АНАЛИЗ ОЧЕРЕДИ В СИСТЕМЕ G/G/1 НА ОСНОВЕ ГИПЕРЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

DOI: 10.36724/2072-8735-2021-15-8-36-43

Manuscript received 30 March 2021;
Accepted 27 April 2021

Буранова Марина Анатольевна,
Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия, ***buranova-ma@psuti.ru***

Ключевые слова: *джиттер, системы массового обслуживания, гиперэкспоненциальное распределение, EM-алгоритм, метод моментов*

Для приложений реального времени изменение задержки пакетов, которое обычно называется джиттер задержки, является одним из наиболее важных параметром качества обслуживания в современных инфокоммуникационных сетях при обработке мультимедийных потоков наряду с задержкой и вероятностью потери пакетов. Рассмотрены подходы по оценке джиттера в современных инфокоммуникационных сетях при обработке непуассоновского трафика в системе G/G/1. Для аппроксимации системы произвольной очереди G/G/1 использована модель, основанная на гиперэкспоненциальных распределениях, типа H2/H2/1. В качестве обрабатываемого потока использована реализация трафика IP сети с отсутствием взаимных корреляций между интервалами времени между пакетами и временами обработки пакетов. Важной задачей при этом является определение параметров гиперэкспоненциальных распределений для интервалов времени между пакетами и времен обработки пакетов. Приведено два метода определения параметров гиперэкспоненциальных распределений: с использованием метода моментов и с использованием EM-алгоритма. В работе приведен анализ влияние коэффициента загрузки сети на значение джиттера при использовании двух моделей определения параметров гиперэкспоненциальных распределений. Данный анализ показал незначительное увеличение джиттера при увеличении нагрузки сети и в случае использования метода моментов, и в случае EM-алгоритма. Определено, что оценки значений джиттера в случае применения метода моментов и алгоритма EM, достаточно близки по своему значению. Основной результат работы заключается в получении простых расчетных формул для анализа джиттера в системе G/G/1 при использовании гиперэкспоненциальных распределений.

Информация об авторе:

Буранова Марина Анатольевна, *доцент кафедры информационной безопасности, к.т.н., доцент, Поволжский государственный университет телекоммуникаций и информатики, Самара, Россия*

Для цитирования:
Буранова М.А. Анализ очереди в системе G/G/1 на основе гиперэкспоненциальных распределений // T-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2021. Том 15. №8. С. 36-43.

For citation:
Buranova M.A. (2021) Queue analysis in the G/G/1 system based on hyperexponential distributions. *T-Comm*, vol. 15, no. 8, pp. 36-43. (*in Russian*)

Введение

Одной из важнейших задач при проектировании современных инфокоммуникационных сетей является разработка моделей, которые позволят учитывать влияние структуры и характера трафика на производительность сетей. Трудность решения данной задачи связана с необходимостью учета сложной статистической структуры трафика, которая определяется наличием корреляций, самоподобия и долговременной зависимости в трафике, которая появляется при передаче потоков с «тяжелыми хвостами» [1, 2]. Подобные особенности структуры трафика делают достаточно затруднительным использование классических моделей систем обработки, построенных на предположении об обработке простого пуассоновского потока. Показано [1], что такие упрощения могут привести к недостаточной точности расчетов. Существуют и более мощные модели трафика, например, марковский входной поток (MAP – Markovian Arrival Process) или его обобщение, групповой марковский входной поток (BMAP – Batch Markovian Arrival Process) [3-7]. При этом использование моделей MAP и BMAP, предназначенных для анализа поведения непуассоновского трафика, приводит к высокой сложности вычислений. В [3] показан подход, основанный на аппроксимации системы очередей суммой экспоненциальных распределений, состоящей из экспоненциального распределения и распределения, учитывающего «тяжелый хвост». Существуют и другие модели, позволяющие прогнозировать функционирование сетей в условиях обработки непуассоновских потоков. Как правило, использование этих подходов связано с высокой вычислительной сложностью и ограничениями на условия их применения [1].

С точки зрения применения систем массового обслуживания (СМО), системы обработки современного трафика, обладающего «сложной» структурой, наиболее точно описываются математической моделью G/G/1 (G/G/n). Следует отметить, что входящий поток, обрабатываемый в СМО описывается двумя статистическими характеристиками: распределением вероятностей промежутков времени между поступлением пакетов и распределением вероятностей времени обслуживания пакетов. Основными параметрами, характеризующими качество обслуживания (*QoS* – Quality of Service) трафика в сети, является средняя задержка пакетов в сети, джиттер задержки при передаче пакетов и вероятность потери пакетов. Большинство работ по анализу моделей современного трафика и систем обработки трафика современных приложений в первую очередь направленны на решение задачи по оценке задержки пакетов в сети. Это особенно важно для приложений реального времени. При этом не для всех потоков данный параметр является приоритетным. Для мультимедийных потоков часто более важным является определение джиттера. В работах [8, 9] показаны методики по оценке джиттера, при условии обработки трафика в системе G/M/1, то есть при экспоненциальном распределении вероятностей времени обслуживания пакетов. В этих работах также приведены результаты по оценке джиттера для некоторых частных случаев распределений промежутков времени между поступлением пакетов. В [10] получены более общие результаты для системы G/M/1.

Известно [3, 9, 11], что математический аппарат теории массового обслуживания при анализе систем G/G/1 трудно применим. При этом показано [12], что для анализа систем G/G/l весьма эффективно использовать аппроксимацию системой $H_l/H_k/1$, которая использует гиперэкспоненциально распределенное время промежутков между поступлением пакетов и гиперэкспоненциально распределенное временя обслуживания порядка l и k соответственно.

В данной работе представлен подход по оценке джиттера в системе G/G/l, основанный на использовании аппроксимации системой $H_2/H_2/1$. При этом рассматривается определение параметров гиперэкспоненциальных распределений, полученное методом моментов и на основе EM-алгоритма.

