями p_1, p_2 и p_3 , удовлетворяющими ограничению по суммарной мощности:

$$p_1 + p_2 + p_3 \leq P_{\max}, \quad (3)$$

где $P_{\max}$ – максимальная общая мощность передачи сигналов для всех пользователей

Комплексные коэффициенты передачи каналов пользователей обозначаются как h_1, h_2 и h_3 , а дисперсия аддитивного белого гауссовского шума равна σ^2 . Отношение коэффициентов передачи канала $\gamma = h_2 / h_1 = h_3 / h_2$ используется в дальнейшем как параметр, характеризующий степень асимметрии характеристик каналов пользователей.

С учётом взаимных помех между K терминалами, обслуживаемых в одной соте, отношение сигнал/(шум+помеха) (SINR – Signal-to-Interference+Noise-Ratio) для k -го абонентского терминала записывается следующим образом:

$$\rho_k = \frac{p_k |h_k|^2}{\sigma_k^2 + \sum_{j=1, j \neq k}^K p_j |h_k|^2}, \quad k = 1, \dots, K \quad (4)$$

Соответствующая максимальная скорость передачи данных k -го абонентского терминала, согласно формуле Шеннона, равна [8]:

$$R_k = B \log_2(1 + \rho_k), \quad (5)$$

где B – ширина полосы частот канала связи.

Суммарная пропускная способность всей системы определяется по формуле:

$$R_{sum} = \sum_{k=1}^K R_k. \quad (6)$$

Таким образом, из выражений (4), (5) и (6) следует, что скорости пользователей и суммарная пропускная способность всей системы являются нелинейными функциями вектора распределения мощности $R_k(\mathbf{P})$, $R_{sum}(\mathbf{P})$.

2 Обобщённые метрики справедливости

Метрики справедливости – индекс Джейна (1) и коэффициент Джини (2) – ограничиваются диапазонами $J(\mathbf{P}) \in [0, 1]$ и $G(\mathbf{P}) \in [0, 1]$, причем с противоположными значениями границ этих диапазонов, соответствующих идеальной справедливости и полной несправедливости [10-12]. Для обеспечения сопоставимости метрик в рамках единой оптимизационной задачи в данной работе используется дополненный коэффициент Джини:

$$G^{(comp)}(\mathbf{P}) = 1 - G(\mathbf{P}). \quad (7)$$

Приведем на рис. 1 и 2 графики зависимости $J(\mathbf{P})$ и $G^{(comp)}(\mathbf{P})$ для системы с 3 пользователями, учитывая (3) $p_1 + p_2 = P_{max} - p_3$, а также приняв значения коэффициентов передачи канала для пользователей – $h_1 = 1$, $h_2 = \gamma h_1$, $h_3 = \gamma h_2$, $\gamma = 0.5$.

Следует заметить, что рассматриваемые функции достигают максимума при равенстве скоростей пользователей, т.е. при $R_1 = R_2 = R_3$ (полная справедливость). Максимальные значения обеих метрик достигаются при идентичных значениях мощностей, определяемых вектором $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.22 \\ 0.66 \end{bmatrix}$, обеспечивая при этом равенство скоростей $R_1 = R_2 = R_3$.

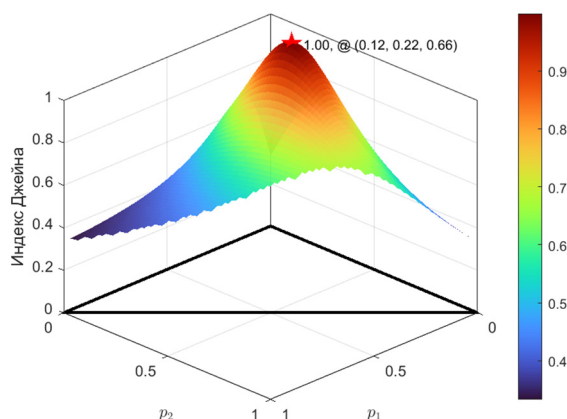


Рис. 1. Зависимость индекса Джейна от распределения мощности между пользователями

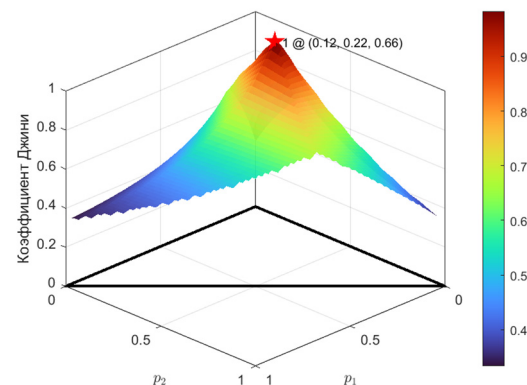


Рис. 2. Зависимость дополненного коэффициента Джини от распределения мощности между пользователями

Для более тонкой настройки справедливости предлагается воспользоваться дополнительным измерением, обобщив классические метрики с использованием степенного параметра $q > 0$.

