

ВЗАИМОСВЯЗЬ МОЩНОСТИ И ЭНЕРГИИ ПРИ ПЕРЕДАЧЕ В РЕЖИМЕ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА С МИНИМАЛЬНОЙ СРЕДНЕЙ ЗАДЕРЖКОЙ

DOI: 10.36724/2072-8735-2026-20-9-36-46

Manuscript received 11 June 2026;

Accepted 14 August 2026

Бурков Артём Андреевич,

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
г. Санкт-Петербург, Россия, a.burkov@guap.ru

Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского
научного фонда, проект № 22-19-00305-П <https://rscf.ru/project/22-19-00305/> "Пространственно-временные стохастические
модели беспроводных сетей с большим числом пользователей"

Тюрликов Андрей Михайлович,

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
г. Санкт-Петербург, Россия, turlikov@guap.ru

Ключевые слова: случайный множественный доступ, АЛОХА,
отношение сигнал/шум, энергия на бит, средняя задержка,
стабильность, марковская цепь, задача минимизации

Долгое время исследования в области случайного множественного доступа велись независимо в двух направлениях: теория информации множественного доступа и теория случайного множественного доступа. В последние годы стали появляться работы рассматривающие системы случайного множественного доступа совмещающие оба направления. Однако в существующих работах как правило совместно не рассматриваются вопросы взаимосвязи между мощностью и затратами энергии при наличии повторных передач и минимизации средней задержки в системе. В настоящей работе исследуются такая взаимосвязь. В работе рассматривается система случайного множественного доступа на основе алгоритма АЛОХА с гауссовским каналом множественного доступа. Предполагается, что в системе имеется потенциально неограниченное число абонентских устройств. Для такой системы описан подход для определения области стабильной работы, в которой обеспечивается конечность средней задержки. Предложен способ вычисления верхней и нижней границ для средней задержки с любой заданной точностью. Сформулирована и численно решена оптимизационная задача для минимизации средней задержки в системе за счет выбора длительности сообщения абонентов при фиксированном числе бит в сообщении и заданной мощности передачи. На основе решения оптимизационной задачи предложен подход, позволяющий получить зависимость энергозатрат от мощности при передаче в режиме случайного множественного доступа с минимальной средней задержкой. Показано, что эта зависимость не является монотонно возрастающей функцией. Существует значение мощности, которое минимизирует энергозатраты. Проведено сравнение с системой, в которой имеется только один источник с неограниченной очередью для хранения сообщений и один получатель, коллизии в такой системе отсутствуют. Поэтому для такой системы зависимость энергозатрат от мощности является монотонно возрастающей функцией. При этом энергозатраты для системы со случайным доступом выше, чем для системы с одним источником при любом значении мощности.

Информация об авторах:

Бурков Артём Андреевич, доцент кафедры инфокоммуникационных технологий и систем связи Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения", Санкт-Петербург, Россия, к.т.н., ORCID0000-0002-0920-585X

Тюрликов Андрей Михайлович, заведующий кафедрой инфокоммуникационных технологий и систем связи Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования "Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического приборостроения", Санкт-Петербург, Россия, профессор, д.т.н., ORCID0000-0001-7132-094X

Для цитирования:

Бурков А.А., Тюрликов А.М. Взаимосвязь мощности и энергии при передаче в режиме случайного множественного доступа с минимальной средней задержкой // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2026. Том 20. №9. С. 36-46.

For citation:

A.A. Burkov, A.M. Turlikov, "Relationship between power and energy in random multiple access transmission with minimum average delay," T-Comm, 2026, vol. 20, no.9, pp. 36-46. (in Russian)

Введение

Долгое время исследования в области случайного множественного доступа велись независимо в двух направлениях [1,2]: теория информации множественного доступа [3] и теория случайного множественного доступа [4]. В рамках данных направлений исследовались разные аспекты систем с множеством источников и одним получателем.

В рамках теории случайного множественного доступа рассматривается случайное число абонентских устройств, передающих данные по общему каналу связи. В рамках этого направления исследуются процессы случайного поступления сообщений в систему, проводится анализ стабильности систем и задержек, определяемых коллизией сообщений. При этом не учитывается влияние шумов в канале связи.

В направлении теории информации множественного доступа не рассматривается процесс случайного появления сообщений в системе. Традиционно предполагается, что число абонентских устройств, передающих по общему каналу связи, фиксировано. В рамках этого направления исследуется влияние шумов в канале связи или наложения сигналов пользователей на скорость передачи в системе.

В последние годы стали повальяться работы рассматривающие системы случайного множественного доступа совмещающие как теорию информации множественного доступа, так и теорию случайного множественного доступа. Первыми работами в этом направлении можно считать [5, 6].

Так в работе [6] авторы рассматривают гауссовский канал множественного доступа (Gaussian multiple access channel) для сценария, где число абонентских устройств фиксировано и известно. При этом их число может быть большим, но передают сообщения только некоторое подмножество из них. Вероятность успешной доставки задается как требование к системе. Рассматривается несколько алгоритмов множественного доступа, включая АЛОХА. Исследуются границы достижимости отношения энергии на бит к спектральной плотности мощности шума. Описанные в работах модели не допускают повторной передачи сообщений. Как следствие в системе присутствуют потери сообщений, и не возникает проблемы, связанной с обеспечением стабильной работы системы.

В работе [7] рассматривается система случайного множественного доступа с алгоритмом АЛОХА и гауссовским каналом множественного доступа. Решается задача минимизации среднего возраста информации за счет выбора оптимальной длины блока передаваемой информации. Для вычисления вероятности ошибки используется приближенное выражение для формулы из работы [6].

В рассмотренных ранее работах исследуется алгоритм АЛОХА без учета применения к конкретным технологиям. Однако в настоящее время активно развивается технология беспроводных сетей 5G, в рамках которой исследуются перспективы применения 2х шаговой процедуры случайного доступа наряду со стандартной 4х шаговой процедурой. Предполагается, что применение 2х шаговой процедуры позволит уменьшить объем передаваемой служебной информации, что в свою очередь может позволить снизить задержки в системе. Как правило, в качестве алгоритма, работающего на первом этапе этих процедур, используется алгоритм типа АЛОХА. Так в работе [8] исследуются различные варианты перехода от 2х шаговой процедуры к 4х шаговой, и рассматривается

вопрос изменения пропускной способности и средней длительности процедуры разрешения коллизии для четырех вариантов перехода. Но в работах аналогичных [8] как правило, не исследуется влияние характеристик шумов в канале связи на работу алгоритма.

В рамках данной работы будет рассмотрена система случайного множественного доступа на основе алгоритма АЛОХА с гауссовским каналом множественного доступа. Предполагается наличие потенциально неограниченного числа абонентских устройств. Будет рассматриваться задача минимизации средней задержки в системе, и исследоваться взаимосвязь мощности и энергии при передаче с минимальной средней задержкой.