Аналитическая модель оценки джиттера

Под джиттером согласно [13] понимают среднюю абсолютную вариацию задержки, изменение задержки в потоке от некоторого минимального значения. В соответствии с рекомендацией IETF (Internet Engineering Task Force – Специальная комиссия интернет-разработок) [14] под джиттером понимается случайная переменная J_i, определяемая как

$$J_{i+1} = \left|T_{i+1} - T_i\right|,$$

где T_i – время задержки *i*-го пакета в узле сети, которое определяется в виде $T_i = W_i + Q_i$, где W_i – время ожидания *i*-го пакета в очереди и Q_i – время его обслуживания.

В работах [8, 11, 15] показано, что пакет не будет ожидать в очереди в случае, если интервал времени между пакетами больше времени обработки пакета в сети ($V_{i+1} \geq T_i$, где V_{i+1} – интервал времени между приходом $(i+1)$-го и *i*-го пакета). Тогда время ожидания пакета в очереди будет определяться следующим образом

$$W_{i+1} = \begin{cases} 0 & \text{при } V_{i+1} \geq T \\ W_i + Q_i - V_{i+1} & \text{в др. случае} \end{cases}.$$

В этом случае выражение для джиттера будет иметь вид

$$J_{i+1} = \begin{cases} \left|Q_{i+1} - T_i\right| & \text{при } V_{i+1} \geq T \\ \left|Q_{i+1} - V_{i+1}\right| & \text{в др. случае} \end{cases}. \quad (1)$$

Введем следующие характеристики:

$f_V(y)$ – плотность вероятностей для интервалов времени между пакетами;

$f_Q(z)$ – плотность вероятностей для времен обслуживания (длительности пакетов);

$f_T(x)$. – плотность вероятностей для времени обработки пакета в сети.

Для определения плотности вероятностей джиттера J_{i+1}, при условии независимости $V_{i+1}, Q_{i+1}\, u\, T_i$ необходимо учесть все возможные значения переменных $y, z\, u\, x$. Учитывая (1) для переменных $y, z\, u\, x$ можно записать [8-10]:

$$w=\begin{cases}|z-x|, если\ y\geq x\\ |z-y|, если\ y<x\end{cases}. \qquad (2)$$

Тогда в соответствии с (2) получим:

$$f_{J_{i+1}}(w)=\int_0^\infty f_{V_{i+1}}(y)\times$$
$$\times\int_0^\infty f_{Q_{i+1}}(z)\left[f_T(z-w)U(y-x)+f_T(z-y)U(x-y)\right]dzdx, \qquad (3)$$

где $U(x)$:

$$U(x)=\begin{cases}1,\ если\ x\geq 0\\ 0\end{cases}. \qquad (4)$$

Основываясь на (3) и (4) можно определить математическое ожидание для джиттера:

$$E\left[J_{i+1}\right]=\int_0^\infty w f_{J_{i+1}}(w)dw=$$
$$=\int_0^\infty f_{V_{i+1}}(y)\infty\int_0 f_{Q_{i+1}}(z)h(y,z)dzdy, \qquad (5)$$

где

$$h(y,z)=$$
$$=\int\left[wf_{Ti}(z-w)U(y-x)+wf_{Ti}(z-y)U(x-y)\right]dx.$$

Учитывая условие (2), которое заключается в том, что если нет очереди на входе в сетевой узел ($y \geq x$), то $w = |z - x|$, и что $w = |z-y|$, когда очередь есть ($y<x$), можно преобразовать внутренний интеграл по области x в уравнении (5), в итоге получим общую формулу для вычисления джиттера в системе G/G/1 [8]:

$$J=\int_0^\infty f_V(y)\times$$
$$\times\left\{\int_0^\infty f_Q(z)\left[\int_0^y|z-x|f_T(x)dx+|z-y|\int_y^\infty f_T(x)dx\right]dz\right\}dy, \qquad (6)$$

Если предположить, как показано в [8], что все пакеты имеют одинаковые для V, Q, и T распределения то, это позволит опустить индексы.

Решение полученного выражение для джиттера (6) в работах [8, 9] сводится к упрощению тройного интеграла с использованием аппроксимации моделей очередей M/G/1 и G/D/1. Кроме того в качестве примера произвольного распределения (G) применяется такие распределения как Парето, Вейбулла, логнормальное. Такие подходы объясняются тем, что для решения (6) необходимо знание распределения времени задержки в системе, определение которого в аналитическом виде само по себе является нетривиальной задачей для системы G/G/1. Следует обратить внимание, что тройной интеграл в (6) требует сложных и длительных вычислений. В то же время особый интерес представляют результаты для произвольных очередей G/G/1.

Учитывая, что для описания и моделирования трафика IP-сети предпочтительней использование смеси показательных распределений и основываясь на подходе, показанном в [12, 16], будем использовать модель $H_2/H_2/1$. Тогда для уравнения (6) плотности $f_T(x)$, $f_V(y)$ и $f_Q(z)$ можно записать в виде

$$f(x)=p\alpha_1 e^{-\alpha_1 x}+(1-p)\alpha_2 e^{-\alpha_2 x}$$

Для интервалов времени между пакетами трафика с плотностью распределения – $f_V(y)$ с параметром γ гиперэкспоненциальное распределение будет иметь вид

$$a(x)=p\gamma_1 e^{-\gamma_1 x}+(1-p)\gamma_2 e^{-\gamma_2 x}; \qquad (7)$$

для времениобслуживания пакета – $f_Q(z)$ с параметром μ –

$$b(x)=q\mu_1 e^{-\mu_1 x}+(1-q)\mu_2 e^{-\mu_2 x}; \qquad (8)$$

Для времени заджки пакета в системе – $f_T(x)$ с параметром δ –

$$c(x)=n\varphi_1 e^{-\varphi_1 x}+(1-n)\varphi_2 e^{-\varphi_2 x}, \qquad (9)$$

p, q, n – соответствующие веса компонент смесей (7), (8) и (9).