Для системы с K пользователями предлагается использовать следующие обобщенные метрики:

- обобщенный индекс Джейна:

$$J_q(\mathbf{P}) = \frac{\left(\sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P}) \right)^q}{K \sum_{k=1}^K R_k^q(\mathbf{P})}, \quad (8)$$

- обобщенный коэффициент Джини:

$$G_q(\mathbf{P}) = \frac{\sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^K |R_i(\mathbf{P}) - R_j(\mathbf{P})|^q}{2K \sum_{k=1}^K R_k^q(\mathbf{P})}. \quad (9)$$

Из выражения (8) видно, что при $q = 2$ обобщенный индекс Джейна совпадает с обычным индексом Джейна (1). Аналогично, при $q = 1$ обобщенный коэффициент Джини (9) переходит в обычный коэффициент Джини (2). Отметим, что введение дополнительной степени свободы в виде выбора величины q должно дать возможность достижения более точного компромисса между справедливостью и пропускной способностью.

Максимальное значение обобщенного индекса Джейна (8) может превышать 1, а максимальное значение дополненного обобщенного коэффициента Джини:

$$G_q^{(comp)}(\mathbf{P}) = 1 - G_q(\mathbf{P}) \quad (10)$$

не превышает 1. Для обеспечения сопоставимости обобщенных метрик далее будем использовать нормированный обобщенный индекс Джейна с тем, чтобы его область значений находилась в диапазоне $[0, 1]$:

$$J_q(\mathbf{P}) = \frac{\left(\sum_{k=1}^K R_k(\mathbf{P}) \right)^q}{K^{q-1} \sum_{k=1}^K R_k^q(\mathbf{P})}. \quad (11)$$

Приведем на рис. 3 и 4 графики зависимости $J_q^{(norm)}(\mathbf{P})$ (11) и $G_q^{(comp)}(\mathbf{P})$ (10) при $q = 2.5$ и $q = 3$ для системы с 3 пользователями, причем $p_1 + p_2 = P_{\max} - p_3$.

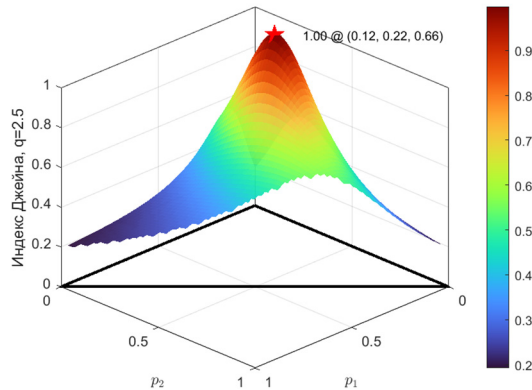


Рис. 3а. Зависимость обобщенного индекса Джейна от распределения мощности между пользователями при $q = 2.5$

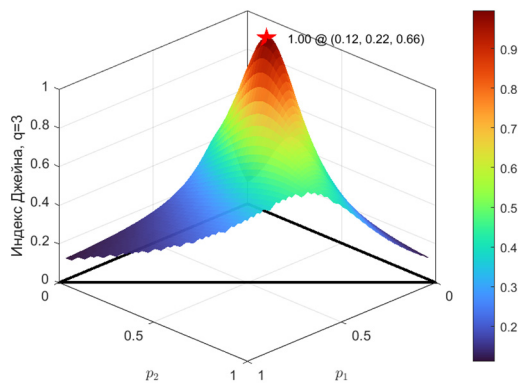


Рис. 3б. Зависимость обобщенного индекса Джейна от распределения мощности между пользователями при $q = 3$

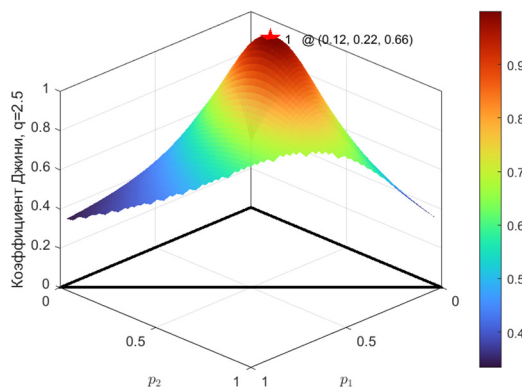


Рис. 4а. Зависимость обобщенного коэффициента Джини от распределения мощности между пользователями при $q = 2.5$