1 Модель системы со случайным доступом в канал

В работе рассматривается система с гауссовским каналом множественного доступа [6]. Предполагается, что имеется одна базовая станция и потенциально неограниченное число абонентских устройств (пользователей). Для передачи данных по общему ресурсу канала используется алгоритм случайного множественного доступа АЛОХА. Помимо коллизий при передаче сообщений на успешную передачу сообщения также влияет наличие в канале аддитивного белого гауссовского шума (АБГШ). Введем ряд допущений для рассматриваемой системы (похожая система допущений приводилась в работах [9,10]).

Допущение 1. Каждое сообщение, передаваемое абонентским устройством, содержит k бит информации.

Допущение 2. Предполагается, что используется некоторая кодово-модуляционная схема A , которая на основе k бит информации формирует сигнал, содержащий n отсчетов.

Допущение 3. Время работы системы разделено на окна одинаковой длительности, принятой за единицу времени. Каждое окно позволяет передавать n отсчетов, то есть одно сообщение, содержащее k бит информации. Число сообщений, появляющихся в системе за одно окно, распределено по закону Пуассона с параметром Λ [сообщений/окно].

Допущение 4. Рассматривается потенциально неограниченное количество абонентских устройств (в таком случае понятия абонентское устройство и сообщение можно считать эквивалентными). Абонентское устройство с готовым к отправке сообщением будет называться активным.

Допущение 5. Абонентские устройства и базовая станция имеют синхронизацию, как по отсчетам, так и по окнам. Временные интервалы пронумерованы, и окно с номером t соответствует временному интервалу $[t, t + 1)$.

Допущение 6. Рассматривается дискретный по времени канал связи с аддитивным белым гауссовским шумом, определяемый как

$$Y = \sum_{i=1}^{K_t} X_i + Z$$

где Y – сигнал на входе приемника базовой станции; K_t – количество абонентских устройств, которые передавали в окне с номером t , являющееся случайной величиной; X_i – сигнал i -го пользовательского устройства; Z – аддитивный белый гауссовский шум, а $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Сигналы, передаваемые пользовательскими устройствами, содержат n отсчетов. Максимальная энергия каждого сигнала ограничена $X_i = nP$.

Допущение 7. Предполагается, что используются такие кодово-модуляционные схемы A , что при наложении пользовательских сигналов ни одно из сообщений в смеси не может быть успешно декодировано.

Допущение 8. При отсутствии наложения сообщений от разных абонентских устройств существует вероятность ошибки декодирования P_e , вызванная наличием в канале АБГШ. В таком случае с вероятностью P_e сообщение абонента не будет принято успешно.

Допущение 9. В обратном канале не возникает ошибок (или они всегда корректно исправляются), поэтому все абонентские устройства гарантированно и достоверно получают информацию от базовой станции.

Допущение 10. Абонентским устройствам и базовой станции достоверно известно число активных устройств $M_{акт}$. Каждое устройство независимо принимает решение о передаче в каждом очередном окне с вероятностью $p = \frac{1}{M_{акт}}$.

Примечание 1. Так как дисперсия шума в рассматриваемой модели равна 1 (см. допущение 6), то отношение сигнал/шум (SNR) в размах равно $P/1$. Таким образом, численное значение мощности сигнала P в ваттах совпадает с отношением сигнал/шум в размах.

Примечание 2. Все абоненты расположены на одинаковом расстоянии от базовой станции, передают с одинаковой мощностью P и находятся в одинаковых условиях радиоканала. Поэтому мощность сигнала от каждого устройства на приемнике одинакова и равна отношению сигнал/шум.

На рисунке 1 представлена схема, описывающая рассматриваемую систему случайного множественного доступа.

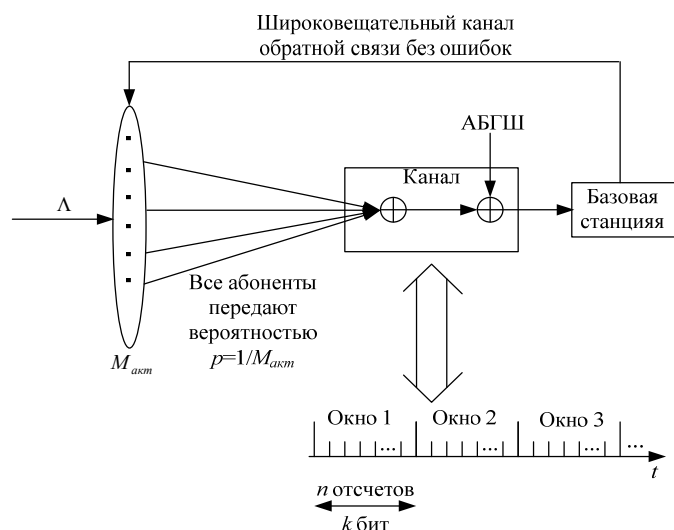


Рис. 1. Схема рассматриваемой системы

Описанная модель системы можно характеризовать следующим набором параметров:

- входная интенсивность Λ [сообщения/слот],
- число передаваемых бит информации k [биты],
- число отсчетов для передачи сигнала n [отсчёты],
- отношение сигнал/шум γ [разы],
- отношение энергии сигнала, приходящейся на один бит передаваемого сообщения E_b , к спектральной плотности шума N_0 – E_b/N_0 [энергия/бит].

Также введем в рассмотрение понятие спектральной эффективности ρ для системы с дискретным по времени каналом и интенсивностью входного потока Λ , определяющей интенсивность входного потока в битах на один отсчет. Взаимосвязь между Λ и ρ с учетом кодово-модуляционной схемы определяется следующим выражением [11]:

$$\rho[\text{бит/отсчет}] = \frac{\Lambda k}{n}. \quad (1)$$

Для систем Интернета вещей значение ρ лежит в диапазоне от доли бит на отсчет, до нескольких бит на отсчет [6]. В данной работе мы будем демонстрировать результаты для случая, когда $\rho=0.1$.

Из работы [12] следует, что существует код длины n отсчетов, содержащий k информационных символов, для которого вероятность ошибки декодирования при заданном значении отношения сигнал/шум γ не превышает величину P_e :

$$P_e(n, k, \gamma) = Q \left(\frac{n \frac{1}{2} \log_2(1 + \gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma + 2}{(\gamma + 1)^2} \log_2 e}} \right). \quad (2)$$

Ключевыми показателями для рассматриваемого типа систем являются [10]:

- среднее число активных абонентов в системе $\bar{N}$,
- средняя задержка $\bar{D}$,
- критическая интенсивность входного $\Lambda_{кр}$ – интенсивность входного потока, до которой система работает стабильно, а средняя задержка конечна [4]:

$$\Lambda_{кр} = \sup_{\Lambda} \{ \Lambda : \bar{D}(\Lambda) < \infty \}. \quad (3)$$

При $\Lambda < \Lambda_{кр}$ средняя задержка $\bar{D}$ и среднее число активных абонентов в системе $\bar{N}$ связаны через теорему Литтла [13]:

$$\bar{D} = \frac{\bar{N}}{\Lambda}. \quad (4)$$

2 Определение области стабильной работы системы

Рассматриваемая система работает стабильно (т.е. средняя задержка в системе конечна) при условии, что $\Lambda < \Lambda_{кр}$.