Учитывая, что время задержки пакета в системе T_i определяется суммой случайных независимых величин W и Q, $T_i=W_i+Q_i$, то плотность вероятности $f_T(\cdot)$ определяется сверткой распределений:

$$f_T(y)=\int_0^\infty f_W(u)f_Q(y-u)du. \qquad (10)$$

В [10] показан подход для определения $f_W(\tau)$, где для упрощения исследования в [10] было принято, что $f_W(\cdot)$ – показательное распределение, имеющее вид $f_W(\tau)=\delta e^{-\delta\tau}$, где параметр δ определяется как $\delta=\mu(1-\xi)$ [1], ξ – корень уравнения $\xi=\Lambda_V(\mu-\mu\xi)$, где Λ_V – преобразование Лапласа плотности $f_V(\cdot)$, μ – среднее время обработки пакета в системе G/M/1. Для системы G/G/1 плотность $f_W(\tau)$ аналогично (7), (8) и (9) следует представить в виде:

$$f_W(\tau)=\Delta\delta_1 e^{-\delta_1\tau}+(1-\Delta)\delta_2 e^{-\delta_2\tau} \qquad (11)$$

Учитывая (8) и (11) для выражения (10) можно получить

$$f_T(y)=D\mu_1 e^{-\mu_1 y}+C\mu_2 e^{-\mu_2 y}$$

где

$$C=(1-q)\left(\frac{g\delta_1}{|\delta_1\text{-}\mu_1|}+(1-g)\frac{\delta_2}{|\delta_2\text{-}\mu_2|}\right),$$

$$D=(1-\Delta)\frac{q\delta_2}{|\delta_2\text{-}\mu_2|}+gq\frac{\delta_1}{|\delta_1\text{-}\mu_1|}.$$

Получив все исходные плотности, входящие в (6), можно провести интегрирование при условии, что

$$\int_0^y |z-x| f_T(x)\,dx = \int_0^z (z-x) f_T(x)\,dx + \int_z^y (x-z) f_T(x)\,dx$$

.

В итоге выражение для оценки для оценки джиттера в системе G/G/1 примет вид

$$J = pqL + p(1-q)M + (1-p)qK + (1-p)(1-q)F \quad (12)$$

где

$$L = \frac{C}{\mu_1} + \frac{(2C)\gamma_1}{\mu_1(\mu_2+\gamma_1)} + \frac{D}{\mu_1} + \frac{2C}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)} - \frac{2D\gamma_1}{(\mu_1+\gamma_1)^2} - \frac{2C\gamma_1}{(\mu_2+\gamma_1)^2} - ;$$
$$- \frac{C\gamma_1}{\mu_2(\mu_2+\gamma_1)} + \frac{D\gamma_1}{\mu_1(\mu_1+\gamma_1)} - \frac{2D\gamma_1}{\mu_1(2\mu_1+\gamma_1)} - \frac{2C\gamma_1}{\mu_1(\mu_1+\mu_2+\gamma_1)} - \frac{C}{\mu_2}$$

$$M = \frac{D}{\mu_2} + \frac{2D\gamma_1}{\mu_2(\mu_1+\gamma_1)} - \frac{D}{\mu_1} - \frac{2D\gamma_1}{(\mu_1+\gamma_1)^2} - \frac{D\gamma_1}{\mu_1(\mu_1+\gamma_1)} - \frac{2C\gamma_1}{(\mu_2+\gamma_1)^2} + ;$$
$$+ \frac{2D}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)} - \frac{C}{\mu_2} + \frac{2D\gamma_1}{\mu_2(\mu_1+\mu_2+\gamma_1)} + \frac{2C\gamma_1}{\mu_2(\mu_2+\gamma_1)} - \frac{2C\gamma_1}{\mu_2(2\mu_2+\gamma_1)})$$

$$K = \frac{C}{\mu_1} + \frac{C\gamma_2}{\mu_1(\mu_2+\gamma_2)} + \frac{D}{\mu_1} + \frac{2C}{\mu_2(\mu_1+\mu_2)} - \frac{C}{\mu_2} - \frac{2D\gamma_2}{(\mu_1+\gamma_2)^2} - \frac{2C\gamma_2}{(\mu_2+\gamma_2)^2} - ;$$
$$- \frac{C\gamma_2}{\mu_2(\mu_2+\gamma_2)} + \frac{D\gamma_2}{\mu_1(\mu_1+\gamma_2)} - \frac{2D\gamma_2}{\mu_1(2\mu_1+\gamma_2)} - + \frac{2C\gamma_2}{\mu_1(\mu_1+\mu_2+\gamma_2)}$$

$$F = \frac{D}{\mu_2} + \frac{2D\gamma_2}{\mu_2(\mu_1+\gamma_2)} - \frac{D}{\mu_1} - \frac{2D\gamma_2}{(\mu_1+\gamma_2)^2} - \frac{D\gamma_2}{\mu_1(\mu_1+\gamma_2)} - \frac{2C\gamma_2}{(\mu_2+\gamma_2)^2} + .$$
$$+ \frac{2D}{\mu_1(\mu_1+\mu_2)} + \frac{C}{\mu_2} - \frac{2D\gamma_2}{\mu_2(\mu_1+\mu_2+\gamma_2)} + \frac{C\gamma_2}{\mu_2(\mu_2+\gamma_2)} - \frac{2C\gamma_2}{\mu_2(2\mu_2+\gamma_2)}$$

Использование гиперэкспоненциального распределения в качестве примера произвольного распределения *G* позволяет получить достаточно точные результаты при незначительных вычислительных затратах. При этом необходимо определить параметры каждой экспоненциальной составляющей распределения и решение задачи оценки джиттера по формуле (12) сводится к определению параметров распределений (3), (4) и (5) ($q, p, \Delta, \ \mu_1, \mu_2, \ \gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2$).

Для определения параметров гиперэкспоненциальных распределений (p, γ_1, γ_2) и (q, μ_1, μ_2) можно воспользоваться двумя известными подходами:

1) по первым моментам (среднее, дисперсия) исходного распределения [17, 18],

2) с использованием ЕМ-алгоритма.