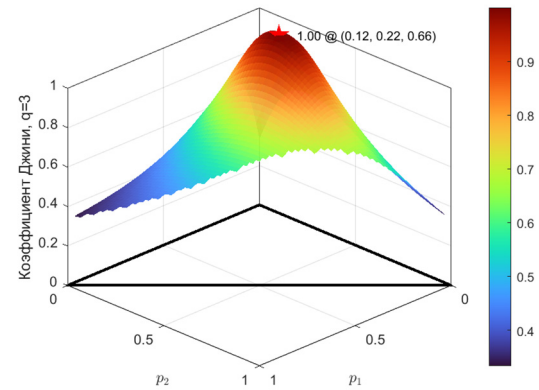


Рис. 4б. Зависимость обобщенного коэффициента Джини от распределения мощности между пользователями при $q = 3$

Следует заметить, что обобщенные метрики достигают максимума при тех же значениях мощности $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.22 \\ 0.66 \end{bmatrix}$, что и

в случае классических метрик, при условии равенства скоростей $R_1 = R_2 = R_3$ (полная справедливость).

Из графиков на рис. 1-4 видно, что несмотря на совпадение условий достижения максимума функций – одинаковое значение вектора $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.12 \\ 0.22 \\ 0.66 \end{bmatrix}$, разница между функциями мет-

рик заключается в форме поверхностей, то есть разной степенью «жесткости» справедливости при распределении мощности абонентским терминалам.

3 Постановка задачи оптимизации

После того, как выбран критерий (например, учитывающий метрики справедливости), необходимо поставить и решить задачу оптимизации и найти оптимальное распределение мощностей пользователей.

Для заданного целевого уровня справедливости формулируется задача оптимального распределения мощности для максимизации суммарной пропускной способности, равной с учетом выражений (4) и (5):

$$\max_{\mathbf{P}} f(\mathbf{P}) = \max_{\mathbf{P}} (R_1(\mathbf{P}) + R_2(\mathbf{P}) + R_3(\mathbf{P})) \quad (12)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = P_{\max} \\ p_1, p_2, p_3 > 0 \\ F_q(\mathbf{P}) = F_{\text{target}} \end{cases},$$

где F_{target} – целевое значение метрики справедливости в общем случае, а в каждом отдельном случае – целевое значение индекса Джейна $F_{\text{target}} = J_{\text{target}}^{(norm)}$, или целевое значение коэффициента Джини $F_{\text{target}} = G_{\text{target}}^{(comp)}$.

С учетом ограничения по суммарной излучаемой мощности и с учетом того, что $p_1 + p_2 = P_{\max} - p_3$, рассматриваемая задача является двумерной нелинейной задачей оптимизации с ограничением. Решение задачи оптимизации сводится к поиску оптимальной точки на двумерном симплексе допустимых значений мощности сигналов пользователей.

Отметим, что оптимизационная задача вида (12) не может быть поставлена для двух пользователей. В этом случае целевая функция $f(\mathbf{P})$ будет функцией двух аргументов, а оптимизация должна проводиться в условиях наличия также двух линейных ограничений (на суммарную мощность сигналов всех пользователей и на целевое значение выбранной метрики справедливости). В данной ситуации задача оптимизации функции $f(\mathbf{P})$ становится вырожденной, поскольку область определения этой функции с учетом двух наложенных ограничений вырождается в одну точку. Поэтому для двух пользователей задача вида (12) утрачивает практический смысл.

4 Задача оптимизации

Решение задачи оптимизации – нахождение таких значений мощностей сигналов пользователей p_1, p_2 , при которых достигаются максимум суммарной пропускной способности системы (12) и заданное целевое значение выбранной метрики справедливости. С учетом ограничения по суммарной мощности $p_1 + p_2 = P_{\max} - p_3$ задача оптимизации сводится к двумерной задаче по переменным p_1 и p_2 , при этом $p_k \in]0, P_{\max}[$.

Рассматриваемая задача является нелинейной задачей оптимизации с ограничениями по метрике справедливости и по излучаемой суммарной мощности сигналов пользователей. Ввиду сложности получения аналитического решения, в данной работе используется численный итерационный метод, сочетающий градиентный поиск экстремума целевой функции [13, 14] с контролем выполнения ограничения по метрике справедливости.

5 Численные эксперименты

Численные эксперименты проводятся для различных значений параметра обобщения и целевых метрик справедливости при различных коэффициентах передачи канала для всех пользователей, в частности:

- $q = 1, 1,5, 2, 2,5, 3$;
- $F_{\text{target}} = 0, 0,5, 0,75, 1$;
- $h_1 = 1, \quad h_2 = \gamma h_1, \quad h_3 = \gamma h_2, \quad \gamma = 0,1, 0,5, 0,9$;
- $\sigma^2 = 0,5$;
- $P_{\max} = 1$;
- $B = 1$.

Для каждого набора параметров решается задача оптимизации распределения мощности, определяются индивидуальные скорости пользователей и суммарная пропускная способность системы. Результаты решения задачи оптимизации при $q = 2,5$ показаны в таблице 1, где под метрикой «Джейн» понимается – нормированный обобщенный индекс Джейна, а под метрикой «Джини» – дополненный обобщенный коэффициент Джини. В столбце «Решение» указано, найдено ли решение оптимизационной задачи («да»/«нет»).