Для системы случайного доступа на основе алгоритма АЛОХА значение критической интенсивности совпадает с вероятностью того, в насыщенной системе сообщение успешно доставлено до получателя.

Наличие шумов в канале приводит к тому, что даже при отсутствии коллизии в канале с некоторой отличной от нуля вероятностью сообщение не будет принято успешно (см. допущение 8). Вероятность успешной передачи для рассматриваемой системы с учетом шумов в канале, вероятностью передачи p и вероятностью ошибки P_e может быть записана как:

$$\begin{aligned} \Lambda_{кр} &= \Pr \{ \text{успех} \mid M_{акт} \} \Pr \left\{ \begin{array}{l} \text{успешное} \\ \text{декодирование} \end{array} \middle| \text{успех} \right\} = \\ &= M_{акт} p (1 - p)^{M_{акт} - 1} (1 - P_e), \end{aligned}$$

При потенциально неограниченном числе абонентских

устройств с учетом допущения 10, критическая интенсивность для системы с учетом (2) можно вычислить по следующей формуле:

$$\Lambda_{кр} = \lim_{M_{акт} \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{M_{акт}}\right)^{M_{акт}-1} (1 - P_e(n, k, \gamma)) = e^{-1} (1 - P_e(n, k, \gamma)). \quad (5)$$

Интенсивность входного потока Λ при заданном значении спектральной эффективности ρ с учетом (1) может быть выражена как:

$$\Lambda = \frac{n\rho}{k}. \quad (6)$$

Пусть изначально для рассматриваемой системы заданы следующие требуемые параметры:

- значение спектральной эффективности ρ ,
- число бит передаваемой в сообщении информации k ,
- отношение сигнал/шум γ .

И рассматривается задача выбора числа отсчетов n за которое будет передаваться сообщение. Существует набор значений $n \in (n_{min}, n_{max})$, при которых система работает стабильно, а средняя задержка конечна.

Область стабильной работы, а также значения n_{min} и n_{max} можно определить с использованием выражений (5) и (6). Система стабильна, если соблюдается условие $\Lambda < \Lambda_{кр}$ то есть:

$$\frac{n\rho}{k} < e^{-1} (1 - P_e(n, k, \gamma)). \quad (7)$$

На рисунке 2 представлен пример определения области стабильности системы для значений $k=100$ бит, $\gamma=1$ и $\rho=0.1$. Из рисунка 2 видно, что для заданного набора параметров неравенство (7) выполняется на отрезке от 194 отсчетов до 367 отсчетов. То есть $n_{min}=194$ и $n_{max}=367$, а система стабильна для всех $n \in (194, 367)$.

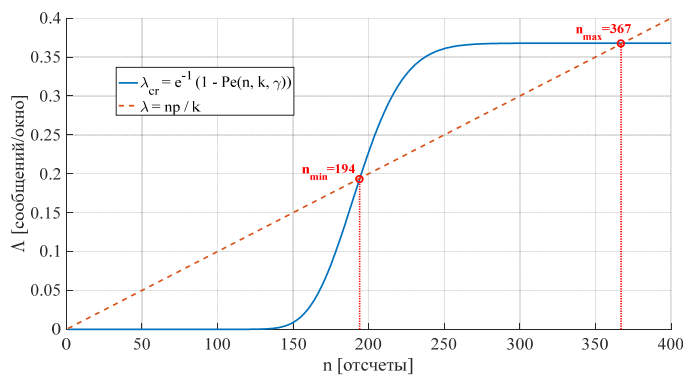


Рис. 2. Определение области стабильности для системы при $k=100$, $\gamma=1$ и $\rho=0.1$

Проведя аналогичные вычисления для различных значений ρ при фиксированных значениях числа информационных бит k и отношения сигнал/шум γ можно показать, что чем ниже требуемое значение ρ , тем больший диапазон области стабильной работы системы по параметру числа отсчетов n .

В результате, проведенный анализ области стабильности рассматриваемой системы, показано, что существует

некоторый набор значений n , при которых система работает стабильно, а средняя задержка конечна. Однако число отсчетов n влияет как на вероятность ошибки, вызванную шумами в канале (с увлечением числа отсчетов вероятность такой ошибки уменьшается [12]), так и на входную интенсивность. Увеличение числа отсчетов повышает входную интенсивность, что в свою очередь увеличивает среднее число активных абонентов в системе и повышает вероятность коллизии. Можно предположить, что существует такое значение числа отсчетов n , при котором для заданных параметров системы средняя задержка будет минимальной.

3 Анализ средней задержки в системе

Как отмечалось в предыдущем разделе выбор числа отсчетов n , за которое передается сообщение, может влиять на среднюю задержку в системе. Для того, что бы рассмотреть задачу снижения средней задержки за счет выбора оптимального параметра n необходимо рассмотреть способы вычисления или оценки данной характеристики системы.

Система случайного доступа на основе алгоритма АЛОХА с потенциально неограниченным число абонентских устройств может быть описана марковской цепью со счетным числом состояний [4]. Состояние данной марковской цепи отражает число активных абонентов в системе $M_{акт}$. Если система стабильна, то марковская цепь эргодична и для нее может быть найдено стационарное распределение $\bar{\pi} = \{\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots\}$ где π_i вероятность того, что в системе имеется i активных абонентов. Тогда среднее число абонентов в системе можно вычислить как:

$$\bar{N} = \sum_{i=0}^{\infty} i\pi_i.$$

И далее на основе теоремы Литтла получить среднюю задержку. Однако нахождение стационарного распределения для рассматриваемой системы является достаточно сложной задачей.

В работе [14] для системы с алгоритмом АЛОХА при отсутствии шумов в канале предложен подход для вычисления верхней и нижней границы средней задержки. Идея основана на введении двух вспомогательных систем, первая из которых позволяет вычислить нижнюю границу, а вторая верхнюю. В методе используется параметр K , влияющий на точность получаемых оценок, и с его увеличением интервал между границами уменьшается, что позволяет получить оценку средней задержки системы с требуемой точностью [14].

На основе работы [14] покажем способ вычисления верхней и нижней границ для средней задержки в рассматриваемой системе при учете наличия АБГШ канале связи.

Основным отличием рассматриваемой системы от системы из [14] является то, что вероятность успеха определяется

$$\text{как } \left(1 - \frac{1}{M_{акт}}\right)^{M_{акт}-1} (1 - P_e(n, k, \gamma)).$$

Параметр, влияющий на точность получаемых оценок, определим как K (аналогично работе [14]). Идея заключается в том, что для состояний марковской цепи начиная с некоторого состояния K , меняется вероятность передачи сообщения абонентами, что влияет на вероятность события успех.

Вероятность передачи задается таким образом, что начиная с состояния K вероятность успеха остается постоянной. Для системы, задающей верхнюю границу, эта вероятность ниже, чем у исходной, а для системы, задающей нижнюю границу, выше, чем в исходной.