При использовании метода моментов возможно получение аналитических выражений начальных моментов гиперэкспоненциальных распределений до второго порядка. Метод основан на использовании свойства преобразования Лапласа.

Определение параметров гиперэкспоненциальных распределений методом моментов

Оценку параметров гипреэкспоненциальных распределений можно определить на основе метода моментов с использованием подхода, показанного в работах [17, 18], где для получения аналитических выражений начальных моментов гиперэкспоненциальных распределений до второго порядка использовано свойство преобразования Лапласа и для (7) получено:

$$\overline{\tau_\gamma} = \frac{p}{\gamma_1} + \frac{(1-p)}{\gamma_2},$$

$$\overline{\tau_\gamma^2} = \frac{2p}{\gamma_1^2} + \frac{2(1-p)}{\gamma_1^2},$$

где $\overline{\tau_\gamma}$ и $\overline{\tau_\mu}$ – средние значения интервалов между поступлениями пакетов и времени обслуживания.

Учитывая, что для квадрата коэффициента вариации

$$\overline{c^2} = \frac{\overline{\tau_\gamma^2} - \left(\overline{\tau_\gamma}\right)^2}{\left(\overline{\tau_\gamma}\right)^2},$$

параметры распределений определяются как

$$\gamma_1 = 2p / \overline{\tau_\gamma}, \quad \gamma_2 = 2(1-p) / \overline{\tau_\gamma}, \qquad (13)$$

С учетом выражений (7), (8) в (13) получено для параметра p:

$$p_{1,2} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{c_\gamma^2 - 1}{c_\gamma^2 + 1}}\right). \qquad (14)$$

Аналогично можно получить значения параметров для выражения (8) – μ_1, μ_2 и $q_{1,2}$.

Определение параметров гиперэкспоненциальных распределений с использованием ЕМ-алгоритма

На практике возникают моменты, когда имеется реализация трафика, полученная в результате эксперимента. В таком случае для определения параметров гиперэкспоненциальных распределений можно воспользоваться подходом, основанным на использовании ЕМ-алгоритма (expectation-maximization) [16, 19-22]. Этот метод хорошо зарекомендовали себя и успешно обеспечивает достоверные оценки максимального правдоподобия для многих приложений, включая оценку плотности смеси.

Алгоритм состоит из двух шагов: Е-шаг (expectation) и М-шаг (maximization). Исходными данными является наблюдаемая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_N$ с одномерной плотностью вероятностей $f(x, \theta_1, \ldots \theta_m)$, имеющей *m* параметров. В этом случае реализация ЕМ-алгоритма будет связана с оценкой параметров $\theta_1, \ldots \theta_m$.

Если каждый элемент выборки $x_1, x_2, \ldots, x_N$ может принадлежать распределению смеси из *K* случайных величин с плотностями вероятностей

$$f^1\left(x, \theta_1^1, \ldots \theta_m^1\right), \ \ldots \ f^j\left(x, \theta_1^j, \ldots \theta_m^j\right), \ \ldots \ f^k\left(x, \theta_1^k, \ldots \theta_m^k\right),$$

процесс будет связан с оценкой основных параметров распределения каждой из указанных плотностей вероятностей ($\theta_1^1,\ldots\theta_m^1,\theta_1^j,\ldots\theta_m^j,\theta_1^k,\ldots\theta_m^k$), а также относительных долей наблюдений каждой случайной величины – ($\pi^1,\ldots\pi^k$).

Если рассматриваемая последовательность $x_1,x_2,\ldots,x_N$ есть реализация случайной величины с плотностью вероятностей распределения $f\left(x,\theta_1,\ldots\theta_m\right)$, имеющей m параметров, то функция правдоподобия выборки будет иметь вид

$$\mathcal{L}\left(\theta_1,\ldots\theta_m\right)=\prod_{i=1}^{N}f\left(x,\theta_1,\ldots\theta_m\right)$$

Функция правдоподобия $\mathcal{L}$ представляет общую плотность отдельных наблюдений для любого заданного набора параметров распределения. Оценка максимального правдоподобия – это значения параметров распределения, которые максимизируют $\mathcal{L}$

$$\left(\hat{\theta}_1,\ldots\hat{\theta}_m\right)=\arg max\left(\mathcal{L}\right)$$

Для гауссовских распределений этот подход дает точные результаты при невысокой вычислительной сложности. Использование в данном случае смеси экспоненциальных распределений ($f^j\left(x_i,\theta_1^j,\ldots\theta_m^j\right)$) несколько усложняет проблему и не позволяет использовать данный подход в представленной форме [22].

В случае анализа наблюдений из реальных реализаций трафика очевидно, что невозможно определить к какой выборке принадлежат наблюдения и мы не можем определить, какая случайная величина порождает каждое наблюдение. Это означает, что неизвестно относительное распределение наблюдений, принадлежащего каждой переменной. Поэтому функция правдоподобия выборки будет иметь вид:

$$\mathcal{L}\left(\pi_1,\ldots\pi_k,\theta_1^1,\ldots\theta_m^1,\ldots\theta_1^k,\ldots\theta_m^k\right)=\prod_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{k}\pi_j f^j\left(x_i,\theta_1^j,\ldots\theta_m^j\right),$$

с учётом, что $\sum_{j=1}^{K}\pi_j=1$.

В данном случае оценка максимального правдоподобия параметров распределения смеси запишется как

$$\left(\hat{\pi}_1,\ldots\hat{\pi}_k,\hat{\theta}_1^1,\ldots\hat{\theta}_m^1,\ldots\hat{\theta}_1^j,\ldots\hat{\theta}_m^j,\ldots\hat{\theta}_1^k,\ldots\hat{\theta}^k\right)=$$
$$=\arg max\left\{\mathcal{L}\left(\pi_1,\ldots\pi_k,\theta_1^1,\ldots\theta_m^1,\ldots\theta_1^k,\ldots\theta_m^k\right)\right\}$$

С учетом введенных обозначений функции правдоподобия получит вид

$$g\left(x,p,\lambda_1,\lambda_2\right)=p\lambda_1e^{-\lambda_1x}+\left(1-p\right)\lambda_2e^{-\lambda_2x}=p_1\lambda_1e^{-\lambda_1x}+p_2\lambda_2e^{-\lambda_2x}$$

В этом случае параметры распределений представляются как: $\pi_j=\left(p_1^j,p_2^j\right)$, $\theta^j=\left(\lambda_1^j,\lambda_2^j\right)$.