Из данных табл. 1 можно сделать следующие выводы о влиянии F_{target} на распределение ресурсов и достижимых скоростях передачи данных:

1. При малых значениях заданного уровня метрики справедливости F_{target} (например, 0,5) оптимальное распределение мощности смещено в сторону пользователя с наилучшим каналом, что обеспечивает максимизацию суммарной пропускной способности системы связи. Но при этом пользователю с наихудшими условиями канала мощность вообще не выделяется, его скорость равна 0. В этом случае задача оптимизации не имеет решения – условие справедливого распределения ресурсов не выполняется.

2. При увеличении заданного уровня метрики справедливости F_{target} происходит перераспределение мощности от сильных пользователей в пользу слабых пользователей.

3. При $F_{\text{target}} \rightarrow 1$ мощности распределяются таким образом, чтобы обеспечить практически равенство скоростей, что сопровождается снижением R_{sum} .

4. С ростом требований справедливости снижение суммарной пропускной способности системы связи носит нелинейный характер: вблизи $F_{\text{target}} \approx 1$ наблюдается резкое падение R_{sum} .

Таким образом, данные из Табл. 1 подтверждают наличие выраженного компромисса между спектральной эффективностью (пропускной способностью) системы связи и равномерностью обслуживания пользователей.

Сравнительный анализ метрик справедливости показывает следующее:

1. При одинаковых уровнях метрики справедливости F_{target} решения, полученные по критерию Джини, характеризуются более выраженным перераспределением мощности от сильных пользователей в пользу слабых пользователей.

2. При использовании коэффициента Джини снижение суммарной пропускной способности системы связи происходит быстрее.

3. Индекс Джейна демонстрирует более «плавное» поведение суммарной пропускной способности системы связи.

Это подтверждает различие в чувствительности метрик к асимметрии скоростей пользователей, что также можно продемонстрировать на графиках зависимостей скорости пользователей при фиксированной метрике справедливости.

Результаты решения задачи оптимизации при $q = 2,5$

Метрика	γ	F_{target}	p_1	p_2	p_3	R_1	R_2	R_3	R_{sum}	Решение
Джейн	0,1	0,5	0,044	0,956	0	0,0425	0,027	0	0,070	нет
Джини	0,1	0,5	0,109	0,891	0	0,109	0,025	0	0,134	нет
Джейн	0,1	0,75	0,001	0,033	0,966	0,001	0,001	0,0003	0,002	да
Джини	0,1	0,75	0,002	0,093	0,8376	0,002	0,003	0,0002	0,005	да
Джейн	0,1	1	0,028	0,944	0,028	0,027	0,027	8e-06	0,054	нет
Джини	0,1	1	0,029	0,939	0,033	0,028	0,027	9e-06	0,055	нет
Джейн	0,5	0,5	0,424	0,576	0	0,479	0,308	0	0,787	нет
Джини	0,5	0,5	0,636	0,364	0	0,796	0,186	0	0,983	нет
Джейн	0,5	0,75	0,217	0,391	0,392	0,225	0,202	0,064	0,491	да
Джини	0,5	0,75	0,305	0,482	0,213	0,328	0,253	0,035	0,615	да
Джейн	0,5	1	0,111	0,222	0,667	0,111	0,111	0,111	0,333	да
Джини	0,5	1	0,111	0,222	0,667	0,111	0,111	0,111	0,333	да
Джейн	0,9	0,5	0,392	0,608	2e-17	0,437	0,680	0	1,117	нет
Джини	0,9	0,5	0,755	0,245	0	1,010	0,237	0	1,247	нет
Джейн	0,9	0,75	0,435	0,401	0,164	0,494	0,411	0,1412	1,046	да
Джини	0,9	0,75	0,530	0,375	0,095	0,629	0,381	0,080	1,090	да
Джейн	0,9	1	0,307	0,331	0,361	0,331	0,331	0,331	0,993	да
Джини	0,9	1	0,307	0,331	0,361	0,331	0,331	0,331	0,993	да

Параметр γ характеризует степень различия канальных условий пользователей. Анализ результатов численных экспериментов в зависимости от γ позволяет выделить следующие закономерности:

1. При $\gamma \rightarrow 1$ система становится почти симметричной. В этом случае достижение высокой справедливости сопровождается умеренным снижением суммарной скорости всех пользователей

2. При $\gamma = 0.5$ наблюдается умеренная асимметрия. Компромисс между справедливостью и пропускной способностью становится более выраженным

3. При $\gamma = 0.1$ система характеризуется сильным дисбалансом каналов пользователей. В этом случае достижение высокого уровня справедливости требует значительного перераспределения мощности между пользователями и приводит к существенной деградации суммарной пропускной способности или к невозможности выполнения условия справедливого распределения ресурсов в системе

Следовательно, степень асимметрии канала влияет на область достижимости целевых значений справедливости.