Так для системы, определяющей верхнюю границу, вероятность успеха будет определяться по следующему правилу:

$$\Pr\{\text{успех} | i\} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{i-1} (1 - P_e(n, k, \gamma)), & i \leq K \\ e^{-1} (1 - P_e(n, k, \gamma)), & i > K \end{cases}$$

Для системы, определяющей нижнюю границу, вероятность успеха определяется по следующему правилу:

$$\Pr\{\text{успех} | i\} = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{i}\right)^{i-1} (1 - P_e(n, k, \gamma)), & i \leq K \\ \left(1 - \frac{1}{K}\right)^{K-1} (1 - P_e(n, k, \gamma)), & i > K \end{cases}$$

Далее с учетом введенных вероятностей успеха формируется система линейных уравнений, содержащая $K+1$ уравнение.

В общем виде получение системы уравнений может быть представлено в виде следующих шагов:

Шаг 1. Составляется $K+1$ стандартных уравнений для стационарных вероятностей $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \dots, \pi_K$;

Шаг 2. Предпоследнее уравнение заменяется на условие нормировки: $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_K = 1$;

Шаг 3. Последнее уравнение заменяется в зависимости от того какая вспомогательная система рассматривается:

– Для первой вспомогательной системы (верхняя граница):

$$(1 - P_e(n, k, \gamma)) \left(\sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \pi_k + e^{-1} \pi_K \right) = \Lambda.$$

– Для второй вспомогательной системы (нижняя граница):

$$(1 - P_e(n, k, \gamma)) \left(\sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \pi_k + \left(1 - \frac{1}{K}\right)^{K-1} \pi_K \right) = \Lambda.$$

Решив полученную систему линейных уравнений, получим набор стационарных вероятностей для соответствующей вспомогательной системы.

Далее повторим рассуждения из работы [14]. Для рассматриваемой в данной работе системы можно показать, что верхняя граница для средней задержки может быть получена как:

$$D_U = \frac{\psi_U(\Lambda, K)}{2\Lambda(e^{-1}(1 - P_e(n, k, \gamma)) - \Lambda)} + 0.5, \quad (8)$$

где

$$\psi_U(\Lambda, K) = \Lambda^2 + \Lambda - (1 - P_e(n, k, \gamma)) \left(2 \sum_{k=1}^K k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \pi_k + 2e^{-1} \sum_{k=1}^K k \pi_k + (1 - 2\Lambda) \left(\sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \pi_k + e^{-1} \pi_K \right) \right)$$

Формула для вычисления нижней границы средней задержки вычисляется по формуле:

$$D_L = \frac{\psi_L(\Lambda, K)}{2\Lambda \left(\left(1 - \frac{1}{K}\right)^{K-1} (1 - P_e(n, k, \gamma)) - \Lambda \right)} + 0.5, \quad (9)$$

где

$$\psi_L(\Lambda, K) = \Lambda^2 + \Lambda - (1 - P_e(n, k, \gamma)) \left(2 \sum_{k=1}^K k \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \pi_k + 2 \left(1 - \frac{1}{K}\right)^{K-1} \sum_{k=1}^K k \pi_k + (1 - 2\Lambda) \left(\sum_{k=1}^K \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k-1} \pi_k + \left(1 - \frac{1}{K}\right)^{K-1} \pi_K \right) \right)$$

Скорость схождения верхней и нижней границ для средней задержки от параметра K аналогична, представленной в работе [14].

А рисунке 3 приведены зависимости для средней задержки в системе, полученные следующими способами: имитационное моделирование, расчет верхней границы по формуле (8) и расчет нижней границы по формуле (9). Представленные результаты получены в предположении, что $P_e(n, k, \gamma) = 0.4$.

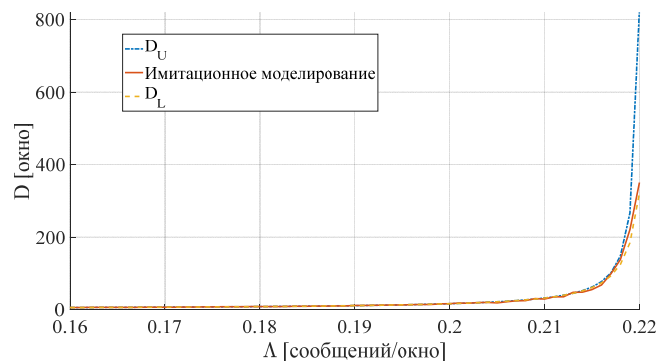


Рис. 3. Зависимость для средней задержки, полученная разными методами при $P_e(n, k, \gamma) = 0.4$

Оценка средней задержки, полученная с помощью имитационного моделирования, при выборе достаточного объема выборки (или времени моделирования) может давать результат с любой требуемой точностью. Однако такой подход является ресурсозатратным, поэтому не подходит в качестве способа, примененного при решении задачи минимизации средней задержки. Верхняя и нижняя границы при подобранном параметре K дают хорошее приближение средней задержки в системе. В дальнейшем при формулировке и решении оптимизационной задачи минимизации средней задержки за счет выбора оптимального значения параметра системы n будет использоваться верхняя граница. Это обусловлено тем, что в случае рассмотрения некоторого ограничения на значение средней задержки можно гарантировать, то, что в рассматриваемой системе её значение не будет выше этой величины.

Далее в работе все результаты будут представлены для параметра оценки $K=100$.

4 Задача минимизации средней задержки

Далее используя верхнюю оценку для средней задержки (см. формулу (8)) сформулируем оптимизационную задачу для минимизации средней задержки в системе по числу отсчетов n .

Предполагается, что изначально заданы: k, ρ, γ , а также подобран параметр оценки K . Средняя задержка, полученная с помощью выражения (9) имеет размерность в окнах. Для формулировки оптимизационной задачи значения средней задержки переводятся в отсчеты путем умножения значения в окнах на число отсчетов в окне:

$$D_U[\text{отсчеты}] = n \left(\frac{\psi_U(\Lambda, K)}{2\Lambda(e^{-1}(1 - P_e(n, k, \gamma)) - \Lambda)} + 0.5 \right),$$

Тогда оптимизационная задача может быть сформулирована следующим образом:

Заданы: k, ρ, γ, K

Минимизировать: $D_U(k, \rho, \gamma, K, n)$ по n

При условиях: $\Lambda = \frac{n\rho}{k}$,

$$P_e(n, k, \gamma) = Q \left(\frac{n \frac{1}{2} \log_2(1 + \gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma + 2}{(\gamma + 1)^2} \log_2 e}} \right),$$

$$n \in (n_{\min}, n_{\max}).$$

Значения $n_{\min}$ и $n_{\max}$ вычисляются для набора k, ρ и γ по методике, описанной в разделе 2.

Решением сформулированной оптимизационной задачи является значение n_0 , которое при заданных k, ρ и γ минимизирует среднюю задержку в системе.

Пример решения данной оптимизационной задачи приведен на рисунке 4 при $k=100, \rho=0.1$ и $\gamma=1$. Средняя задержка на графике представлена в отсчетах. В результате решения сформулированной оптимизационной задачи минимальное значение средней задержки достигается при числе отсчетов $n_0=236$.