На каждом шаге алгоритма (ν) будет использоваться компонента смеси $f_j^{(\nu)}\left(x_i\right)=\lambda_je^{-\lambda_jx_i}$

Тогда плотность смеси

$$g^{(\nu)}\left(x_i\right)=\sum_{j=1}^{k}p_j\lambda_je^{-\lambda_jx_i}$$

Для двухкомпонентной смеси соответственно

$$p_1=p\,,\quad p_2=1-p$$

М-шаг алгоритма – уточняются значения параметров распределения на текущем шаге

$$p^{(\nu+1)}=\frac{f_j^{(\nu)}\left(x_i\right)p_j^{(\nu)}}{\sum_{i=1}^{N}g^{(\nu)}\left(x_i\right)}/N \qquad (15)$$

$$\lambda_j^{(\nu+1)}=\frac{\sum_{i+1}^{N}\dfrac{f_j^{(\nu)}\left(x_i\right)x_i}{g^{(\nu)}\left(x_i\right)}}{\sum_{i+1}^{N}\dfrac{f_j^{(\nu)}\left(x_i\right)}{g^{(\nu)}\left(x_i\right)}} \qquad (16)$$

В качестве критерия останова вычислений целесообразно принять стабилизацию значений оцениваемых параметров. Используя такой подход к реализации ЕМ-алгоритма, можно получить параметры составляющих гиперэкспоненциальных распределений (7) и (8).

Параметр δ невозможно определить с использованием подходов, основанных на оценке первых двух моментов и на основе ЕМ-алгоритма. Но определив параметры μ_1 и μ_2 и принимая во внимание вклад каждого из них в среднее значении μ, можно определить δ_1 и δ_2 с долями, соответствующими вкладу μ_1 и μ_2 в (8).

Следует учесть, что величина δ является обратной T. Для определения T воспользуемся свойствами системы $H_l/H_k/1$ [12, 17, 18], результатом исследования которой является выражение для средней задержки в очереди

$$\bar{T}=\frac{z_1^{(n)}\mu_2\left(z_2^{(n)}-\mu_1\right)+z_2^{(n)}\mu_1\left(z_1^{(n)}-\mu_2\right)}{\mu_1\mu_2z_1^{(n)}z_2^{(n)}},$$

где $z_1^{(n)}$ и $z_2^{(n)}$ – отрицательные вещественные корни кубического уравнения

$$s^3-c_2s^2-c_1s-c_0=0,$$

коэффициенты определяются согласно следующим выражениям:

$$c_0=A\mu_1\mu_2-B\gamma_1\gamma_2,$$

$$c_1=AM+B\Lambda,$$

$$c_2=M\left(a_1+a_2\right)-\Lambda\left(b_1+b_2\right)-A+B,$$

$$a_1=\frac{\mu_1pq}{\gamma_{1+}\mu_1}+\frac{\mu_2p\left(1-q\right)}{\gamma_{1+}\mu_2},$$

$$a_1=\frac{\mu_1\left(1-p\right)q}{\gamma_{2+}\mu_1}+\frac{\mu_2\left(1-p\right)\left(1-q\right)}{\gamma_{2+}\mu_2},$$

$$b_1 = \frac{\gamma_1 pq}{\gamma_1+\mu_1} + \frac{\gamma_2 q(1-p)}{\gamma_2+\mu_1},$$

$$b_2 = \frac{\gamma_1 p(1-q)}{\gamma_1+\mu_2} + \frac{\gamma_2(1-q)(1-p)}{\gamma_2+\mu_2}.$$

Тогда для δ можно записать

$$\delta = \frac{1}{T} \qquad (17)$$

Анализ статистических характеристик мультимедийного трафика

Ограничениям, которые необходимо учесть в (12) – независимость случайных величин, входящих в данное выражение, соответствует пример реализации трафика сети Интернет, в котором отсутствуют корреляции внутри последовательностей интервалов времени между пакетами и длин пакетов, а также отсутствует взаимная корреляция данных последовательностей [9].

Анализ распределения случайных интервалов времени между пакетами показал, что наиболее точным является распределение Weibull (Вейбулла) с параметрами: $\alpha = 0,32$, $\beta = 167$. Для длин пакетов получен результат, в виде распределения Pareto (Парето) с параметрами: $\alpha = 0,3$, $\beta = 60$.

Исследование статистических характеристик исследуемого трафика показывает, что системы обработки данного потока соответствуют математической модели очереди G/G/1. Следовательно, для оценки джиттера времени задержки пакетов данного потока в системе можно воспользоваться выражением (12).

Численная оценка параметров гипреэкспоненциальных распределений

Для анализа параметров гиперэкспоненциальных распределений (7) и (8) с использованием ЕМ-алгоритма следует ввести следующие обозначения:

– для (7), в плотности вероятностей интервалов времени между пакетами, веса компонент $\left(p_1^j, p_2^j\right) = \left(P_1^j, P_2^j\right)$, параметры распределения – $\left(\lambda_1^j, \lambda_2^j\right) = \left(\gamma_1^j, \gamma_2^j\right)$;

– для (8), в плотности вероятностей длительностей обработки пакетов, веса компонент $\left(p_1^j, p_2^j\right) = \left(q_1^j, q_2^j\right)$, параметры распределения – $\left(\lambda_1^j, \lambda_2^j\right) = \left(\mu_1^j, \mu_2^j\right)$.