По результатам решения оптимизационной задачи также построены Парето-характеристики, то есть графики с точками-решениями оптимизационной задачи как зависимости суммарной скорости R_{sum} от целевого значения метрики

справедливости при разных значениях степенного параметра q , которые отображают компромисс между суммарной скоростью и справедливостью.

На рис. 5 и 6 изображены Парето-характеристики для нормированных обобщенных метрик Джейна и Джини, соответственно.

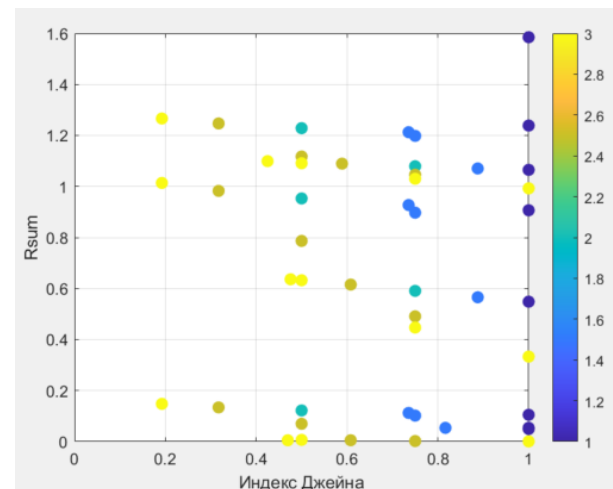


Рис. 5. Парето-характеристики для нормированного обобщенного индекса Джейна при $\gamma = 0.5$

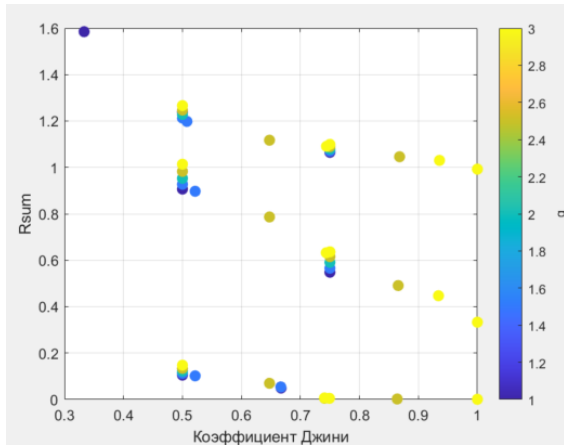


Рис. 6. Парето-характеристики для дополненного обобщенного коэффициента Джини при $\gamma = 0.5$

Графики на рис. 5 и 6 иллюстрируют влияние параметра обобщения q на компромисс между суммарной пропускной способностью системы связи и справедливостью обслуживания пользователей. Для каждого фиксированного значения q Парето-характеристики отражают множество оптимальных решений задачи распределения мощности при различных целевых уровнях справедливости.

При малых значениях параметра q метрики справедливости обладают пониженной чувствительностью к неравномерности распределения пользовательских скоростей. В этом режиме увеличение целевого уровня справедливости достигается преимущественно за счёт повышения скорости слабого пользователя при относительно незначительном снижении суммарной пропускной способности всей системы.

С ростом параметра q чувствительность метрик к асимметрии скоростей пользователей возрастает. Обеспечение заданного уровня справедливости в этом случае требует более жёсткого выравнивания пользовательских скоростей, что приводит к перераспределению мощности в пользу пользователей с худшими каналами и сопровождается заметным снижением суммарной пропускной способности системы связи.

Таким образом, параметр q определяет Парето-характеристики и выступает в роли регулятора «жёсткости» справедливости, задавая характер компромисса между спектральной эффективностью системы связи и равномерностью обслуживания пользователей.

На рис. 7 и 8 показаны зависимости индивидуальных скоростей пользователей от целевых метрик справедливости при $q = 2.5$ в значительно различающихся канальных условиях, $\gamma = 0.5$.

Анализ зависимостей индивидуальных скоростей пользователей при дисбалансе их канальных характеристик показывает, что обобщённый коэффициент Джини проявляет более высокую чувствительность к асимметрии каналов пользователей, приводит к распределению ресурсов для выравнивания скоростей, что сопровождается снижением суммарной пропускной способности всей системы, тогда как индекс Джейна обеспечивает более устойчивую зависимость суммарной скорости всех пользователей от параметров справедливости.