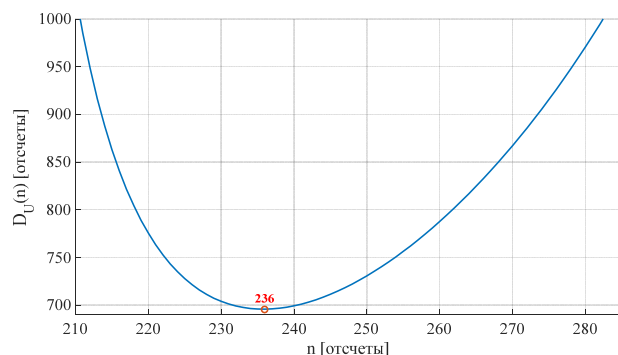


Рис. 4. Решение оптимизационной задачи при $k=100, \rho=0.1$ и $\gamma=1$

5 Взаимосвязь средней задержки и E_b/N_0

Далее рассмотрим взаимосвязь между средней задержкой и затратами энергии на бит E_b/N_0 .

Взаимосвязь между отношением сигнал/шум γ и энергией на бит E_b/N_0 для системы с повторными передачами можно записать в следующем виде [11]:

$$\gamma = \frac{2k \frac{E_b}{N_0}}{Sn}, \quad (10)$$

где S – среднее число передач сообщения. Из работы [11] следует, что данную величину можно вычислить как:

$$S = \frac{1 - \pi_0}{\Lambda}. \quad (11)$$

Как следует из формулы (11) для расчета S необходимо вычислить распределение стационарных вероятностей марковской цепи. В свою очередь для построения матрицы переходных вероятностей этой цепи необходимо вычислить вероятность ошибки в канале $P_e(n, k, \gamma)$, вызванной наличием АБГШ в канале. А для ее вычисления нужно знать значение γ , которое не получить без расчета S .

Для решения возникшей проблемы предлагается подход, который можно описать следующим алгоритмом:

Шаг 1. Задается отношение сигнал/шум γ .

Шаг 2. Определяется область стабильной работы системы для получения значений $n_{\min}$ и $n_{\max}$.

Шаг 3. В пределах области стабильности решается оптимизационная задача для поиска n_0 , которое минимизирует среднюю задержку. В процессе решения оптимизационной задачи для всех $n \in (n_{\min}, n_{\max})$ в том числе и n_0 вычисляется стационарное распределение марковской цепи. В таком случае для марковской цепи, соответствующей значению n_0 имеется набор стационарных вероятностей.

Шаг 4. Используя этот набор стационарных вероятностей для марковской цепи при значении n_0 , вычисляем среднее число передач сообщения по формуле (11).

Шаг 5. Рассчитываем значение энергии на бит E_b/N_0 с учетом результатов решения оптимизационной задачи и формулы (10) как:

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{n_0 S \gamma}{2k}. \quad (12)$$

Используя предложенный алгоритм можно получить зависимость между E_b/N_0 и D_U для системы случайного доступа с потенциально неограниченным числом абонентских устройств. Такую систему можно охарактеризовать как передачу от многих источников к одному получателю.

Далее рассмотрим систему с одним источником и одним получателем, что бы провести их сравнительный анализ и рассмотреть влияние случайного доступа на характеристики системы.

6 Система с одним источником и одним получателем

Рассмотрим подход для получения взаимосвязи между средней задержкой и затратами энергии на бит для системы с одним источником и одним получателем. В такой системе абонент всегда передает с вероятностью равной единице. Так как коллизий в такой системе нет, то вероятность успешной передачи зависит только от вероятности ошибки, возникающей из-за присутствия в канале АБГШ.

Для начала покажем, как для такой системы вычислить значение средней задержки. Система допущений в этом случае аналогична допущениям для системы со случайным доступом, за исключением допущения 4 и 10, так как в системе с 1 абонентом их можно опустить.

С точки зрения расчета средней задержки такую систему можно рассмотреть, как систему массового обслуживания с Пуассоновским входным потоком с параметром Λ и с временем обслуживания, распределенным по геометрическому закону с параметром $1 - P_e(n, k, \gamma)$. Средняя задержка для такой системы вычисляется на основе формулы Поллачека-Хинчина для системы M|G|1 [15]. Тогда с учетом того, что время обслуживания распределено по геометрическому закону и процесс передачи может происходить только в начале окна, то средняя задержка в окнах вычисляется по следующей формуле:

$$\bar{D} = \frac{2 - \Lambda}{2((1 - P_e(n, k, \gamma)) - \Lambda)} + 0.5.$$

С учетом системы допущений и формулы (1) данное выражение можно записать как:

$$\bar{D}(n, k, \rho, \gamma) = \frac{2 - \frac{n\rho}{k}}{2\left((1 - P_e(n, k, \gamma)) - \frac{n\rho}{k}\right)} + 0.5.$$

Данная формула дает значение средней задержки в окнах. Для получения средней задержки в отсчетах необходимо умножить ее на n :

$$\bar{D}(n, k, \rho, \gamma)[\text{отсчеты}] = n \left(\frac{2 - \frac{n\rho}{k}}{2\left((1 - P_e(n, k, \gamma)) - \frac{n\rho}{k}\right)} + 0.5 \right).$$

Для решения оптимизационной задачи, аналогично подходу для системы с множеством источников и одним получателем, необходимо определить область стабильной работы системы.

Вероятность успеха или критическая интенсивность входного потока для рассматриваемой системы определяется следующим выражением:

$$\Lambda_{кр} = \text{Pr} \{ \text{успешное декодирование} \} = 1 - P_e(n, k, \gamma).$$

Входная интенсивность определяется аналогично предыдущей системе по формуле (6).

Система работает стабильно, когда $\Lambda < \Lambda_{кр}$ то есть выполняется неравенство:

$$\frac{n\rho}{k} < 1 - P_e(n, k, \gamma).$$

Если построить графики этих функций от n , то мы получим две точки пересечения, между которыми система работает стабильно (аналогично системе с множеством источников и одним получателем). Как и раньше назовем их n_{min} и n_{max} , а решение задачи минимизации задержки будем рассматривать для $n \in (n_{min}, n_{max})$.

На рисунке 5 представлено графическое определение области стабильности для системы с одним источником и

одним получателем при $k=100$, $\gamma=1$ и $\rho=0.1$. Из рисунка видно, что для заданного набора параметров указанное ранее неравенство выполняется на отрезке от 171 отсчета до 999 отсчетов. То есть $n_{min}=171$ и $n_{max}=999$, а система стабильна для всех $n \in (171, 999)$. Уменьшение значения ρ увеличивает диапазон, в котором система работает стабильно.