Для инициализации работы ЕМ-алгоритма необходимо установить начальные параметры весов компонент $\left(P_1^0, P_2^0\right)$, $\left(q_1^0, q_2^0\right)$ и параметры компонент смеси γ_1^0, μ^0. Для установления данных значений можно использовать стандартные приемы [9, 16-19], в соответствии с которыми на начальном этапе принимается, что в случае двухкомпонентной смеси вес каждой компоненты $P_j^0 = 1/2$ и $q_j^0 = 1/2$, В качестве параметров компоненты принимаются средние значения выборки. Для оценки параметров распределений (7) и (8), следует учесть, что плотность распределения последовательностей интервалов времени между пакетами характеризуются параметром $\bar{\gamma} = \frac{1}{\bar{t}}$, где $\bar{t}$ – среднее значение интервалов времени между пакетами, а плотность распределения длительности передачи пакета характеризуются параметром $\bar{\mu} = \frac{1}{\bar{\tau}}$, где $\bar{\tau}$ – средняя длительность обработки пакета.

С учетом характеристик исследуемого в данной работе трафика для инициализации алгоритма можно использовать следующие параметры:

$P_j^0 = 1/2$ для обеих компонент, аналогично $q_j^0 = 1/2$;

$\gamma^0 = 0,000539,\ \text{с}^{-1}$ – для интервалов времени между пакетами;

$\mu^0 = 0,2166,\ \text{с}^{-1}$ – для длительностей передачи пакетов.

Параметры гиперэкспоненциальных распределений по ЕМ-методу получены согласно выражениям (15), (16) и (17).

Численные значения параметров гиперэкспонент, полученные на основе моментов представлены в таблице

Таблица

Параметры гиперэкспоненциальных распределений

	Метод моментов		ЕМ-алгоритм	
Плотность вероятностей случайной величины	Параметры компонент смеси, мс$^{-1}$	Веса компонент смеси	Параметры компонент смеси, мс$^{-1}$	Веса компонент смеси
$f_V(\tau)$	$\gamma_1 = 0,0925$, $\gamma_2 = 0,0075$	$P_1 = 0,9254$, $P_2 = 0,074$	$\gamma_1 = 0,04$ $\gamma_2 = 0,28$	$P_1 = 0,96$, $P_2 = 0,04$
$f_Q(\tau)$	$\mu_1 = 1,42$, $\mu_2 = 0,007$	$q_1 = 0,995$, $q_2 = 0,005$	$\mu_1 = 0,993$, $\mu_2 = 0,0084$	$q_1 = 0,996$, $q_2 = 0,004$
$f_W(\tau)$	$\delta_1 = 1,95$, $\delta_2 = 76,5\times10^{-6}$	$\Delta_1 = 0,995$, $\Delta_2 = 0,005$	$\delta_1 = 1,95$, $\delta_2 = 0,00099$	$\Delta_1 = 0,996$, $\Delta_2 = 0,004$

На основании полученных значений параметров с использованием ЕМ-алгоритма и формулы (12) определен джиттер – $J = 3,5$ мс.

Интересным представляется анализ влияния загрузки сети на джиттер $\rho = \frac{\bar{\gamma}}{\bar{\mu}}$. При этом для оценки коэффициента загрузки сети необходимо определить средние значения $\bar{\gamma}$ и $\bar{\mu}$, которые можно получить согласно выражениям

$$\bar{\gamma} = \frac{\gamma_1\gamma_2}{q\gamma_2 + (1-q)\gamma_1}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu_1\mu_2}{q\mu_2 + (1-q)\mu_1}$$

Коэффициент загрузки сети в условиях обработки исследуемого трафика, при $\bar{\gamma} = 0,04$ мс$^{-1}$, $\bar{\mu} = 0,7$ мс$^{-1}$, имеет значение $\rho \approx 0,06$.

Изменение загрузки в модели можно реализовать при варьировании интервалов времени между пакетами (что соответствует параметру γ, параметр δ соответственно следует пересчитать) с неизменной величиной длины пакетов (что соответствует параметру μ), при этом необходимо учесть, что исходная реализация трафика была получена при загрузке канала равной 0,06. Влияние загрузки сети на джиттер показано на рисунке 1.

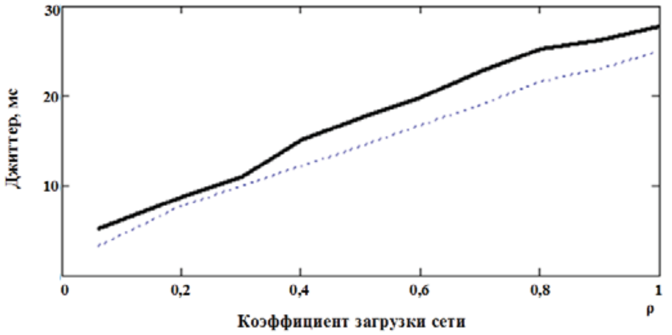

Рис. 1. График зависимости джиттера задержки от загрузки сети

Анализ графика, рисунок, показывает, что определение параметров методом моментов и ЕМ-алгоритмом дает достаточно близкие значения джиттера при любом уровне загрузки сети. Максимальное отклонение составляет 8%. Это позволяет сделать вывод о высокой (хорошей) достаточной точности и одного и другого подхода. Преимуществом ЕМ-алгоритма является его хорошая адаптируемость для использования в программных реализациях.

Выводы

Результаты исследования показали, что применение модели типа $H_2/H_2/1$ позволяет аппроксимировать систему G/G/1 и получить аналитические оценки джиттера. Для определения параметров гиперэкспоненциальных распределений использовали два подхода: метод моментов и ЕМ-алгоритм. Результаты сравнения оценок джиттера с использованием метода моментов и ЕМ-алгоритма показали, что согласуются.

При анализе влияния коэффициента загрузки сети на джиттер было определено, что джиттер незначительно увеличивается с ростом нагрузки. Использование гиперэкспоненциальных распределений позволило получить достаточно простые формулы для оценки значений джиттера в узлах телекоммуникационной сети.