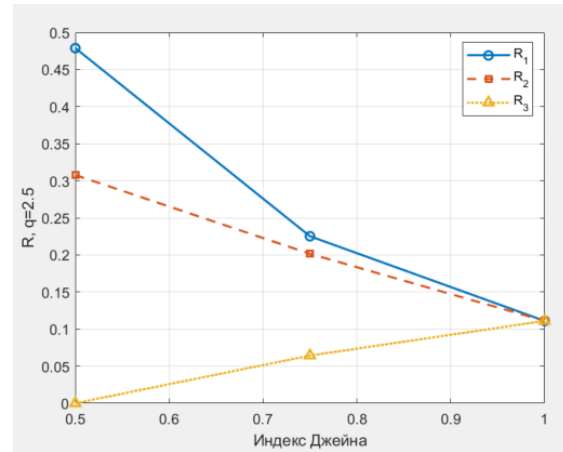


Рис. 7. Зависимость скорости от нормализованного обобщенного индекса Джейна при $\gamma = 0.5$

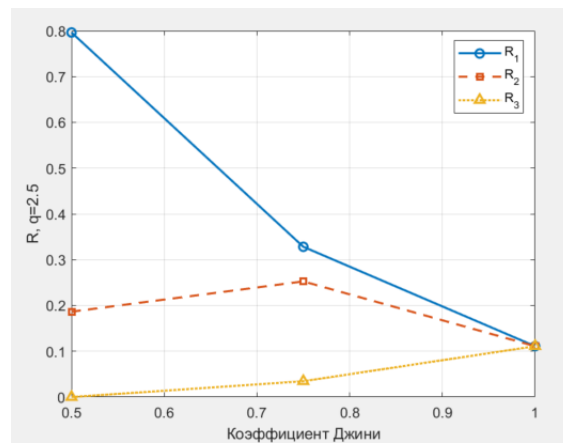


Рис. 8. Зависимость скорости от дополненного обобщенного коэффициента Джини при $\gamma = 0.5$

Анализ приведенных зависимостей показывает, что решение оптимизационной задачи существует не для всех комбинаций параметров q , γ и F_{target} . Максимальное значение нормированной обобщённой метрики справедливости равно 1 и достигается только при условии $R_1 = R_2 = R_3$. Это требует специфического распределения мощности между пользователями, которое не всегда достижимо при сильной асимметрии каналов, а также:

- при умеренных значениях γ решение достижимо для $F_{target} \in [0.5, 1]$;
- при малых γ область допустимых значений F_{target} сужается;
- при высоких q требование высокой справедливости может приводить к отсутствию допустимого решения.

Таким образом, область достижимости целевых значений справедливости зависит как от параметра обобщения q , так и от условий распространения радиоволн в канале связи.

В общем случае результаты численных экспериментов показывают, что параметр обобщения q может быть интерпретирован как настраиваемый регулятор приоритета между спектральной эффективностью системы связи и

равномерностью обслуживания всех пользователей. Варьирование параметра q позволяет непрерывно изменять характер компромисса между суммарной пропускной способностью и справедливостью без изменения структуры оптимизационной задачи, что делает предложенные обобщённые метрики удобным инструментом для адаптивного управления ресурсами в системах NOMA с разделением по мощности.

Заключение

В работе предложено параметрическое обобщение классических метрик справедливости – индекса Джейна и коэффициента Джини – применительно к задаче распределения мощности между пользователями в системах с неортогональным множественным доступом с разделением по мощности. Введение степенного параметра q позволяет существенно расширить пространство допустимых компромиссов между суммарной пропускной способностью системы и равномерностью обслуживания пользователей.

Проведённый численный анализ для трехпользовательской системы NOMA с разделением по мощности показал, что параметр обобщения q выступает в роли эффективного регулятора чувствительности метрик справедливости к асимметрии пользовательских скоростей в системе связи. В зависимости от его значения оптимальное распределение ресурсов может быть ориентировано либо на повышение суммарной спектральной эффективности системы, либо на более жёсткое выравнивание скоростей пользователей.

Построенные Парето-характеристики наглядно демонстрируют, что изменение параметра q приводит к изменению формы компромисса между пропускной способностью и справедливостью, не затрагивая при этом структуру оптимизационной задачи. Это позволяет адаптивно настраивать политику распределения ресурсов между пользователями под требования конкретного сценария без изменения алгоритмической основы.

Полученные результаты подтверждают, что предложенные в работе обобщённые метрики справедливости представляют собой эффективный и гибкий инструмент анализа и проектирования алгоритмов распределения ресурсов в современных и перспективных беспроводных системах связи, включая системы NOMA с разделением по мощности.

В дальнейшем представленный подход может быть расширен на многопользовательские сценарии, а также использован в задачах совместной оптимизации распределения мощности и других канальных ресурсов в условиях динамически изменяющихся характеристик канала.

Литература

1. Бакулин М.Г., Бен Режеб Т.Б.К., Крейнделин В.Б. и др. Неортогональный множественный доступ (NOMA) как основа систем связи 5G и 6G. М.: Горячая линия-Телеком, 2024. 264 с.