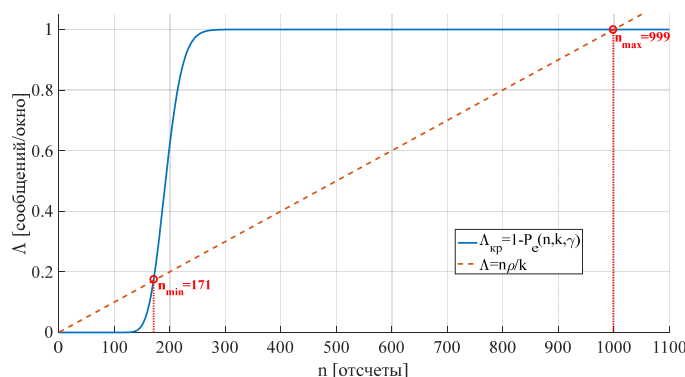


Рис. 5. Определение области стабильности для системы с одним источником и одним получателем при $k=100$, $\gamma=1$ и $\rho=0.1$

Как и для предыдущей системы, предполагается, что существует такое значение числа отсчетов n_0 , при котором средняя задержка в системе минимальна.

Сформулируем оптимизационную задачу для данной системы:

Заданы: k, ρ, γ

Минимизировать: $\bar{D}(k, \rho, \gamma, n)$ по n

При условиях: $\Lambda = \frac{n\rho}{k}$,

$$P_e(n, k, \gamma) = Q \left(\frac{n \frac{1}{2} \log_2(1 + \gamma) + \frac{1}{2} \log_2 n - k}{\sqrt{n \frac{\gamma}{2} \frac{\gamma + 2}{(\gamma + 1)^2} \log_2 e}} \right),$$

$$n \in (n_{min}, n_{max}).$$

На рисунке 6 представлен пример решения оптимизационной задачи для $k=100$, $\rho=0.1$ и $\gamma=1$. Средняя задержка на графике представлена в отсчетах. В результате решения сформулированной оптимизационной задачи минимальное значение средней задержки достигается при числе отсчетов $n_0=231$.

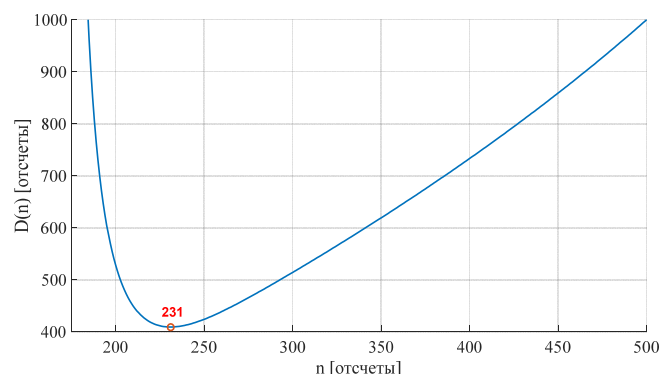


Рис. 6. Решение оптимизационной задачи для системы с одним источником и одним получателем при $k=100$, $\rho=0.1$ и $\gamma=1$

Для получения значений энергии на бит E_b/N_0 будет использоваться методика, описанная в разделе 5. Для этого нужно вычислить среднее число передач сообщения S до успешной отправки.

Покажем, как можно вычислить среднее число передач для системы с одним источником и одним получателем. Число передач, которое понадобится абоненту, чтобы передать сообщение распределена по геометрическому закону с параметром $1 - P_e(n, k, \gamma)$. Следовательно, среднее число передач вычисляется по следующей формуле:

$$S = \frac{1}{1 - P_e(n, k, \gamma)}.$$

Таким образом, мы получили все необходимые величины для сравнения системы с одним источником и одним получателем и системы, рассматриваемой в работе, с множеством источников и одним получателем.

8 Сравнение систем

На рисунке 7 представлена зависимость средней задержки от значения отношения сигнал/шум γ , полученная при решении оптимизационной задачи для обеих систем. Результаты представлены для $k=100$ и $\rho=0.1$. Из графиков видно, что с увеличением значения отношения сигнал/шум средняя задержка в системе уменьшается для обеих систем. Система с множеством источников требует больших значений отношения сигнал/шум для обеспечения эквивалентного значения средней задержки. С увеличением отношения сигнал/шум разница в средней задержке систем уменьшается.

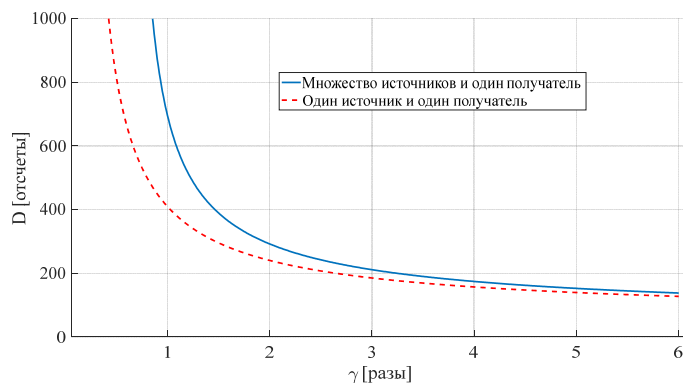


Рис. 7. Зависимость средней задержки от γ при $k=100$ и $\rho=0.1$

На рисунке 8 приведена зависимость значения n_0 от значения отношения сигнал/шум γ для обеих систем. Результаты представлены для $k=100$ и $\rho=0.1$. Значения числа отсчетов, обеспечивающие минимум средней задержки для обеих систем, имеют близкие значения. Для системы с одним источником и одним получателем оптимальное значение числа отсчетов меньше, чем для системы с множеством источников. Наибольшая разница в числе отсчетов при малых значениях отношения сигнал/шум и составляет порядка 4 отсчетов. С ростом отношения сигнал/шум эта разница уменьшается и составляет один отсчет.

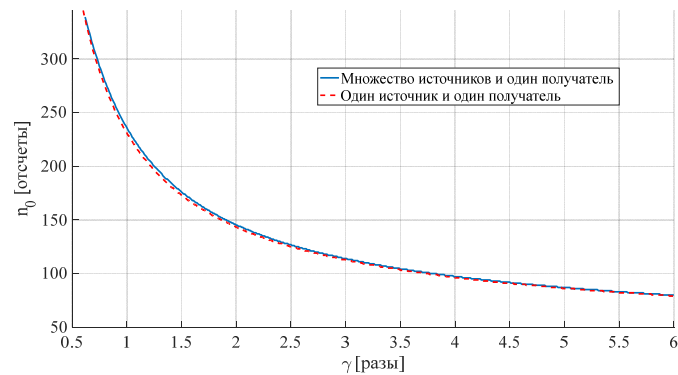


Рис. 8. Зависимость n_0 от γ при $k=100$ и $\rho=0.1$

Далее рассмотрим взаимосвязь между значением отношения сигнал/шум γ и энергии на бит E_b/N_0 для обеих систем при $k=100$ и $\rho=0.1$. Данная зависимость приведена на рисунке 9.