Литература

1. *Шелухин О.И., Осин А.В., Смольский С.М.* Самоподобие и фракталы // Телекоммуникационные приложения. М.: Физматлит, 2008. 368 с.
2. *Taggu M.S.* Self-similar processes. In S. Kotz and N. Johnson, editors, Encyclopedia of Statistical Sciences. Wiley, New York, 1988, v. , pp. 352-357.
3. *Feldmann A., Whitt W.* Fitting Mixtures of Exponentials to Long-Tail Distributions to Analyze Network Performance Models // Proceedings IEEE INFOCOM'97. Piscataway, NJ: IEEE. 1997. P. 1096-1104.
4. *Andersen A.T., Jensen A., Nielsen B.F.* Modelling and performance study of packet-traffic with self-similar characteristics over several time-scales with Markovian arrival processes (MAP), Twelfth Nordic Teletraffic Seminar, NTS 12, 1995. P. 269-283.
5. *Lucantoni D.M.* The BMAP/G/1 queue: a tutorial, in: Models and Techniques for Performance Evaluation of Computer and Communication Systems, Springer, New York (1993). P. 330-358.
6. *Neuts M.F.* Structured Stochastic Matrices o/M/G/l Type and Their Applications, Marcel Dekker, New York (1989).
7. *Asmussen and G. Koole*, Marked point processes as limits of Markovian arrival streams // J. Appl. Probab. 30 (1993), pp. 365-372.
8. *Dbira H., Girard A., Sanso B.* Calculation of packet jitter for non-poisson traffic // Annals of telecommunications. 2016. Vol. 71. Issue 5-6. P. 223–237.
9. *Карташевский В.Г., Буранова М.А.* Моделирование джиттера пакетов при передаче по мультисервисной сети // Информационные технологии и телекоммуникации. 2019. Т. 17. № 1. С. 34-40.
10. *Kartashevskiy I., Buranova M.* Calculation of Packet Jitter for Correlated Traffic // International Conference on «Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. NEW2AN 2019». 2019. Vol 11660. P. 610-620. (Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cham). DOI: 10.1007/978-3-030-30859-9_53.
11. *Kleinrock 1.L.* Queueing Systems, Vol. I: Theory. New York, NY, Wiley-Interscience, 1975, 432 p.
12. *Keilson J., Machihara F.* Hyperexponential waiting time structure in hyperexponential $H_K/H_L/1$ system // Journal of the Operation Society of Japan. 1985. № 28(3). P. 242-250. DOI: 10.15807/jorsj.28.242.
13. *Demichelis C., Chimento P.* IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). Institution IETF, RFC 33934. – 2000. 21 p. DOI: 10.17487/RFC3393.
14. Internet protocol data communication service IP packet transfer and availability performance parameters. ITU-T Recommendation Y.1540. 2002. 33 p. // URL: https://www.itu.int/rec/T-REC-I.380-199902-S/en (д.о. 10.11.2019).
15. *Латыпов Р.Т., Буранова М.А.* Анализ параметров функционирования сети MPLS при изменении топологии // Труды учебных заведений связи. 2019. Т. 5. № 3. С. 6-12.
16. *Buranova M.A., Ergasheva D.R., Kartashevskiy V.G.* Using the EM-algorithm to Approximate the Distribution of a Mixture by Hyperexponents. 2019 International Conference on Engineering and Telecommunication (EnT) Dolgoprudny, Russia, 2019, pp. 1-4. DOI: 10.1109/EnT47717.2019.9030551
17. *Тарасов В.Н., Карташевский И.В.* Определение среднего времени ожидания требований в управляемой системе массового обслуживания H2/H2/1 // Системы управления и информационные технологии. 2014. №3(57). С. 92-96.
18. *Тарасов В.Н., Горелов Г.А., Ушаков Ю.А.* Восстановление моментных характеристик распределения интервалов между пакетами входящего трафика // Инфокоммуникационные технологии. 2014. №2. С. 40-44.
19. *Day N.E.* Estimating the components of a mixture of normal distributions. Biometrika, 1969. Vol. 56, No. 3. P. 463-474.
20. *Королев В.Ю.* ЕМ-алгоритм его модификации и их применение к задаче разделения смесей вероятностных распределений. Теоретический обзор. М.: ИПИ РАН, 2007. С. 94.
21. *Воронцов К.В.* Математические методы обучения по прецедентам (теория обучения машин). URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/Voron-ML-1.pdf. [10.02.2021].
22. *Baird S.R.* Estimating mixtures of exponential distributions using maximum likelihood and the EM algorithm to improve simulation of telecommunication networks, https://open.library.ubc.ca/collections/ubctheses/831/items/1.0090805.

QUEUE ANALYSIS IN THE G/G/1 SYSTEM BASED ON HYPEREXPONENTIAL DISTRIBUTIONS

Marina A. Buranova, _Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia,_ **_buranova-ma@psuti.ru_**

Abstract

For real-time applications, the change in packet delay, which is usually called delay jitter, is one of the most important parameters of quality of service in modern infocommunication networks when processing multimedia streams, along with the delay and the probability of packet loss. This article discusses approaches to assessing jitter in modern infocommunication networks when processing non-Poissonian traffic in the G/G/1 system. To approximate the system of an arbitrary queue G/G/1, a model based on hyperexponential distributions of the type H2/H2/1 was used. As a processed stream, the implementation of IP network traffic with the absence of mutual correlations between the time intervals between packets and the times of packet processing is used. An important task in this case is to determine the parameters of hyperexponential distributions for the time intervals between packets and packet processing times. The paper presents two methods for determining the parameters of hyperexponential distributions: using the method of moments and using the EM-algorithm. The paper analyzes the influence of the network load factor on the jitter value when using two models for determining the parameters of hyperexponential distributions. This analysis showed a slight increase in jitter with increasing network load both in the case of using the method of moments and in the case of the EM algorithm. It has been determined that the estimates of the jitter values in the case of applying the method of moments and the EM algorithm are quite close in value. The main result of the work is to obtain simple calculation formulas for the analysis of jitter in the G/G/1 system using hyperexponential distributions.