2. Tong W., Zhu P., et al. 6G: The Next Horizon: From Connected People and Things to Connected Intelligence. Cambridge University Press, 2021. 490 p.

3. Крейнделин В.Б., Варукина Л.А. Обработка и прекодирование сигналов в системе с неортогональным доступом и с разделением по мощности // *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2024. Т. 18, № 6. С. 3–45. DOI: 10.36724/2072-8735-2024-18-6-38-45. EDN: CMVGXV.

4. Belmekki B., Alouini M.-S. NOMA as the Next-Generation Multiple Access in Nonterrestrial Networks // *Proceedings of the IEEE*. 2024. Vol. 112, Issue 9, pp. 1303-1345. DOI: 10.1109/JPROC.2024.3496775.

5. Tuong V., Cho S. Deep-Learning-Based Resource Allocation for 6G NOMA-Assisted Backscatter Communications // *IEEE Internet of Things Journal*. 2024. Vol. 11, Issue 19, pp. 32234-32243. DOI: 10.1109/JIOT.2024.3424728.

6. Thakre P.N., Pokle S.B. A Survey on Power Allocation in PD-NOMA for 5G Wireless Communication Systems // *Proc. 10th International Conference on Emerging Trends in Engineering and Technology – Signal and Information Processing (ICETET-SIP-22)*. Nagpur, India, 2022, pp. 1-5. DOI: 10.1109/ICETET-SIP-2254415.2022.9791576.

7. Islam S., Riazul M. et al. Resource Allocation for Downlink NOMA Systems: Key Techniques and Open Issues // *IEEE Wireless Communications*. 2017. Issue 25, pp. 40-47.

8. Abuajwa O., Roslee M., Yusoff Z., Chuan L., Leong P. Resource Allocation for Throughput versus Fairness Trade-Offs under User Data Rate Fairness in NOMA Systems in 5G Networks // *Applied Sciences*. 2022. Vol. 12, Issue 7. 3226. DOI: 10.3390/app12073226.

9. Бакулин М.Г., Варукина Л.А., Крейнделин В.Б. Технология ММО. Принципы и алгоритмы. М.: Горячая линия – Телеком, 2014. 242 с.

10. Крейнделин В.Б., Варукина Л.А. Проблема справедливого распределения мощности в системе PD-NOMA // *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2025. № 12. С. 25-33.

11. Lan T., Kao D., Chiang M., Sabharwal A. An Axiomatic Theory of Fairness in Network Resource Allocation // *Proc. IEEE INFOCOM*. San Diego, USA, 2010, pp. 1-9. DOI: 10.1109/INFCOM.2010.5461911.

12. Pliatsios D., Sarigiannidis P. Resource Allocation Combining Heuristic Matching and Particle Swarm Optimization Approaches: The Case of Downlink NOMA // *Information*. 2019. Vol. 10, No. 11. P. 336.

13. Методы оптимальных решений в экономике и финансах: учебник / под ред. В.М. Гончаренко, В.Ю. Попова. М.: КНОРУС, 2013. 400 с.

14. Гончаров В.А. Методы оптимизации: учебник для вузов. М.: Юрайт, 2025. 191 с.

15. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б. Проблема повышения спектральной эффективности и емкости в перспективных системах связи 6G // *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2020. Т. 14. № 2. С. 25-31.

16. Крейнделин В.Б., Смирнов А.Э., Бен Режеб Т.Б.К. Эффективность методов обработки сигналов в системах mu -mimo высоких порядков // *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2016. Т. 10. № 12. С. 24-30.

17. Бакулин М.Г., Крейнделин В.Б., Панкратов Д.Ю., Степанова А.Г. Новый подход к задачам $mimo$ -детектирования и многопользовательской демодуляции // *Информационные процессы*. 2021. Т. 21. № 2. С. 93-107.

GENERALIZING JAIN AND GINI INDICES FOR FAIR POWER ALLOCATION IN SYSTEMS OF NON-ORTHOGONAL MULTIPLE ACCESS

Vitaly B. Kreyndelin, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia, vitkrend@gmail.com

Lidia A. Varukina, Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russia, varukina@rambler.ru

Abstract

In wireless resource allocation problems, a fundamental trade-off exists between maximizing the total system throughput and ensuring fairness among users. Classical fairness metrics, such as the Jain index and the Gini coefficient, are widely used in practice; however, they exhibit fixed sensitivity to rate imbalance and do not allow flexible control over this trade-off. In this paper, a parametric generalization of the Jain and Gini fairness metrics is proposed based on a power-law transformation of user data rates. The introduced parameter enables continuous adjustment of fairness "strictness," ranging from throughput-oriented operation to regimes close to minimum-rate fairness. Using a three-user non-orthogonal multiple access system as an example, a numerical analysis of optimal power allocation is performed for different values of the generalization parameter, channel asymmetry, and target fairness levels. Feasible solution regions are identified, and Pareto curves illustrating the trade-off between total throughput and fairness are presented. The results demonstrate that the generalized fairness metrics provide a more flexible and effective tool for fairness control compared to classical metrics.