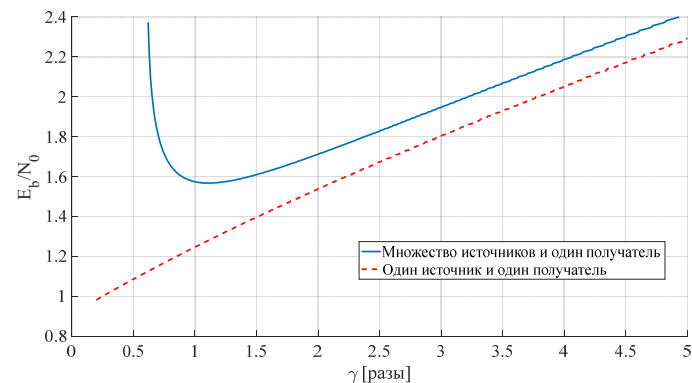


Рис. 9. Зависимость E_b/N_0 от γ для двух систем при минимизации средней задержки ($k=100$ и $\rho=0.1$)

Как видно из рисунка 9 для системы с одним источником и одним получателем затраты энергии на бит оказываются ниже, чем для системы со случайным множественным доступом. При этом зависимость является монотонно возрастающей функцией, что обусловлено отсутствием коллизий в системе. Для системы со случайным доступом (множество источников и один получатель) с ростом значения отношения сигнал/шум сначала убывает, а затем начинает возрастать. То есть имеется точка минимума по значению энергии на бит E_b/N_0 .

Поясним такое поведение на качественном уровне. При малых отношениях сигнал/шум для успешной передачи сообщения даже в отсутствии коллизий требуется большое число отсчетов. Чем больше отсчетов в одном окне передачи, тем выше входная интенсивность сообщений на окно при фиксированном значении спектральной эффективности. Вследствие чего в системе высокая вероятность коллизии и соответственно большее значение среднего числа передач. Все это в совокупности дает высокое значение затрат энергии на бит для успешной передачи сообщения. С ростом отношения сигнал/шум уменьшается, как длина окна в отсчетах, так и вероятность коллизии со средним числом передач. Однако после некоторого момента уменьшение числа отсчетов начинает давать незначительное снижение среднего числа передач, так как вероятность коллизии практически не уменьшается.

При этом затраты энергии на бит продолжают возрастать вследствие повышения мощности сигнала. Все это в совокупности приводит к тому, что зависимость энергозатрат от мощности не является монотонно возрастающей.

На рисунке 10 приведена взаимосвязь между энергией на бит и средней задержкой в системе. Для системы с одним источником и одним получателем с увеличением средней задержки уменьшается и затраты энергии на бит. Для системы с множественным доступом с увеличением задержки энергия на бит сначала уменьшается, а потом снова начинает возрастать, то есть эта зависимость имеет точку минимума по энергии на бит. Этот эффект обусловлен поведением зависимостей представленных на рисунке 9.

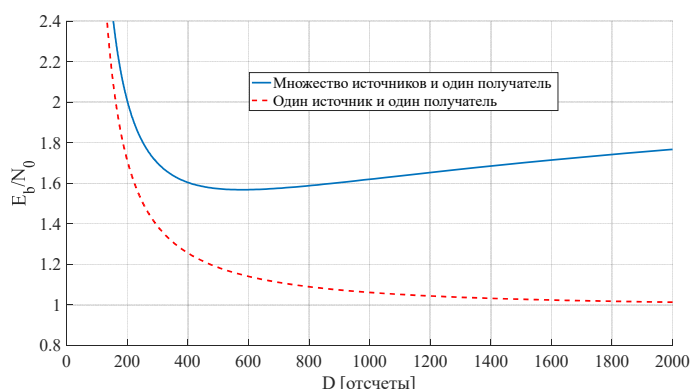


Рис. 10. Взаимосвязь между E_b/N_0 и D для двух систем при минимизации D ($k=100$ и $\rho=0.1$)

Таким образом возник нетривиальный эффект для системы с множеством источников и одним получателем: при определенных условиях рост отношения сигнал/шум сопровождается снижением затрат энергии на бит, которое затем сменяется их увеличением. Аналогичный эффект возникает и при увеличении значений средней задержки. Таким образом существует минимальное значение энергии на бит при котором имеется некоторое значение средней задержки. При необходимости уменьшения средней задержки необходимо увеличивать затраты энергии на бит. При этом ослабление требований по средней задержке (возможность ее увеличения) после точки минимума не позволяет уменьшить затраты энергии на бит.

7

8 Заключение

В работе рассмотрена модель системы случайного множественного доступа на основе алгоритма АЛОХА с гауссовским каналом множественного доступа. В которой все абоненты передают сообщения, содержащие k бит, с помощью сигналов одинаковой длительности, содержащих n отсчетов. Отношение сигнал/шум для всех абонентов одинаковое и равно некоторому значению γ . Эта модель отражает основные особенности современных беспроводных систем, в которых большое число абонентских устройств передают данные на базовую станцию в режиме случайного доступа и используют одну и ту же кодово-модуляционную схему. Основной особенностью модели является наличие потенциально неограниченного числа абонентских устройств, что может приводить к нестабильной работе системы.

Был описан метод определения области стабильной работы системы. Сформулирована и решена оптимизационная задача по минимизации средней задержки по числу отсчетов n в рамках области стабильной работы системы. Было показано, что при фиксированных отношении сигнал/шум γ , числе информационных бит k и спектральной эффективности ρ существует единственное значение числа отсчетов n_0 , при котором средняя задержка минимальна.

Описана проблема для получения зависимости между затратами энергии на бит и средней задержкой. Для её решения предложен алгоритм, позволяющий определить взаимосвязь между этими характеристиками. В рамках данного алгоритма также можно получить взаимосвязь между мощностью и затратами энергии.

При исследовании взаимосвязи между мощностью и затратами энергии был получен нетривиальный эффект: при определенных условиях рост отношения сигнал/шум сопровождается снижением затрат энергии на бит, которое затем сменяется увеличением.

При исследовании взаимосвязи между энергией на бит и средней задержкой в системе было отмечено, что существует такое значение средней задержки, при котором затраты энергии на передачу минимальны. Если в системе требуется уменьшить значение средней задержки, то в таком случае необходимо увеличить энергозатраты.

Для сравнения была исследована система с одним источником и одним получателем, и было показано, что в такой системе отсутствуют особенности, выявленные для системы с множеством источников и одним получателем. При этом затраты энергии и средняя задержка в такой системе всегда ниже, чем для системы со случайным доступом к каналу.

Полученные в работе результаты позволяют выработать рекомендации по выбору режимов работы абонентских устройств систем Интернета Вещей, в которых имеется ограничения на среднее время доставки сообщения от абонента до базовой станции, а сами устройства имеют автономные источники питания, что делает актуальной задачу уменьшения затрат энергии на передачу.

Финансовая поддержка

Статья подготовлена при финансовой поддержке Российского научного фонда, проект № 22-19-00305-П <https://rscf.ru/project/22-19-00305/> "Пространственно-временные стохастические модели беспроводных сетей с большим числом пользователей".