Keywords: *jitter, queuing system, hyperexponential distribution, EM-algorithm, method of moments.*

References

1. Sheluhin O.I., Tenyakshev A.M., Osin A.V. (2003). Fraktalnie processi v telekommunikaciyah [Fractal Processes in Telecommunications]. Edited by. O.I. Sheluhina. Radiotehnika. 480 p. (in Russian)
2. Taggu M.S. (1988). Self-similar processes. In S. Kotz and N. Johnson, editors, Encyclopedia of Statistical Sciences. Wiley, New York, v. 8, pp. 352-357.
3. Feldmann, A., & Whitt, W. (1997). Fitting Mixtures of Exponentials to Long-Tail Distributions to Analyze Network Performance Models. *Proceedings IEEE INFOCOM*'97, pp. 1096-1104.
4. Andersen A.T., Jensen A., Nielsen B.F. (1995), Modelling and performance study of packet-traffic with self-similar characteristics over several time-scales with Markovian arrival processes (MAP). *Twelfth Nordic Teletraffic Seminar,* NTS 12, pp. 269-283.
5. Lucantoni D.M. (1993). The BMAP/G/1 queue: a tutorial. Models and Techniques for Performance Evaluation of Computer and Communication Systems, Springer, New York, pp. 330-358.
6. Neuts M.F. (1989). Structured stochastic matrices of M/G/l type and their applications. Marcel Dekker, New York, 512 p.
7. Asmussen, S., Koole G. (1993). Marked point processes as limits of Markovian arrival streams. *J. Appl. Probab*, vol. 30, no. 2, pp. 365-372.
8. Dbira H., Girard A., Sanso B. (2016). Calculation of packet jitter for non-poisson traffic. *Annals of telecommunications*, vol. 71, issue 5-6, pp. 223-237.
9. Kartashevsky V.G., Buranova M.A. (2019). Modelirovanie dzhittera paketov pri peredache po mul'tiservisnoj seti. [Modeling of jitter packets when transmitting over a multiservice network]. *Informacionnye tekhnologii i telekommunikacii* [Information technologies and telecommunications], vol. 17, no 1, pp. 34-40. (in Russian)
10. Kartashevskiy I., Buranova M. (2019). Calculation of Packet Jitter for Correlated Traffic. *International Conference on "Internet of Things, Smart Spaces, and Next Generation Networks and Systems. NEW2AN 2019*", vol. 11660, pp. 610-620. (Lecture Notes in Computer Science, Springer, Cham). DOI: 10.1007 / 978-3-030-30859-9_53.
11. L. Kleinrock (1975). Queueing Systems, Vol. I: Theory, Wiley, New York, NY, 432 p.
12. Keilson, J., Machihara, F. (1985). Hyperexponential waiting time structure in hyperexponential system. *Journal of the Operation Society of Japan*, vol. 28, no. 3, pp. 242-250. DOI: 10.15807/jorsj.28.242.
13. Demichelis C, Chimento P. (2000). IP Packet Delay Variation Metric for IP Performance Metrics (IPPM). Institution IETF, RFC 33934, 21 p. DOI: 10.17487/RFC3393.
14. Internet protocol data communication service IP packet transfer and availability performance parameters. ITU-T Recommendation Y.1540, 2002, 33 p.
15. Kartashevsky V.G., Buranova M.A. (2019). Modelirovanie dzhittera paketov pri peredache po mul'tiservisnoj seti [Modeling of jitter packets when transmitting over a multiservice network]. *Informacionnye tekhnologii i telekommunikacii* [Information technologies and telecommunications], vol. 17, no. 1, pp. 34-40 (in Russian)
16. Buranova M.A., Ergasheva D.R., Kartashevskiy V.G. (2019). Using the EM-algorithm to Approximate the Distribution of a Mixture by Hyperexponents. *2019 International Conference on Engineering and Telecommunication (EnT)* Dolgoprudny, Russia, pp. 1-4. DOI: 10.1109/EnT47717.2019.9030551.
17. Tarasov V.N., Kartashevskij I.V. (2014). Opredelenie srednego vremeni ozhidaniya trebovanij v upravlyaemoj sisteme massovogo obsluzhivaniya N2/N2/1 [Determination of the average waiting time for requirements in a managed mass service system]. *Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii* [Control systems and information technologies], no. 3(57), pp. 92-96. (In Russian)
18. Tarasov V.N., Gorelov G.A., Ushakov Yu.A. (2014). Vosstanovlenie momentnyh harakteri-stik raspredeleniya intervalov mezhdu paketami vhodyashchego trafika [Recovery of moment characteristics of the distribution of intervals between packets of incoming traffic]. *Infokommunikacionnie tehnologii* [Infocommunication technologies], no. 2, pp. 40-44. (In Russian)
19. Day N.E. (1969). Estimating the components of a mixture of normal distributions. *Biometrika,* vol. 56, no. 3, pp. 463-474.
20. Korolev V.Yu. (2007). EM-algoritm ego modifikacii i ih primenenie k zadache razdeleniya smesej veroyatnostnyh raspredelenij. Teoreticheskij obzor [EM-algorithm for its modification and their application to the problem of separation of mixtures of probability distributions. Theoretical review]. Moscow: IPI RAN, 94 p. (In Russian)
21. Voroncov K.V. Matematicheskie metody obucheniya po precedentam (teoriya obucheniya mashin) [Mathematical teaching methods by precedents (machine learning theory)], Available at: http://www.machinelearning.ru/wiki/images/6/6d/Voron-ML-1.pdf. (In Russian)
22. Baird, SR.: Estimating mixtures of exponential distributions using maximum likelihood and the EM algorithm to improve simulation of telecommunication networks, Available at: https://open.library.ubc.ca/collections/ubctheses/831/items/1.0090805.

Information about author:

Marina A. Buranova, _Associate Professor of Information Security Department, PhD in Technical Sciences, Povolzhskiy State University of Telecommunications and Informatics, Samara, Russia_