Keywords: NOMA, fairness, Jain Index, Gini Coefficient, mobile communications

References

- [1] M.G. Bakulin, T.B.K. Ben Rejeb, V.B. Kreyndelin, et al., "Non-Orthogonal Multiple Access (NOMA) as the Basis of 5G and 6G Communication Systems," Moscow: Hot Line-Telecom, 2024. 264 p. (in Russian)
- [2] W. Tong, P. Zhu, et al., "6G: The Next Horizon: From Connected People and Things to Connected Intelligence," Cambridge University Press, 2021. 490 p.
- [3] V.B. Kreyndelin, L.A. Varukina, "Processing and Precoding of Signals in a System with Non-Orthogonal Access and Power Division," *T-Comm*. 2024. Vol. 18, Issue 6, pp. 38-45. (in Russian)
- [4] B. Belmekki, M.-S. Alouini, "NOMA as the Next-Generation Multiple Access in Nonterrestrial Networks," *Proceedings of the IEEE*. 2024. Vol. 112, Issue 9, pp. 1303-1345. DOI: 10.1109/JPROC.2024.3496775.
- [5] V. Tuong, S. Cho, "Deep-Learning-Based Resource Allocation for 6G NOMA-Assisted Backscatter Communications," *IEEE Internet of Things Journal*. 2024. Vol. 11, Issue 19, pp. 32234-32243. DOI: 10.1109/JIOT.2024.3424728.
- [6] P.N. Thakre, S.B. Pokle, "A Survey on Power Allocation in PD-NOMA for 5G Wireless Communication Systems," *Proc. ICETET-SIP-22*. Nagpur, India, 2022, pp. 1-5. DOI: 10.1109/ICETET-SIP-2254415.2022.9791576.
- [7] S. Islam, M. Riazul et al., "Resource Allocation for Downlink NOMA Systems: Key Techniques and Open Issues," *IEEE Wireless Communications*. 2017. Issue 25, pp. 40-47.
- [8] O. Abuajwa, M. Roslee, Z. Yusoff, L. Chuan, P. Leong, "Resource Allocation for Throughput versus Fairness Trade-Offs under User Data Rate Fairness in NOMA Systems in 5G Networks," *Applied Sciences*. 2022. Vol. 12, Issue 7. 3226. DOI: 10.3390/app12073226.
- [9] M.G. Bakulin, L.A. Varukina, V.B. Kreyndelin, "Technology of MIMO: Principles and Algorithms," Moscow: Hot Line-Telecom, 2014. 242 p. (in Russian)
- [10] V.B. Kreyndelin, L.A. Varukina, "Problem of Fair Power Allocation in PD-NOMA System," *T-Comm*. 2025. Issue 12. pp. 25-33. (in Russian)
- [11] T. Lan, D. Kao, M. Chiang, A. Sabharwal, "An Axiomatic Theory of Fairness in Network Resource Allocation," *Proc. IEEE INFOCOM*. 2010, pp. 1-9. DOI: 10.1109/INFCOM.2010.5461911.
- [12] D. Pliatsios, P. Sarigiannidis, "Resource Allocation Combining Heuristic Matching and Particle Swarm Optimization Approaches: The Case of Downlink NOMA," *Information*. 2019. Vol. 10, No. 11. p. 336.
- [13] Optimal Decision-Making Methods in Economics and Finance: Textbook / ed. by V.M. Goncharenko, V.Yu. Popov. Moscow: KNORUS, 2013. 400 p. (in Russian)
- [14] V.A. Goncharov, "Optimization Methods: University Textbook," Moscow: Yurait, 2025. 191 p. (in Russian)
- [15] M.G. Bakulin, V.B. Kreyndelin, "The problem of spectral efficiency and capacity increase in perspective 6G communication systems," *T-Comm*. 2020. Vol. 14. No. 2, pp. 25-31.
- [16] V.B. Kreyndelin, A.E. Smirnov, T.B.K. Ben Rejeb, "Efficiency of signal processing in multiuser large scale MIMO systems," *T-Comm*. 2016. Vol. 10. No. 12, pp. 24-30.
- [17] M.G. Bakulin, V.B. Kreyndelin, D.Yu. Pankratov, A.G. Stepanova, "A New Approach to MIMO Detection and Multi-User Demodulation Problems," *Information Processes*. 2021. Vol. 21. No. 2, pp. 93-107.

Information about authors:

Vitaly B. Kreyndelin, Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI), Doctor of technical sciences, Professor, Moscow, Russia

Lidia A. Varukina, Moscow Technical University of Communications and Informatics (MTUCI), PhD., applicant, Moscow, Russia