Литература

1. Mathys P. A class of codes for a t active users out of n multiple-access communication system // IEEE Transactions on Information Theory, 1990, vol. 36, no. 6, pp. 1206–1219.
2. Gallager R. G. A perspective on multiaccess channels // IEEE Transactions on Communications, 1985 vol. 31, pp. 124 – 142.
3. El Gamal A., Kim Y. H. Network information theory // Cambridge, UK: Cambridge university press, 2011, pp. 509–611.
4. Tsibakov B. Survey of USSR contributions to random multiple-access communications // IEEE transactions on information theory, 1985, T. 31, № 2, pp. 143–165.
5. Y. Polyanskiy A perspective on massive random-access // 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). IEEE, 2017, pp. 2523–2527.

6. Ordentlich O., Polyanskiy Y. Low complexity schemes for the random access gaussian channel // in 2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT). IEEE, 2017, pp. 2528-2532.
7. Kim Y. Minimizing age of information in slotted ALOHA with short-packet communications // IEEE Access, 2024, T. 12. C. 186779-186793.
8. Рачугин Р. О. Анализ вариантов возврата от 2-шаговой к 4-шаговой процедуре случайного доступа // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт, 2025, №11. С. 33-40.
9. Burkov A. et al. Achievability Bounds for Massive Random Access in the Gaussian MAC with Delay Constraints // 2019 XVI International Symposium "Problems of Redundancy in Information and Control Systems" (REDUNDANCY), IEEE, 2019, pp. 224-227.
10. Burkov A. A. Signal power and energy-per-bit optimization problems in mMTC systems // Информационно-управляющие системы, 2021, Т. 5, pp. 51-58.
11. Burkov A., Shneer S., Turlikov A. An achievability bound of energy per bit for stabilized massive random access Gaussian channel // IEEE Communications Letters, 2020, T. 25, №. 1, pp. 299-302.
12. Polyanskiy Y., H. V. Poor S. Verd'u. Channel coding rate in the finite blocklength regime // IEEE Transactions on Information Theory, 2010, T. 56, № 5, pp. 2307-2359.
13. Br'emaud P. Probability theory and stochastic processes // Springer, 2020.
14. Burkov A. A., Shneer S., Turlikov A. M. Arbitrarily Accurate Approximation of Numerical Characteristics of Stationary ALOHA Channels // 2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF), IEEE, 2021, pp. 1-8.
15. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями: Пер. с англ. М.: Мир, 1979.

RELATIONSHIP BETWEEN POWER AND ENERGY IN RANDOM MULTIPLE ACCESS TRANSMISSION WITH MINIMUM AVERAGE DELAY

Artem A. Burkov, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, Russia, a.burkov@guap.ru
Andrey M. Turlikov, Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, Russia, turlikov@guap.ru

Abstract

For a long time, research into random multiple access proceeded along two independent lines: multiple access information theory and random multiple access theory. In recent years, studies combining these two approaches have begun to appear. However, existing literature typically fails to jointly address the relationship between power and energy expenditure (accounting for retransmissions) and the minimization of average delay in system. This paper investigates that relationship. The study examines a random multiple access system based on the ALOHA algorithm utilizing a Gaussian multiple-access channel. The system is assumed to have a potentially unlimited number of user devices. An approach is described for determining the stable operating region where the average delay remains finite. A method is proposed for calculating upper and lower bounds on the average delay with any desired degree of accuracy. An optimization problem is formulated and numerically solved to minimize average system delay by selecting the user message duration, given a fixed number of bits per message and a specified transmission power. Based on the solution to this optimization problem, an approach is proposed to establish the relationship between power and energy expenditure for random multiple access transmission with minimal average delay. It is shown that the dependence of energy expenditure on power is not a monotonically increasing function and there exists a specific power level that minimizes energy expenditure. A comparison is made with a system comprising a single source with an infinite message queue and a single receiver – a setup where collisions do not occur. Consequently, in that system, energy expenditure is a monotonically increasing function of power. Furthermore, energy expenditure in the random access system is higher than in the single source system at any power level.

Keywords: Random multiple access, ALOHA, signal-to-noise ratio, energy per bit, average delay, stability, Markov chain, minimization problem

References

- [1] P. Mathys, "A class of codes for a t active users out of n multiple-access communication system," *IEEE Transactions on Information Theory*, 1990, vol. 36, no. 6, pp. 1206-1219.
- [2] R. G. Gallager, "A perspective on multiaccess channels," *IEEE Transactions on Communications*, 1985 vol. 31, pp. 124-142.
- [3] A. El Gamal, Y. H. Kim, "Network information theory," Cambridge, UK: Cambridge university press, 2011, pp. 509-611.

- [4] B. Tsybakov, "Survey of USSR contributions to random multiple-access communications," *IEEE transactions on information theory*, 1985, Vol. 31, no. 2, pp. 143-165.
- [5] Y. Polyanskiy, "A perspective on massive random-access," *2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*. IEEE, 2017, pp. 2523-2527.
- [6] O. Ordentlich, Y. Polyanskiy, "Low complexity schemes for the random access gaussian channel," in *2017 IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT)*. IEEE, 2017, pp. 2528-2532.
- [7] Y. Kim, "Minimizing age of information in slotted ALOHA with short-packet communications," *IEEE Access*, 2024. Vol. 12, pp. 186779-186793.
- [8] R.O. Rachugin, "Analysis types of backoff from 2-step to 4-step random access procedure," *T-Comm*, 2025, vol. 19, no. 11, pp. 33-40. (in Russian)
- [9] Burkov A. et al., "Achievability Bounds for Massive Random Access in the Gaussian MAC with Delay Constraints," *2019 XVI International Symposium "Problems of Redundancy in Information and Control Systems" (REDUNDANCY)*, IEEE, 2019, pp. 224-227.
- [10] A. A. Burkov, "Signal power and energy-per-bit optimization problems in mMTC systems," *Information and Control Systems*, 2021, no. 5, pp. 51-58.
- [11] A. Burkov, S. Shneer, A. Turlikov, "An achievability bound of energy per bit for stabilized massive random access Gaussian channel," *IEEE Communications Letters*, 2020. Vol. 25, no. 1, pp. 299-302.
- [12] Y. Polyanskiy, H. V. Poor, S. Verd'u, "Channel coding rate in the finite blocklength regime," *IEEE Transactions on Information Theory*, 2010. Vol. 56, no. 5, pp. 2307-2359.
- [13] P. Br'emaud, "Probability theory and stochastic processes," Springer, 2020.
- [14] A. A. Burkov, S. Shneer, A. M. Turlikov, "Arbitrarily Accurate Approximation of Numerical Characteristics of Stationary ALOHA Channels," *2021 Wave Electronics and its Application in Information and Telecommunication Systems (WECONF)*, IEEE, 2021, pp. 1-8.
- [15] L. Kleinrock, "Computer applications," *Queueing systems*, 1976, no. 3.

Information about authors:

Artem A. Burkov, PhD, associate professor of Department of Infocommunication Technologies and Communication Systems in Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, Russia. ORCID 0000-0002-0920-585X

Andrey M. Turlikov, professor, Doctor of Technical Sciences, head of the Department of Infocommunication Technologies and Communication Systems in Saint Petersburg State University of Aerospace Instrumentation, Saint Petersburg, Russia. ORCID 0000-0001-7132-094X